中国科学: 数学　2010 年　第 40 卷　第 7 期: 649～660
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

多变元 Sylvester 结式与多余因子

赵世忠[①*], 符红光[②③]

① 华东师范大学上海市高可信计算重点实验室, 上海 200062;
② 电子科技大学计算机科学与工程学院, 成都 610054;
③ 中国科学院成都计算机应用研究所, 成都 610041
E-mail: szzhao@sei.ecnu.edu.cn, fu_hongguang@hotmail.com

收稿日期: 2009-09-15; 接受日期: 2010-04-08; * 通信作者
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (批准号: 2004CB318003)、国家自然科学基金 (批准号: 90718041) 以及上海市重点学科建设 (批准号: B412) 资助项目

摘要　经典的 Sylvester 结式方法是代数几何的一种基本消元方法, 但它一次只能处理 1 个变元 2 个方程的多项式系统. 本文将 Sylvester 结式扩展到 n 个变元 $n+1$ 个方程的多项式系统, 并且证明了新的多变元的 Sylvester 结式包含在原多项式系统的理想中. 同时, 给出了一种去掉其部分多余因子的方法.

关键词　多变元 Sylvester 矩阵　多变元 Sylvester 结式　多余因子

MSC (2000) 主题分类　00A06, 13A50, 13P99, 68W30

1　引言

经典的 Sylvester 结式方法是代数几何的一种基本消元方法，它一次只能处理 1 个变元 2 个方程的多项式系统. 给定任一数域 $\mathcal{K}$, 对于 $\mathcal{K}[x]$ 中次数分别为 $m, l\,(m, l > 0)$ 的两个多项式

$$\begin{cases} f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0, \\ g(x) = b_l\, x^l \ + \ b_{l-1}x^{l-1} + \cdots + b_0\,, \end{cases}$$

它们的 Sylvester 矩阵 [1)] 为:

$$\mathrm{Syl}(f,g,x) = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} l\,\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\,\text{行} \end{array},$$

[1)] 有的文献记 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$ 的转置矩阵 $\mathrm{Syl}(f,g,x)^{\mathrm{T}}$ 为其 Sylvester 矩阵

引用格式: Zhao S Z, Fu H G. Multivariate Sylvester resultant and extraneous factors (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(7): 649–660

其行列式 $|\mathrm{Syl}(f,g,x)|$ 称为 Sylvester 结式 [1,2].

关于 Sylvester 结式 $|\mathrm{Syl}(f,g,x)|$ 有一个定理 [3]:

定理 1.1 存在两个次数分别满足 $\deg(p(x),x)<l$, $\deg(q(x),x)<m$ 的多项式 $p(x),q(x)\in\mathcal{K}[x]$, 使得

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=|\mathrm{Syl}(f,g,x)|.$$

对于多变元的多项式系统, 一个世纪以来, 国际上的学者提出了不少结式方法. 关于齐次多项式系统, 文献 [4–6] 给出了基于两个行列式的商的 Macaulay 结式; 针对稀疏多项式系统, 文献 [7, 8] 提出了 Newton Sparse 结式; 最近几年来, Chtcherba 等 [9−11] 讨论了基于 Dixon 结式的一种新型的 Sylvester 结式. 特别值得注意的是, 1908 年, Dixon[12] 将单变元的 Sylvester 结式扩展到了双变元情形 (三个双变元多项式构成的多项式系统), 并且首次介绍了双变元的 Dixon-Sylvester 混合结式. 将近一个世纪后, 分别针对单变元与双变元的多项式系统, Chionh 等 [13,14] 讨论了 Sylvester 结式、Dixon 结式以及 Dixon-Sylvester 混合结式等 3 种结式矩阵的变换及关系. 1994 年, Kapur 等 [15] 针对多变元的 Dixon 结式的退化情形, 提出了 KSY 条件. 最近, Sun 和 Li[16] 将混合 Dixon-Sylvester 结式 2)扩展到了 n 变元情形. 而在混合结式的两个极端情形中, 除去 Dixon 结式外, 另外一个极端情形就是本文讨论的 Sylvester 结式. 所以本文将沿着 Dixon 的双变元 Sylvester 结式路线, 介绍下列 n 个变元 $n+1$ 个多项式的系统

$$f_j=\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}a_{j,i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\in\mathcal{K}[X],\quad 1\leqslant j\leqslant n+1, \tag{1.1}$$

的 Sylvester 结式, 其中 $[X]=[x_1,\dots,x_n]$, $a_{j,i_1,\dots,i_n}\in\mathcal{K}[u_1,u_2,\dots,u_k]$, 并详细讨论其多余因子问题.

2 多变元 Sylvester 结式

这一节, 我们介绍 n 变元多项式系统 (1.1)的 Sylvester 结式.

对于 n 变元多项式系统 (1.1) 来说, 它的Sylvester 矩阵可以通过凑方的方法得到.

首先构造个数为 $n!\prod_{i=1}^n m_i$ 的单项式的集合:

$$\left\{\prod_{i=1}^n x_i^{\sigma_i}\ \middle\|\ \begin{array}{l}\sigma_1=0\cdots nm_1-1,\\ \sigma_2=0\cdots m_2-1,\\ \sigma_3=0\cdots 2m_3-1,\\ \qquad\vdots\\ \sigma_n=0\cdots(n-1)m_n-1\end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

然后按相对于 $x_1>\cdots>x_n$ 的字典序 (或全幂序), 由大到小将其写为

$$\left[x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1},\dots,x_1^{nm_1-1},\dots,x_1^{\sigma}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1},\dots,x_1^{\sigma},\dots,\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1},\dots,1\right].$$

2) 文献 [16] 将混合结式称为混合 Cayley-Sylvester 结式

再用上述列表中的每个元素去乘 $n+1$ 个多项式 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$, 就得到下面 $(n+1)!\prod_{i=1}^n m_i$ 个多项式的列表:

$$\begin{aligned}\Bigg[&x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}(f_1,\dots,f_{n+1}),\dots,x_1^{nm_1-1}(f_1,\dots,f_{n+1}),\dots,\\&\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}(f_1,\dots,f_{n+1}),\dots,(f_1,\dots,f_{n+1})\Bigg],\end{aligned}\tag{2.2}$$

对照 (1.1), 容易得出上述多项式组关于 x_1 的次数为 $(n+1)m_1-1$, x_i 的次数为 $im_i-1\,(2\leqslant i\leqslant n)$. 同样将上述多项式组中出现的关于变元 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 的所有幂积, 按相对于 $x_1>\cdots>x_n$ 的字典序 (或全幂序), 由大到小写为

$$\left[x_1^{(n+1)m_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{im_i-1},\dots,x_1^{(n+1)m_1-1},\dots,x_1^{\sigma}\prod_{i=2}^n x_i^{im_i-1},\dots,x_1^{\sigma},\dots,\prod_{i=2}^n x_i^{im_i-1},\dots,1\right],\tag{2.3}$$

这时其个数正好也是 $(n+1)!\prod_{i=1}^n m_i$. 若将这些单项式看作新的不同的变元, 将多项式列表 (2.2) 的系数矩阵用 $\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})$ 来表示, 则多项式列表 (2.2)就可写成下列形式

$$\begin{aligned}&\Bigg[x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}(f_1,\dots,f_{n+1}),\dots,x_1^{nm_1-1}(f_1,\dots,f_{n+1}),\dots,\\&\qquad x_n^{(n-1)m_n-1}(f_1,\dots,f_{n+1}),\dots,(f_1,\dots,f_{n+1})\Bigg]\\&\quad=\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})\cdot\left[x_1^{(n+1)m_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{im_i-1},\dots,x_n^{nm_n-1},\dots,1\right]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

这时系数矩阵 $\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})$ 是个方阵. 它的阶是 $(n+1)!\prod_{i=1}^n m_i$.

定义 2.1 矩阵 $\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})$ 称为 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$ 关于 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 的 Sylvester 矩阵 [17,18]. 行列式 $|\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})|$ 称为 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$ 关于 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 的 Sylvester 结式 [18].

例 2.1 考虑下列多项式组:

$$\begin{cases}f_1(x,y)=x-6a,\\ f_2(x,y)=6axy+(5+4a)x,\\ f_3(x,y)=5xy-5x+(4-a)y+(5+6a),\end{cases}\tag{2.5}$$

其 Sylvester 矩阵为

$$\mathrm{Syl}(f_1,f_2,f_3)=\begin{array}{c}\\ xf_1\\ xf_2\\ xf_3\\ f_1\\ f_2\\ f_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}x^2y & x^2 & xy & x & y & 1\end{array}\\ \begin{pmatrix} & 1 & & -6a & & \\ 6a & (5+4a) & & & & \\ 5 & -5 & (4-a) & (5+6a) & & \\ & & & 1 & & -6a\\ & & 6a & (5+4a) & & \\ & & 5 & -5 & (4-a) & (5+6a)\end{pmatrix}\end{array},\tag{2.6}$$

它的行列式, 即 Sylvester 结式是

$$|\mathrm{Syl}(f_1, f_2, f_3)| = -36a^2(a-4)(20+131a+260a^2). \qquad \square$$

为了方便后面的叙述, 用 S 表示矩阵 $\mathrm{Syl}(f_1, \dots, f_{n+1})$, J 表示它的阶, 即 $S = \mathrm{Syl}(f_1, \dots, f_{n+1})$, $J = (n+1)! \prod_{l=1}^n m_l$. 同时设 $S = (s_{i,j})_{J \times J}$, 即

$$S = \begin{array}{c} \\ x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}f_1 \\ x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1^{(n+1)m_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{im_i-1} & \cdots & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,J} \\ s_{2,1} & \cdots & s_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{J,1} & \cdots & s_{J,J} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.7}$$

其中多项式组 (2.2) 与单项式组 (2.3) 分别是矩阵的行指标与列指标. 即, 对任一行来说, 其每个元素与所在列的列指标的乘积之和等于这一行的行指标.

定理 2.1 Sylvester 结式 $|\mathrm{Syl}(f_1, \dots, f_{n+1})|$ 可表示成多项式组 (2.2) 的线性组合:

$$|\mathrm{Syl}(f_1, \dots, f_{n+1})| = S_{1,J}x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}f_1 + S_{2,J}x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{(i-1)m_i-1}f_2 + \cdots + S_{J,J}f_{n+1}, \tag{2.8}$$

其中 $S_{i,j}$ 表示矩阵 S 在第 i 行第 j 列的代数余子式.

证明 首先由行列式的性质有

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^J s_{i,1}S_{i,J} = 0, \\ \qquad \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^J s_{i,J-1}S_{i,J} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^J s_{i,J}S_{i,J} = |S|, \end{cases}$$

然后将上式的第 j 个等式两边同乘以矩阵 S 的第 j 列的列指标, 其中 $1 \leqslant j \leqslant J$, 则有

$$\begin{cases} \left(x_1^{(n+1)m_1-1}\prod\limits_{i=2}^n x_i^{im_i-1}\right)\sum\limits_{i=1}^J s_{i,1}S_{i,J} = 0, \\ \qquad \vdots \\ x_n\sum\limits_{i=1}^J s_{i,J-1}S_{i,J} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^J s_{i,J}S_{i,J} = |S|, \end{cases}$$

再将 J 个等式的左右两边分别相加, 可得

$$\left(x_1^{(n+1)m_1-1}\prod_{i=2}^n x_i^{im_i-1}\right)\sum_{i=1}^J s_{i,1}S_{i,J} + \cdots + x_n\sum_{i=1}^J s_{i,J-1}S_{i,J} + \sum_{i=1}^J s_{i,J}S_{i,J} = |S|,$$

最后将上式左边重新合并化简, 就可化为式 (2.8) 的右边式子. □

由上面的定理知, 例 2.1 中的 Sylvester 结式 $|S|=|\mathrm{Syl}(f_1,f_2,f_3)|$ 可写成下列形式:

$$|\mathrm{Syl}(f_1,f_2,f_3)|=S_{1,6}\,xf_1+S_{2,6}\,xf_2+S_{3,6}\,xf_3+S_{4,6}\,f_1+S_{5,6}\,f_2+S_{6,6}\,f_3\,, \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{cases} S_{1,6}=150a(2a+1)(a-4),\\ S_{2,6}=-30(a-4)a,\\ S_{3,6}=36a^2(a-4),\\ S_{4,6}=6a(a-4)(20+131a+260a^2),\\ S_{5,6}=6a(a-4)^2,\\ S_{6,6}=0. \end{cases} \tag{2.10}$$

由多项式组 (2.2) 与式 (2.8) 可得

定理 2.2 Sylvester 结式 $|\mathrm{Syl}(f_1,\ldots,f_{n+1})|$ 可表示成 $\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ 的线性组合:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Syl}(f_1,\cdots,f_{n+1})|=&\left(S_{1,J}\,x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^{n}x_i^{(i-1)m_i-1}+\cdots+S_{J-n,J}\right)f_1+\cdots\\&+\left(S_{n+1,J}x_1^{nm_1-1}\prod_{i=2}^{n}x_i^{(i-1)m_i-1}+\cdots+S_{J,J}\right)f_{n+1}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

即 Sylvester 结式 $|\mathrm{Syl}(f_1,\ldots,f_{n+1})|$ 属于 $\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ 构成的理想.

很显然, (2.9) 可化为

$$|\mathrm{Syl}(f_1,f_2,f_3)|=(S_{1,6}\,x+S_{4,6})\,f_1+(S_{2,6}\,x+S_{5,6})\,f_2+(S_{3,6}\,x+S_{6,6})\,f_3\,. \tag{2.12}$$

所以 $|\mathrm{Syl}(f_1,f_2,f_3)|=-36a^2(a-4)(20+131a+260a^2)$ 在多项式组 (2.5) 中的 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 构成的理想中.

3 Sylvester 结式的多余因子

结式方法虽是一种经典的、有效的消元方法 [19], 但在结式中经常会存在多余因子 [18,20].

下面我们首先讨论一般情形的多项式系统 (1.1) 的 Sylvester 结式的多余因子问题.

由定理 2.2 可知, Sylvester 结式可表示成 $\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ 的线性组合. 显然, 在此组合 (2.11) 中, $\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ 的系数的最大公因子是多余因子. 而由于 Sylvester 结式不含有任何变元 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, 所以 (2.11) 中的 $\{f_1,\ldots,f_{n+1}\}$ 的系数的最大公因子也不会含有任何变元 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是有下列结论:

定理 3.1 矩阵 S 的 J 个代数余子式的最大公因子

$$\mathrm{GCD}(S_{1,J},S_{2,J},\ldots,S_{J,J}) \tag{3.1}$$

是 Sylvester 结式 $|\mathrm{Syl}(f_1,\ldots,f_{n+1})|$ 的多余因子.

对于例 2.1 来说, 由式 (2.12) 可推得

$$\begin{aligned}&\mathrm{GCD}(S_{1,6}\,x+S_{4,6},\,S_{2,6}\,x+S_{5,6},\,S_{3,6}\,x+S_{6,6})\\&\quad=\mathrm{GCD}(S_{1,6},\,S_{2,6},\,S_{3,6},\,S_{4,6},\,S_{5,6},\,S_{6,6})=6a(a-4)\end{aligned}$$

是多余因子. 事实上,

$$\frac{|\mathrm{Syl}(f_1,f_2,f_3)|}{\mathrm{GCD}(S_{1,6},S_{2,6},S_{3,6},S_{4,6},S_{5,6},S_{6,6})}=-6a(20+131a+260a^2)=0$$

是多项式组 (2.5) 有零点的一个充分必要条件.

下面讨论在 Sylvester 矩阵的退化情形下, 如何去掉其多余因子.

定义 3.1 给定一个矩阵, 若存在矩阵中的一列, 不能表示成其它列的线性组合, 则称这个矩阵或这一列满足 KSY 条件 [15].

设矩阵 $\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})$ 的最后一列, 即其对应列指标为 1 的列满足 KSY 条件. 若矩阵 $\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})$ 的秩为 $r\ (\leqslant J)$, 则通过行交换与列交换两种初等变换, 可将矩阵的一个秩为 r 的非奇异子矩阵调换到矩阵的左上角, 即矩阵 $\mathrm{Syl}(f_1,\dots,f_{n+1})$ 可变换成下列形式:

$$S'=\begin{array}{c}\\ f_1'\\ \vdots\\ f_r'\\ f_{r+1}'\\ \vdots\\ f_J'\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}c_1' & \cdots & c_r'\,(=1) & c_{r+1}' & \cdots & c_J'\end{array}\\ \begin{pmatrix}u_{1,1} & \cdots & u_{1,r} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,J-r}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{r,1} & \cdots & u_{r,r} & v_{r,1} & \cdots & v_{r,J-r}\\ * & \cdots & * & * & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & \cdots & * & * & \cdots & *\end{pmatrix}_{J\times J}\end{array},\tag{3.2}$$

其中子矩阵

$$U=\begin{pmatrix}u_{1,1} & \cdots & u_{1,r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{r,1} & \cdots & u_{r,r}\end{pmatrix}\tag{3.3}$$

是非奇异的, 即它的秩是 r. $\{f_1',\dots,f_J'\}$ 是矩阵 S' 的行指标, 它是多项式组 (2.2) 的一个排列. $\{c_1',\dots,c_J'\}$ 是矩阵 S' 的列指标, 它是单项式组 (2.3) 的一个排列, 并且 $c_r'=1$.

令

$$V=\begin{pmatrix}v_{1,1} & \cdots & v_{1,J-r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{r,1} & \cdots & v_{r,J-r}\end{pmatrix},$$

则因为矩阵 S' 的第 r 列满足 KSY 条件, 即其不可被其它列线性表示, 所以矩阵 V 中的任一列向量 $\vec{V}_j\ (1\leqslant j\leqslant J-r)$ 可由矩阵 U 的 $r-1$ 个列向量 $\{\vec{U}_1,\dots,\vec{U}_{r-1}\}$ 线性表示. 于是有下列定理:

定理 3.2 矩阵 (3.3) 的行列式 $|U|$ 可表示成 $\{f_1',\dots,f_r'\}$ 的线性组合:

$$|U|=U_{1,r}\,f_1'+\cdots+U_{r,r}\,f_r'.\tag{3.4}$$

其中 $U_{i,r}$ 表示矩阵 U 在第 i 行第 r 列的代数余子式.

证明 根据行列式的性质可得

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{r} u_{l,1}U_{l,r} = 0, \\ \qquad \vdots \\ \sum_{l=1}^{r} u_{l,r-1}U_{l,r} = 0, \\ \sum_{l=1}^{r} u_{l,r}U_{l,r} = \|U\|. \end{cases} \tag{3.5}$$

下面证明

$$\sum_{l=1}^{r} v_{l,j}U_{l,r} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant J-r. \tag{3.6}$$

已知矩阵 V 中的任一列向量 $\vec{V}_j\,(1 \leqslant j \leqslant J-r)$ 可由矩阵 U 的 $r-1$ 个列向量 $\{\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_{r-1}\}$ 线性表示, 即存在 $k_{j,p}$, 其中 $1 \leqslant p \leqslant r-1$, 使得

$$\vec{V}_j = \sum_{p=1}^{r-1} k_{j,p}\vec{U}_p, \quad 1 \leqslant j \leqslant J-r.$$

将上述列向量展开就是

$$\begin{cases} v_{1,j} = \sum_{p=1}^{r-1} k_{j,p}u_{1,p}, \\ \qquad \vdots \\ v_{r,j} = \sum_{p=1}^{r-1} k_{j,p}u_{r,p}. \end{cases} \tag{3.7}$$

然后用 $U_{q,r}$ 乘以 (3.7) 的第 q 个等式两边, 其中 $1 \leqslant q \leqslant r$, 得

$$\begin{cases} v_{1,j}U_{1,r} = U_{1,r}\sum_{p=1}^{r-1} k_{j,p}u_{1,p}, \\ \qquad \vdots \\ v_{r,j}U_{r,r} = U_{r,r}\sum_{p=1}^{r-1} k_{j,p}u_{r,p}, \end{cases} \tag{3.8}$$

再将上式的 r 个等式两边分别相加, 可得

$$\sum_{l=1}^{r} v_{l,j}U_{l,r} = \sum_{p=1}^{r-1}\bigg(k_{j,p}\sum_{l=1}^{r} u_{l,p}U_{l,r}\bigg). \tag{3.9}$$

现在证明 (3.9) 的右边式子为 0.

将 (3.5) 的第 p 个等式两边同乘以 $k_{j,p}$, 其中 $1 \leqslant p \leqslant r-1$, 则有

$$\begin{cases} k_{j,1}\displaystyle\sum_{l=1}^{r} u_{l,1}U_{l,r} = 0, \\ \qquad\vdots \\ k_{j,r-1}\displaystyle\sum_{l=1}^{r} u_{l,r-1}U_{l,r} = 0, \end{cases}$$

上述 $r-1$ 个等式两边分别相加, 则得

$$\sum_{p=1}^{r-1}\left(k_{j,p}\sum_{l=1}^{r} u_{l,p}U_{l,r}\right) = 0. \tag{3.10}$$

由 (3.9) 与 (3.10) 可推得 (3.6).

综合 (3.5) 与 (3.6), 共有 J 个等式

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{r} u_{l,1}U_{l,r} = 0, \\ \qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r} u_{l,r-1}U_{l,r} = 0, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r} u_{l,r}U_{l,r} = |U|, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r} v_{l,1}U_{l,r} = 0, \\ \qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r} v_{l,J-r}U_{l,r} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

下面的证明过程与定理 2.1 的证明过程完全类似, 所以只做简介.

将上式的第 $j\,(1 \leqslant j \leqslant J)$ 个等式两边同乘以矩阵 S' 的第 j 列的列指标 c'_j, 然后将 J 个等式的左右两边分别相加, 右边即是 $|U|\,c'_r = |U|$, 左边重新合并化简, 就可化为等式 (3.4) 的右边式子. □

由于 $\{f'_1,\dots,f'_J\}$ 是多项式列表 (2.2) 的一个排列, 而 (2.2) 中的每个元素是其中一个 $f_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ 与 $x_1,\dots,x_n$ 的幂积的乘积, 所以 $\{f'_1,\dots,f'_J\}$ 中的每个元素都在由 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$ 构成的理想当中, 因此有

定理 3.3 矩阵 (3.3) 的行列式 $|U|$ 可表示成 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$ 的线性组合, 即 $|U|$ 属于 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$ 构成的理想.

由于 $|U|$ 在 $\{f_1,\dots,f_{n+1}\}$ 构成的理想当中, 所以 $|U|=0$ 是多项式系统 (1.1) 有零点的一个必要条件. 这时我们可用 $|U|$ 表示 Sylvester 矩阵退化时的 Sylvester 结式. 类似于定理 3.1, $|U|$ 也可能有多余因子.

定理 3.4 $U_{1,r},U_{2,r},\dots,U_{r,r}$ 的最大公因子

$$\mathrm{GCD}(U_{1,r},U_{2,r},\dots,U_{r,r}) \tag{3.12}$$

是 $|U|$ 的多余因子.

令

$$S_{\text{singular}} = \frac{|U|}{\mathrm{GCD}(U_{1,r}, U_{2,r}, \ldots, U_{r,r})}, \tag{3.13}$$

则 $S_{\text{singular}} = 0$ 是多项式系统 (1.1) 有零点的一个必要条件.

例 3.1　考虑下列关于 $\{x, y\}$ 的多项式组:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = z(2z-1) - 1, \\ f_2(x,y) = (-87 + 81z^2 + 77z)y - 60 + 50z^2 + 74z, \\ f_3(x,y) = ((78 + 19z^2 - 68z)y - 53 + 34z^2 + 66z)x + (38 + 59z^2 + 28z)y - 47 + 6z^2 - 50z, \end{cases} \tag{3.14}$$

其 6 阶的 Sylvester 矩阵是

$$\mathrm{Syl}(f_1, f_2, f_3) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x^2y & x^2 & xy & x & y & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} xf_1 \\ xf_2 \\ xf_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \alpha_1 & & \\ & & \beta_2 & \beta_1 & & \\ \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & & \\ & & & & & \alpha_1 \\ & & & & \beta_2 & \beta_1 \\ & & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.15}$$

其中

$$\alpha_1 = z(2z-1) - 1, \quad \beta_1 = -60 + 50z^2 + 74z, \quad \beta_2 = -87 + 81z^2 + 77z,$$
$$\gamma_1 = -47 + 6z^2 - 50z, \quad \gamma_2 = 38 + 59z^2 + 28z, \quad \gamma_3 = -53 + 34z^2 + 66z, \quad \gamma_4 = 78 + 19z^2 - 68z.$$

容易验证矩阵 (3.15) 的秩为 5, 并且其最后一列 (即列指标为 1 的列) 满足 KSY 条件, 所以通过将其第一列移到矩阵的最后一列, 第 4 行移到矩阵的最下边, 可得

$$S' = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x^2 & xy & x & y & 1 & x^2y \end{matrix} \\ \begin{matrix} xf_1 \\ xf_2 \\ xf_3 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & \beta_1 & & & \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & \gamma_4 \\ & & & \beta_2 & \beta_1 & \\ & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.16}$$

与

$$U = \begin{pmatrix} & & \alpha_1 & & \\ & \beta_2 & \beta_1 & & \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & & \\ & & & \beta_2 & \beta_1 \\ & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

不难计算, 矩阵 U 的 5 个代数余子式分别为

$$\begin{cases} U_{1,5}=(-53+34z^2+66z)(-87+81z^2+77z)(9291+103z^2-19675z+1804z^4+9958z^3), \\ U_{2,5}=(-53+34z^2+66z)(78+19z^2-68z)(2z+1)(z-1)(-87+81z^2+77z), \\ U_{3,5}=0, \\ U_{4,5}=(-53+34z^2+66z)(-87+81z^2+77z)(38+59z^2+28z)(2z+1)(z-1), \\ U_{5,5}=-(-53+34z^2+66z)(-87+81z^2+77z)^2(2z+1)(z-1). \end{cases}$$

由定理 3.2–3.4, 我们有

$$\begin{aligned} |U| &= U_{1,5}\,xf_1+U_{2,5}\,xf_2+U_{3,5}\,xf_3+U_{4,5}f_2+U_{5,5}f_3 \\ &= U_{1,5}\,xf_1+(U_{2,5}\,x+U_{4,5})f_2+(U_{3,5}\,x+U_{5,5})f_3 \\ &= (-87+81z^2+77z)(-53+34z^2+66z)(2z+1)(z-1) \\ &\quad \times(-6369+8611z^2+401z+2464z^4+9354z^3) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\mathrm{GCD}(U_{1,5}\,x,\,(U_{2,5}\,x+U_{4,5}),\,(U_{3,5}\,x+U_{5,5})) \\ &\quad=\mathrm{GCD}(U_{1,5},\,U_{2,5},\,U_{3,5},\,U_{4,5},\,U_{5,5}) \\ &\quad=(-87+81z^2+77z)(-53+34z^2+66z). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} S_{\text{singular}} &= \frac{|U|}{\mathrm{GCD}(U_{1,5}\,x,\,(U_{2,5}\,x+U_{4,5}),\,(U_{3,5}\,x+U_{5,5}))} \\ &= (2z+1)(z-1)(-6369+8611z^2+401z+2464z^4+9354z^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

是多项式组 (3.14) 有零点的一个必要条件. □

在 (3.2) 的矩阵 S' 中, 设存在 k 个极大非奇异子矩阵, 则最多有 k 个不同的 S_{singular}. 若用 S^1_{singular}, $\dots, S^l_{\text{singular}}$ $(l\leqslant k)$ 来表示所有不同的 S_{singular}, 则显然有

定理 3.5

$$\mathrm{GCD}(S^1_{\text{singular}},S^2_{\text{singular}},\dots,S^l_{\text{singular}})=0$$

是多项式系统 (1.1) 有零点的一个必要条件.

对于例 3.1 来说, 不难验证其共有 3 个不同的 S_{singular}:

$$\begin{cases} S^1_{\text{singular}}=(2z+1)(z-1)(-6369+8611z^2+401z+2464z^4+9354z^3), \\ S^2_{\text{singular}}=-(2z+1)(z-1), \\ S^3_{\text{singular}}=(2z+1)(z-1). \end{cases}$$

由上述定理知,

$$\mathrm{GCD}(S^1_{\text{singular}},\,S^2_{\text{singular}},\,S^3_{\text{singular}})=(2z+1)(z-1)=f_1(x,y)=0$$

是多项式组 (3.14) 有零点的一个必要条件. 事实上, 它也是一个充分条件.

4 结束语

本文介绍了多变元的 Sylvester 结式. 它可能是联系 Dixon 结式与 Gröbner 基 [21,22] 等理论的一座桥梁. 另外, 构造不含多余因子的结式是目前结式消元理论中的一个公开问题. 本文提出的去除多余因子算法仅是一个部分算法, 希望今后能在此工作基础上找到其他产生多余因子的原因, 并最终给出一个完全的算法.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Euler L. Elements of Algebra. London: Longman, Orme, and Co., 1840
2 Sylvester J. On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraic common measure. Philosophical Trans, 1853, 143: 407–548
3 杨路, 夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现. 北京: 科学出版社, 2008
4 Macaulay F S. On some formulae in elimination. Proc London Math Soc, 1902, 1: 3–27
5 Macaulay F S. The algebric theory of modular systems. In: Cambridge Tracts in Math and Math Phys, vol. 19. Cambridge: Cambridge University Press, 1916
6 Macaulay F S. Note on the resultant of a number of polynomials of the same degree. Proc London Math Soc, 1921, 21: 14–21
7 Gelfand I M, Kapranov M M, Zelevinsky A V. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhauser, 1994
8 Kapranov M M, Sturmfels B, Zelevinsky A V. Chow polytope and general resultants. Duke Math J, 1992, 67: 189–218
9 Chtcherba A. A new Sylvester-type resultant method based on the Dixon-Bezout formulation. PhD Dissertation. University of New Mexico, 2003
10 Chtcherba A, Kapur D. Exact resultants for corner-cut unmixed multivariate polynomial systems using the Dixon formulation. J Symbolic Comput, 2003, 36: 289–315
11 Chtcherba A, Kapur D. Constructing Sylvester-type resultant matrices using the Dixon formulation. J Symbolic Comput, 2004, 38: 777–814
12 Dixon A L. The eliminant of three quantics in two independent variables. ProcLondon Math Soc, 1908, 6: 49–69, 473–492
13 Chionh E W, Zhang M, Goldman R N. The block structure of three Dixon resultants and their accompanying transformation matrices. Technical Report, TR99-341. Department of Computer Science, Rice University, 1999
14 Chionh E W, Zhang M, Goldman R N. Fast computation of the Bezout and Dixon resultant matrices. J Symbolic Comput, 2002, 33: 13–29
15 Kapur D, Saxena T, Yang L. Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants. In: Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM Press, 1994, 99–107
16 Sun W K, Li H B. On the Mixed Cayley-Sylvester Resultant Matrix. In: Lecture Notes in Computer Science, vol. 4120. Berlin: Springer-Verlag, 2006
17 符红光, 赵世忠. 构造一般 Dixon 结式矩阵的快速算法. 中国科学 A 辑, 2005, 35: 1–14
18 赵世忠. Dixon 结式的理论研究与新算法. 博士学位论文. 北京: 中国科学院研究生院, 2006
19 张景中, 杨路, 侯晓荣. 代数方程组相关性的一个判准及其在定理机器证明中的应用. 中国科学 A 辑, 1993, 23: 1036–1042
20 赵世忠, 符红光. Dixon 结式的三类多余因子. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 949–960
21 Faugere J C. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F4). J Pure Appl Algebra, 1999, 139: 61–88
22 Faugere J C. A new efficient algorithm for computing Gröbner basis without reduction to zero (F5). In: Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM Press, 2002

Multivariate Sylvester resultant and extraneous factors

ZHAO ShiZhong & FU HongGuang

Abstract Sylvester resultant technique is a basic elimination technique in algebraic geometry, but it can only be used in the system of two polynomial equations with one indeterminate at one time. In this paper, we extend the definition of the Sylvester resultant to a new system of $n+1$ polynomial equations with n indeterminates and prove that the new multivariate Sylvester resultant is in the ideal of the original polynomials. Meanwhile, a method of removing its partial extraneous factors is suggested.

Keywords: multivariate Sylvester matrix, multivariate Sylvester resultant, extraneous factors
MSC(2000): 00A06, 13A50, 13P99, 68W30