



论文

基于预处理的不可压缩 N-S 方程拟压缩数值算法研究

钱战森*, 张劲柏, 李椿萱

北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

*E-mail: qzhensen55130@gmail.com

收稿日期: 2010-05-30; 接受日期: 2010-09-01

国家自然科学基金资助项目(批准号: 50836006)

摘要 通过研究求解不可压缩 Navier-Stokes 方程的拟压缩方法与加速刚性双曲型方程时间推进的预处理技术, 推导了一般曲线坐标系下带预处理的拟压缩 Navier-Stokes 方程特征系统, 并结合有限差分法, 建立了适用于不可压缩黏性流动计算的拟压缩快速算法. 通过对不可压缩无黏圆柱绕流、平板层流流动、低 Reynolds 数定常圆柱绕流问题的数值模拟研究, 得到了与相关理论与实验测试相吻合的结果, 验证了所建立数值方法的快速可靠性. 较系统地研究了预处理引入的参数和拟压缩因子的选择对收敛特性的影响. 结果表明, Roe 格式相对于二阶中心差分格式得到的结果更令人满意; 对拟压缩 Navier-Stokes 方程进行预处理能有效提高数值计算的收敛速度; 自适应的拟压缩因子取值能在很大程度上改善数值解的收敛特性, 且不需要根据具体流动问题进行人工调节. 最后将本文发展的数值方法用于低 Reynolds 数非定常圆柱绕流的数值模拟, 所得结果亦和实验观测结果及其他文献的计算吻合很好.

关键词 拟压缩方法, 预处理, 迎风格式, 不可压缩流动, Navier-Stokes 方程

PACS: 47.11.BC, 47.10.ab, 02.60.Cb, 02.70.Bf

不可压缩 Navier-Stokes 方程中, 压力仅以空间梯度的形式出现, 不存在可压缩流动那样通过热力学关系将压力和密度、温度相联系的状态方程, 没有可以显式求解压力的方程. 故而不可压缩 Navier-Stokes 方程数值求解的难点在于速度场变化和压力场变化不耦合, 难以满足散度为零的条件. 近年来已经发展了许多用于求解不可压缩 Navier-Stokes 方程的算法, 大体上可以分为两类, 一类是基于非原始变量的方法, 另一种是基于原始变量的方法.

基于非原始变量的方法的典型代表是涡量-流函

数方法, 其基本思想是对 Navier-Stokes 方程进行变换, 写成涡量-流函数的形式, 然后引入涡量方程, 消去方程中的压力项, 再引入流函数, 连续方程便可以自动满足. 涡量-流函数方法虽在计算二维不可压缩 Navier-Stokes 方程中取得了成功, 但将该方法推广到求解三维问题时却出现了困难. 三维流动的流函数无法如二维流动一样直接定义, 需要引入多个流函数, 不但场变量增加, 模型方程也更为复杂. 后人在此基础上发展起来的如涡量-速度方法^[1]、涡量-矢量势方法^[2]等一系列方法, 虽都能用于三维问题, 但在

选择边界条件时将遇到诸多难题, 目前尚难以普遍应用.

在实际应用中, 基于原始变量的方法使用更为广泛, 其依赖变量是速度和压力. 采用差分方法进行实质求解时大致可以分为两类:

第一类方法通过压力的泊松方程求得压力, 包括 Harlow 和 Welch^[3]的压力泊松方程法、Patanker 和 Spalding^[4]的 SIMPLE(Semi- Implicit Method for Pressure-Linked Equation)方法、Chorin^[5]的投影法(Projection Method)等. 这类方法的共同特点是压力和速度是解耦求解的, 速度每推进一步, 需要迭代求解泊松方程来得到压力, 在计算时需给出压力和速度场的初值, 然后进行迭代, 直到满足连续方程为止. 在实际应用中, 这类方法通常采用交错网格技术来解决压力的奇偶失联问题. 该方法的缺点在于每一时间步都需要进行迭代, 使速度和压力场耦合, 一方面泊松方程的数值求解收敛速度很慢, 且有时仅能使散度达到 0.01 量级; 另一方面在计算非定常流动过程中初始条件很难给定. 若初始条件不满足零散度条件, 则在计算过程中此误差将一直保留.

第二类方法是 Chorin^[6]引入的拟压缩法(Pseudo compressibility Method), 在一些文献中亦称为人工压缩方法(Artificial Compressibility Method)^[7]. 该方法通过在连续方程中引入压力对时间的导数项, 将不可压缩流场随时间的变化阶段当成可压缩流处理, 从而将压力随时间的变化与速度散度联系起来, 使不可压缩流动的控制方程由原来的椭圆型方程变为双曲型方程. 拟压缩方法的思想类似于用时间相关法来求解定常流动问题的方法, 其优点在于可以充分利用近年来针对可压缩流动发展起来的大量成熟方法, 并且拟压缩方法的求解代码和可压缩流动求解代码的相似程度很高, 可以通过较少的努力相互移植. 连续方程和动量方程是同步求解的, 拟压缩方法能够更快地收敛, 求解效率高. 本文重点探讨拟压缩方法.

预处理方法^[8~10]是针对双曲型系统求解中的刚性问题提出的, 该刚性问题的起源在于控制方程的特征值不在同一量级, 为此通过在时间导数项前乘以一个预处理矩阵, 改变原控制方程的特征系统, 令其特征值处于同一量级, 从而加速收敛速度. 传统的思想都是将预处理方法应用于求解高速可压缩流动

方程, 即对可压缩的 Navier-Stokes 方程进行预处理, 以期改善高速可压缩流动的求解器在低速流动中的表现, 获得更快的收敛速度和更高的精度. 目前已经发展了多种预处理矩阵的构造方法, 并得到了广泛的应用. 本文将结合拟压缩方法, 将预处理的思想应用于不可压缩流动的求解.

虽然 Chorin^[6]早在 1967 年即提出拟压缩方法, 但在之后的将近 20 年时间里, 该方法并未得到广泛应用, 直到 20 世纪 80 年代当可压缩流动求解的数值方法成熟发展后, 该方法方为学术界所关注. Kwak 等人^[11]最早采用中心型格式求解了拟压缩 Navier-Stokes 方程, 随后 Rogers 等人^[12,13]借助求解可压缩流动的迎风型格式发展出了求解拟压缩 Navier-Stokes 方程的迎风型格式. Chen 等人^[14]等还将高精度的 WENO 格式应用于拟压缩 Navier-Stokes 方程的求解. 对虚拟压缩 Navier-Stokes 方程进行预处理的思想最早是由 Turkel^[15]提出, 通过理论分析讨论了带预处理的拟压缩方程的参数选择条件, 但并未给出数值计算结果. 上述的文献[11~14]则仅讨论了拟压缩因子的选择对数值计算的影响, 而并未结合预处理方法. Liu 等人^[16]和 Esfahanian 等人^[17]考虑了预处理方法, 并采用添加了四阶人工黏性的 Jameson^[18]二阶中心差分格式求解了拟压缩 Navier-Stokes 方程. 但中心差分格式的耗散过大, 导致数值结果并不理想. 因此, 本文工作致力于建立求解带预处理的拟压缩方程的迎风型 Roe 格式, 以期建立求解不可压缩流动的高效数值方法.

本文推导出了一般曲线坐标系下带预处理的拟压缩 Navier-Stokes 方程的特征系统, 并结合有限差分法, 采用类似 Roe^[19]的迎风格式, 建立了适用于不可压缩黏性流动计算的数值方法, 采用不可压缩无黏圆柱绕流、不可压缩平板层流流动和低 Reynolds 数定常圆柱绕流作为算例, 验证了所建立的数值方法的可靠性. 进一步系统地研究了预处理引入的参数和拟压缩因子的选择对黏性流动数值计算收敛特性的影响, 并给出了优化的参数选择方法. 最后将本文发展的数值方法用于低 Reynolds 数非定常圆柱绕流的数值模拟, 所得结果亦和其他文献的计算及实验观测结果吻合很好, 初步验证了本文发展的数值方法对非定常问题求解的可靠性.

1 数值方法

1.1 不可压缩 Navier-Stokes 方程的拟压缩处理

无量纲形式的不可压缩 Navier-Stokes 方程组可写成

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \end{cases} \quad (1)$$

该方程是椭圆型的, 且速度场变化和压力场变化不耦合, 难以满足散度为零的条件. 拟压缩方法的思想是通过在连续方程中引入压力时间导数项将方程(1)变成如下的虚拟时间 t 方向的双曲型方程组:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 β 为拟压缩因子, $Re = \tilde{\rho} \tilde{V}_\infty \tilde{L} / \tilde{\mu}$ 为 Reynolds 数, u, v 为笛卡儿坐标系下 x, y 方向的速度分量, $\tilde{V}_\infty$ 为自由来流速度. 无量纲压力可表达为 $p = (\tilde{p} - \tilde{p}_\infty) / \tilde{\rho} \tilde{V}_\infty^2$, 其中密度 $\tilde{\rho}$ 和动力黏性系数 $\tilde{\mu}$ 在本文计算中为常量.

方程(2)可写成如下的向量形式:

$$\Gamma_p^{-1} Q_t + (E - E^v)_x + (F - F^v)_y = 0, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + p \\ uv \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} v \\ vu \\ v^2 + p \end{pmatrix}, \quad E^v = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad F^v = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \end{pmatrix}, \\ \tau_{xx} &= 2\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 建立拟压缩 Navier-Stokes 方程的预处理技术

方程(3)为刚性双曲型系统, 如上所述, 可采用预处理来减弱其刚性, 达到高效计算的目的. 本文采用 Turkel^[15]提出的预处理方法, 在动量方程中引入与压力导数相关的项, 经整理, 笛卡儿坐标系下二维带预处理的拟压缩无量纲化 Navier-Stokes 方程可表

达为

$$\Gamma^{-1} Q_t + (E - E^v)_x + (F - F^v)_y = 0. \quad (5)$$

在此

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\beta^2 & 0 & 0 \\ \alpha u/\beta^2 & 1 & 0 \\ \alpha v/\beta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

自变量 Q 和通量 E, F, E^v, F^v 等的表达式与(4)相同. 式中 α 为预处理引入的参数, 当 $\alpha = 0.0$ 时表不采用预处理技术; $\alpha = 1.0$ 时表直接对守恒形式的方程进行预处理; 而 $\alpha = 2.0$ 时则表直接对非守恒形式的方程进行预处理. 参数 α 和 β 的选择对计算精度和收敛速度具有重要影响, 详见下文讨论.

为求解复杂外型绕流问题, 引入变换 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, 在一般曲线坐标系 (ξ, η) 下(3)式可写成如下形式:

$$\Gamma^{-1} \hat{Q}_t + (\hat{E} - \hat{E}^v)_\xi + (\hat{F} - \hat{F}^v)_\eta = 0, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} U \\ Uu + \xi_x p \\ Uv + \xi_y p \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} V \\ Vu + \eta_x p \\ Vv + \eta_y p \end{pmatrix}, \\ \hat{E}^v &= \frac{1}{J} [\xi_x E^v + \xi_y F^v] = \frac{1}{JRe} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{yx} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \end{pmatrix}, \\ \hat{F}^v &= \frac{1}{J} [\eta_x E^v + \eta_y F^v] = \frac{1}{JRe} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{yx} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

在此

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v, \quad (9)$$

为逆变速度; 坐标变换的 Jacobi 行列式:

$$J = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y. \quad (10)$$

Roe 格式是应用最广的迎风型格式, 该格式须用到控制方程的特征信息. 因此, 将涉及到无黏通量 $\hat{E}$ 和 $\hat{F}$ 的 Jacobi 矩阵 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的特征值和特征向量. $\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial \hat{Q}$ 和 $\hat{B} = \partial \hat{F} / \partial \hat{Q}$ 可写成统一形式为

$$\hat{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & k_x & k_y \\ k_x & \theta + k_x u & k_y u \\ k_y & k_x v & \theta + k_y v \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中 $\hat{A}_1 = \hat{A}$, $\hat{A}_2 = \hat{B}$,

$$\begin{aligned}\theta &= k_x u + k_y v, \\ k_x &= (\xi_m)_x, \quad m=1,2; \\ k_y &= (\xi_m)_y, \quad m=1,2; \\ \xi_m &= \xi, \eta, \quad m=1,2.\end{aligned}\quad (12)$$

在预处理方法中, 一般需要矩阵 $\hat{A}_r = \Gamma \hat{A}$ 和 $\hat{B}_r = \Gamma \hat{B}$ 的特征分解, 即对之作对角化处理. Jacobi 矩阵 $\hat{A}_{r,m}$ 的形式为

$$\hat{A}_{r,m} = \Gamma \hat{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 k_x & \beta^2 k_y \\ k_x & \theta + (1-\alpha)k_x u & (1-\alpha)k_y u \\ k_y & (1-\alpha)k_x v & \theta + (1-\alpha)k_y v \end{pmatrix}. \quad (13)$$

其对角化有

$$\hat{A}_{r,m} = R_{r,m} \Lambda_{r,m} R_{r,m}^{-1}, \quad (14)$$

其特征值分别为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \theta, \\ \lambda_2 &= \lambda_+ = \frac{1}{2}(2-\alpha)\theta + c, \\ \lambda_3 &= \lambda_- = \frac{1}{2}(2-\alpha)\theta - c.\end{aligned}\quad (15)$$

其中 c 为虚拟声速:

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{(2-\alpha)^2 \theta^2 + 4\beta^2 (k_x^2 + k_y^2)}, \quad (16)$$

记对角矩阵 $\Lambda_{r,m} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. 矩阵 $\hat{A}_{r,m}$ 的右特征向量矩阵 $R_{r,m}$ 为

$$R_{r,m} = [R_{r,m}^1, R_{r,m}^2, R_{r,m}^3], \quad (17)$$

其中

$$R_{r,m}^1 = \frac{1}{2\beta^2 c^2 \left(1 + \left(\frac{\alpha\theta}{2}\right)/c\right) \left(1 - \left(\frac{\alpha\theta}{2}\right)/c\right)} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2\beta^2 k_y \\ 2\beta^2 k_x \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$R_{r,m}^2 = \frac{1}{2\beta^2 c^2 \left(1 - \left(\frac{\alpha\theta}{2}\right)/c\right)} \begin{bmatrix} \beta^2 \left(-\frac{\alpha\theta}{2} + c\right) \\ (1-\alpha)u\lambda_2 + \beta^2 k_x \\ (1-\alpha)v\lambda_2 + \beta^2 k_y \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$R_{r,m}^3 = \frac{1}{2\beta^2 c^2 \left(1 + \left(\frac{\alpha\theta}{2}\right)/c\right)} \begin{bmatrix} -\beta^2 \left(\frac{\alpha\theta}{2} + c\right) \\ (1-\alpha)u\lambda_3 + \beta^2 k_x \\ (1-\alpha)v\lambda_3 + \beta^2 k_y \end{bmatrix}; \quad (20)$$

左特征向量矩阵 $L_{r,m} = R_{r,m}^{-1}$ 形式为

$$L_{r,m} = [L_{r,m}^1, L_{r,m}^2, L_{r,m}^3]^T, \quad (21)$$

其中

$$L_{r,m}^1 = \begin{bmatrix} (1-\alpha)(k_y u - k_x v), & -(1-\alpha)v\theta - \beta^2 k_y, & (1-\alpha)u\theta + \beta^2 k_x \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$L_{r,m}^2 = [-\lambda_3, \quad \beta^2 k_x, \quad \beta^2 k_y], \quad (23)$$

$$L_{r,m}^3 = [-\lambda_2, \quad \beta^2 k_x, \quad \beta^2 k_y]. \quad (24)$$

1.3 数值格式

本文采用半离散的有限差分方法, 先对空间进行离散, 再以隐式 LU-SGS(Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel)格式来完成时间推进.

1.3.1 空间离散格式

类比于可压缩流动的 Roe 格式, 方程(7) i 方向的对流项空间离散格式可写成

$$\begin{aligned}\hat{E}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} [\hat{E}(Q_L) + \hat{E}(Q_R)] \\ &- \frac{1}{2} \Gamma_{i+1/2}^{-1} R_{r,i+1/2} |\Lambda_{r,i+1/2}| R_{r,i+1/2}^{-1} (Q_L - Q_R) / J, \quad (25)\end{aligned}$$

式中

$$|\Lambda_{r,i+1/2}| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|), \quad (26)$$

Q_L 和 Q_R 分别为由选定限制器所得到的网格界面上左右两侧的量. 在本文的实际计算中采用了 minmod 限制器. 在 Roe 平均矩阵的计算中, $i+1/2$ 界面处的变量值可由 $Q_{i+1/2} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R)$ 给出.

黏性项采用二阶精度的中心差分格式进行离散. 壁面采用无穿透(无黏流动)或无滑移(黏性流动)速度边界条件, 压力由内场外推得到. 远场边界处根据流动方向判断入流和出流, 入流处给定速度值, 压力由内场外推得到; 出流处给定压力值, 速度由内场外推得到.

1.3.2 时间离散格式

本文对时间变量采用隐式离散格式, 并对格式的隐式部分进行线性化处理可得一般形式如下:

$$\left[I + \Delta t (\delta_\varepsilon \hat{A}_r + \delta_\eta \hat{B}_r) \right] \Delta Q^n = J \Delta t \left[\Gamma_{i,j} \mathbf{RHS} \right]^n, \quad (27)$$

其中 $\mathbf{RHS}$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{RHS} = & - \left[\left(\hat{E}_{i+1/2,j} - \hat{E}_{i-1/2,j} \right) + \left(\hat{F}_{i,j+1/2} - \hat{F}_{i,j-1/2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\hat{E}_{i+1/2,j}^v - \hat{E}_{i-1/2,j}^v \right) - \left(\hat{F}_{i+1/2,j}^v - \hat{F}_{i-1/2,j}^v \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

如对于黏通量的 Jacobian 矩阵 $\hat{A}_{r,m}$ 进行正负分裂

$$\hat{A}_{r,m} = \hat{A}_{r,m}^+ + \hat{A}_{r,m}^-, \quad m=1,2. \quad (29)$$

并将其代入到一般形式中得

$$\begin{aligned} & \left[I + \Delta t (\delta_\varepsilon^+ \hat{A}_r + \delta_\varepsilon^- \hat{A}_r + \delta_\eta^+ \hat{B}_r + \delta_\eta^- \hat{B}_r) \right] \Delta Q^n \\ & = J \Delta t \left[\Gamma_{i,j} \mathbf{RHS} \right]^n, \end{aligned} \quad (30)$$

式中, 算子 δ 的上标 $+$, $-$ 分别表示前、后差。

Yoon 和 Jameson^[20] 提出的 LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel) 方法是目前模拟可压缩流动中广泛应用的隐式计算方法。本文将其推广至带预处理的虚拟压缩 N-S 方程的求解中。

对无黏通量 Jacobi 矩阵采用最大特征值分裂得

$$\hat{A}_{r,m}^\pm = \frac{1}{2} \left(\hat{A}_{r,m} \pm \chi \rho(\hat{A}_{r,m}) I \right), \quad m=1,2, \quad (31)$$

其中 $\rho(\hat{A}_{r,m})$ 表示矩阵 $\hat{A}_{r,m}$ 的谱半径, χ 为大于或等于 1 的常数因子, 用来调节数值计算的稳定性。黏性项的 Jacobi 矩阵比较复杂, 在隐式部分通常忽略黏性的影响。这种作法在黏性影响强烈的区域容易造成计算的不稳定。为了保证稳定性, 本文对黏性项采用近似隐式处理, 可简化为对无黏通量 Jacobi 矩阵的谱半径(31)式进行修正:

$$\hat{A}_{r,m}^\pm = \frac{1}{2} \left(\hat{A}_{r,m} \pm \chi \rho(\hat{A}_{r,i}) I \pm 2 \rho(\hat{A}_{r,m}^v) \right), \quad m=1,2, \quad (32)$$

其中

$$\rho(\hat{A}_{r,m}^v) = v \frac{|\nabla k|^2}{\text{Re}}. \quad (33)$$

将(32)式代入(30)式中, 经整理可得到

$$(D + L + U) \Delta Q^n = J \Delta t \left[\Gamma_{i,j} \mathbf{RHS} \right]^n, \quad (34)$$

且有

$$L = -\Delta t \left[\left(\hat{A}_r^+ + \rho(\hat{A}_r^v) I \right)_{i-1,j} + \left(\hat{B}_r^+ + \rho(\hat{B}_r^v) I \right)_{i,j-1} \right], \quad (35)$$

$$U = \Delta t \left[\left(\hat{A}_r^- - \rho(\hat{A}_r^v) I \right)_{i+1,j} + \left(\hat{B}_r^- - \rho(\hat{B}_r^v) I \right)_{i,j+1} \right], \quad (36)$$

$$D = I + \Delta t \left[\rho(\hat{A}_r) + 2\rho(\hat{A}_r^v) + \rho(\hat{B}_r) + 2\rho(\hat{B}_r^v) \right]. \quad (37)$$

可采用下式通过沿主对角线上、下扫描推进求解:

$$\begin{cases} \Delta Q^* = D^{-1} \left(J \Delta t \left[\Gamma_{i,j} \mathbf{RHS} \right]^n - L \Delta Q^* \right), \\ \Delta Q^n = \Delta Q^* - D^{-1} U \Delta Q^n. \end{cases} \quad (38)$$

进而可得

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q^n. \quad (39)$$

1.4 数值方法包含的参数选择准则

(5)~(6)式中的参数 α 为预处理引入的参数, β 为虚拟压缩因子。该两参数的选择对计算的收敛速度有着重要的影响, 有时甚至对计算精度也产生影响。根据 Turkel^[15] 的分析, α 的最佳值为 2, 本文计算选取 $\alpha = 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ 。当 $\alpha = 0.0$ 时, 表示不采用预处理技术, 此即绝大多数文献[11~14]中使用的方式, 这时该方法的特性主要由虚拟压缩因子 β 来决定。 β 的选择存在两种思路: 其一是令 β 为常数, 即全流场采用统一的 β 值, 文献[12,13]的结果和本文的数值实验均表明, 当 β 取值过小时计算结果误差较大, 当 β 取值过大时则收敛速度下降。但通常在 β^2 取 0.5~10 之间时, 均能保证解的精度, 所以本文针对收敛性研究的计算时, β^2 的值取在 0.5~10 之间。

考虑到参数 α 和 β 的选择应该能够保证(13)中 Jacobian 矩阵 $\hat{A}_{r,m}$ 的条件数在各种流动条件下都尽可能接近 1, 从而保证较高的收敛速度。而全场固定的 β 值在流场变化剧烈时往往不能保证, 另一种方法^[15] 是令 β 取如下的自适应形式

$$\beta^2 = \begin{cases} \max \left\{ (3-\alpha)(u^2 + v^2), \varepsilon_0 \right\}, & \alpha < 2; \\ K \max \left\{ (\alpha-1)(u^2 + v^2), \varepsilon_0 \right\}, & \alpha \geq 2. \end{cases} \quad (40)$$

其中, K 为略大于 1 的常数, 本文取为 1.1, ε_0 为一常值, 防止流场中 β^2 值过小导致精度下降, 本文取为 0.7。(40)式能够保证(13)中 Jacobian 矩阵 $\hat{A}_{r,m}$ 的特征值在各种流动条件下量级都尽可能接近, 从而保持一致较高的收敛速度。

2 数值算例及讨论

2.1 验证算例

本节选取了具有精确解析解或者详细实验数据的流动, 包括无黏不可压缩圆柱绕流、平板不可压缩层流流动、低 Reynolds 数黏性缩圆柱定常绕流等算例, 通过对比分析, 验证本文所发展的数值方法的可靠性.

2.1.1 无黏圆柱绕流

无黏不可压缩流动问题中圆柱绕流属于有精确解析解的经典算例, 本文采用的 Roe 格式相对于文献[17]使用的经添加四阶人工黏性的 Jameson 二阶中心差分格式可得到更令人满意的数值结果. 在此仅给出 $\alpha=2.0$, $\beta^2=1.0$ 时的计算结果, 本文采用的周向和法向网格数目分别为 65×50 .

图 1 和 2 分别给出本文计算得到的流场压力等值线与壁面压力系数分布的数值解和精确解析解的对比. 文献[17]在计算该算例时, 由于采用了数值耗散相对 Roe 格式较大的二阶中心差分格式, 导致圆柱后驻点压力未能完全恢复, 和精确解析解不符. 本文结果和精确解析解完全吻合, 体现了 Roe 格式相对于二阶中心差分格式的优势.

2.1.2 平板层流流动

不可压缩平板的层流流动有理论上的解析解, 即 Blasius 解. 本节以该算例来验证所发展的数值方

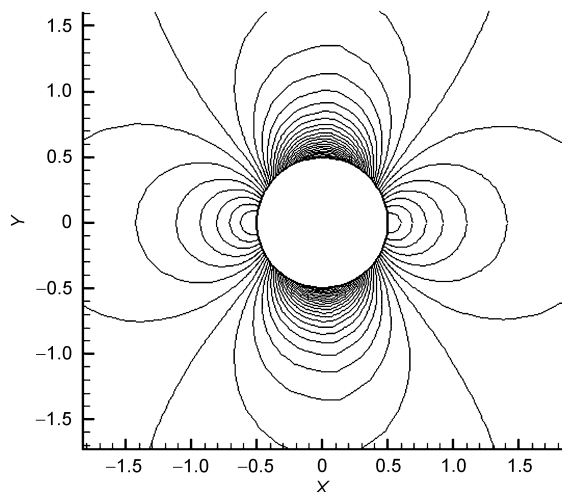


图 1 流场压力分布

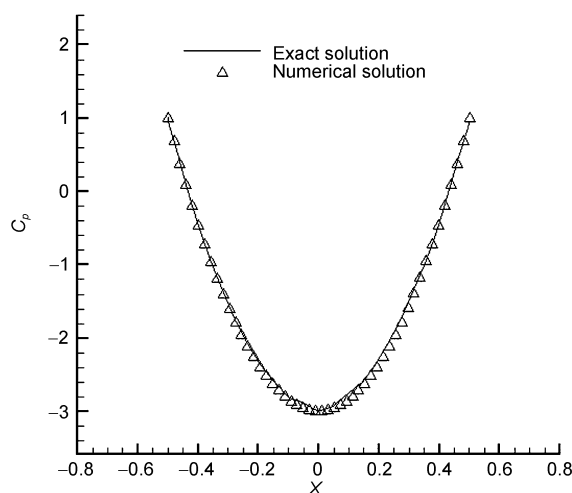


图 2 壁面压力系数 C_p 分布

法对黏性边界层流动的模拟能力. 所采用的网格为 109×50 , 在平板前缘和后缘对网格进行了加密, 上边界和左边界取至 5 倍平板长度, 右边界取至 6 倍平板长度. 基于平板长度的 Reynolds 数取为 1.0×10^5 .

图 3(a)~(f)给出了参数 α 和 β 在不同赋值下数值计算得到的速度型, 图中横轴为 $y' = y\sqrt{Re_x}/x$, 纵轴为无量纲速度 u . 可以看到, 在 1.4 节分析的范围, 参数 α 和 β 在各种取值下均能得到与解析解相吻合的结果, 显示了本文所建立的数值方法对黏性边界层流动模拟的可靠性.

2.1.3 低 Reynolds 数黏性圆柱定常绕流

低 Reynolds 数不可压缩流的圆柱绕流属于不可压缩流动的经典算例, 有大量的实验和计算结果可供参考^[13,21,22]. 本节采用本文所建立的方法对绕圆柱的低 Reynolds 数不可压缩流进行了数值模拟, 较为系统地研究了预处理技术引入的参数 α 和虚拟压缩因子 β 对数值计算精度的影响.

本算例取 $Re=40$, 此时流动表现为一对定常的分离涡. 计算采用了 O 型网格, 其流向和物面法向的网格数目为 65×181 , 物面法向第一层的网格间距取为圆柱直径的 0.005 倍, 远场网格扩展到圆柱直径的 20 倍.

计算结果表明, 在一定范围内, α 和 β 的不同取值仅影响收敛性, 对计算结果影响很微弱. 图 4(a)~4(f)给出了 α 和 β 分别取表 1 中几个典型值时计算所得的流场解. 表中 β 记为“(40)式”时表取自适应

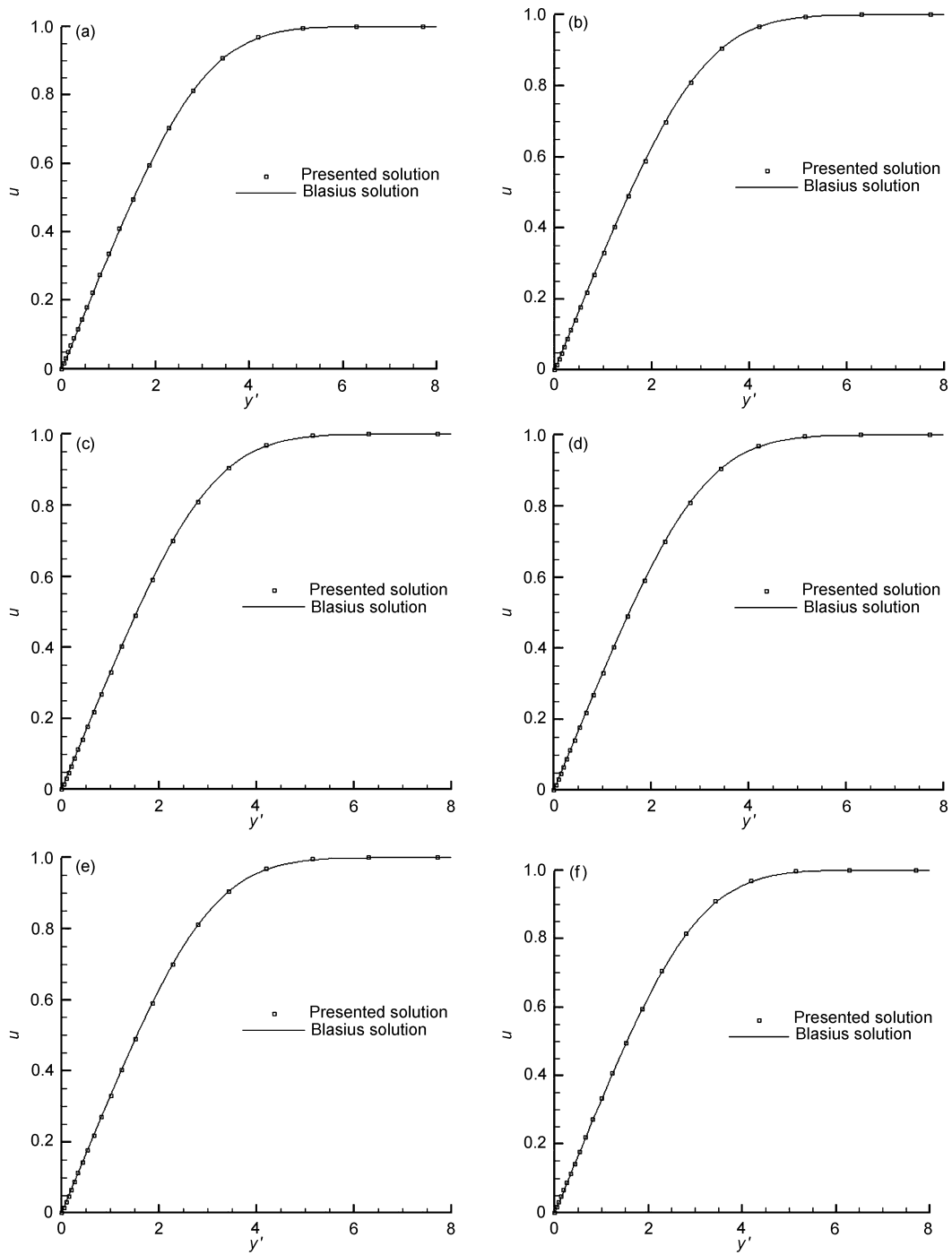


图3 平板层流速度型

(a) $\alpha=0.0, \beta^2=5.0$; (b) $\alpha=0.0, \beta^2$ 取自适应形式(40); (c) $\alpha=1.0, \beta^2=1.0$; (d) $\alpha=1.0, \beta^2$ 取自适应形式(40); (e) $\alpha=2.0, \beta^2=1.0$; (f) $\alpha=2.0, \beta^2$ 取自适应形式(40)

形式(40). 表1同时还列出了各种条件下的分离区长度、分离角、阻力系数等参数. 可以看到, 本文计算结果和文献[13]的计算结果及实验数据^[21,22]符合良好.

其中, 数值计算得到的分离区长度和分离角与文献[22]的实验结果的最大误差分别不超过 4.69%和 1.87%, 得到的阻力系数与文献[21]的实验结果最大

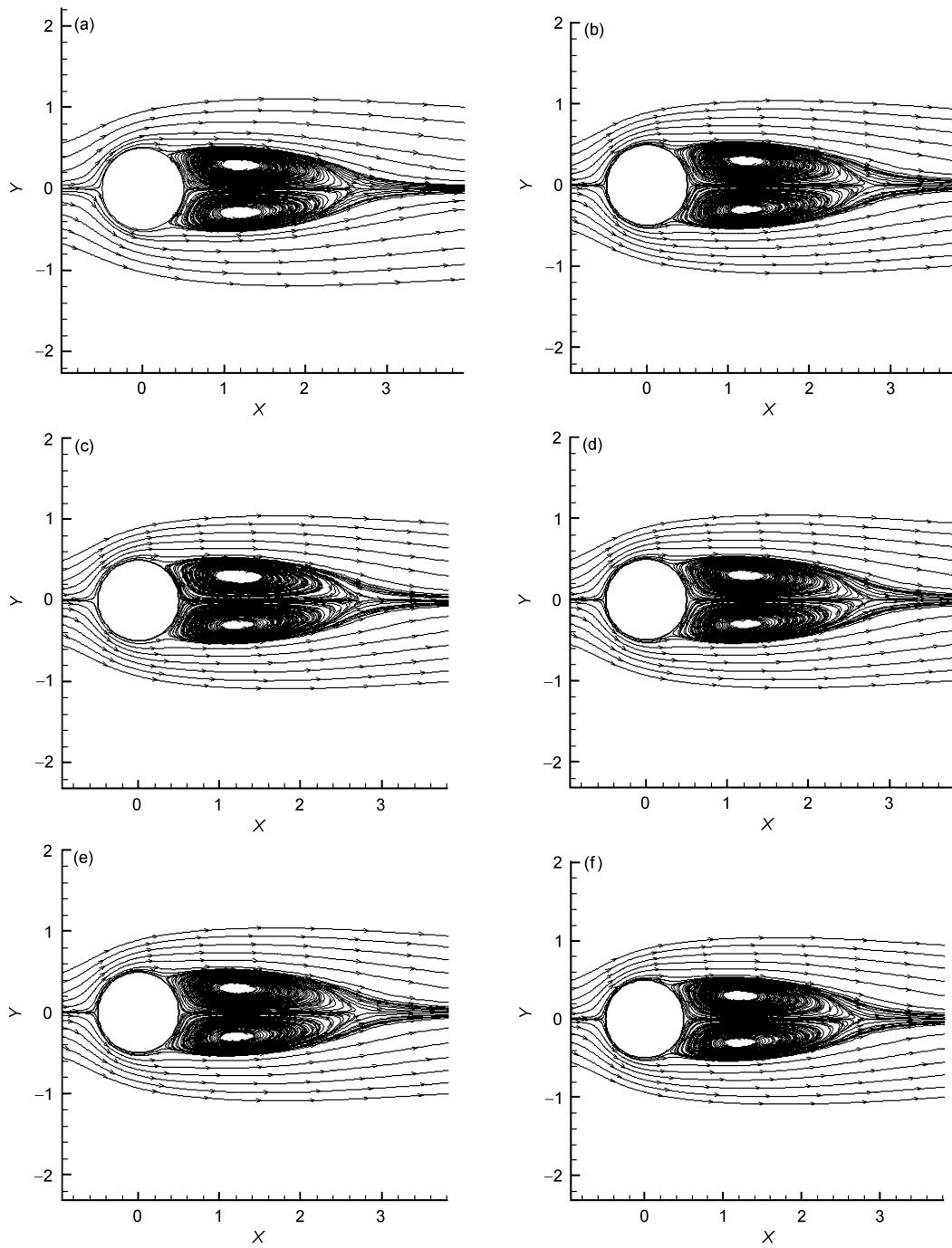


图 4 不同参数取值时的圆柱绕流流线

(a) $\alpha=0.0$, $\beta^2=5.0$; (b) $\alpha=0.0$, β^2 取自适应形式(40); (c) $\alpha=1.0$, $\beta^2=1.0$; (d) $\alpha=1.0$, β^2 取自适应形式(40); (e) $\alpha=2.0$, $\beta^2=1.0$; (f) $\alpha=2.0$, β^2 取自适应形式(40)

误差不超过 4.24%。所有算例的计算结果与实验数据的误差均保持在 5% 以内, 验证了本文所发展的方法对于分离流动的模拟是可靠的。

2.2 黏性流动求解的收敛特性研究

本节重点考察参数 α 和 β 对黏性流场计算收敛性的影响。选择 2.1.3 节低 Reynolds 数不可压缩流的圆

表 1 α 和 β 取几个典型值时的流场计算结果对比

参数取值		结果对比		
α	β^2	分离区长度(L/D) (相对文献[22]的误差)	分离角($^\circ$) (相对文献[22]的误差)	阻力系数 (相对文献[21]的误差)
0.0	5.0	2.10 (-1.41%)	54.5 (+1.87%)	1.580 (-4.24%)
0.0	(40)式	2.18 (+2.35%)	54.4 (+1.68%)	1.600 (-3.03%)
1.0	1.0	2.23 (+4.69%)	54.4 (+1.68%)	1.598 (-3.15%)
1.0	(40)式	2.21 (+3.76%)	54.2 (+1.31%)	1.600 (-3.03%)
2.0	1.0	2.23 (+4.69%)	54.4 (+1.68%)	1.598 (-3.15%)
2.0	(40)式	2.20 (+3.29%)	54.5 (+1.87%)	1.594 (-3.39%)
文献[13]		2.29 (+7.51%)	53.0 (-0.93%)	1.549 (-6.12%)
文献[21](实验)		—	—	1.65
文献[22](实验)		2.13	53.5	—

柱绕流为算例, Reynolds 数及网格设置均与 2.1.3 节相同. 本算例将进行以下两组对比:

(1) 首先考察 α 取值固定时, β 变化对收敛特性的影响. 第一组算例固定 α 为 0.0, 分别取 β^2 为 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 20.0, 50.0, 及自适应形式(40); 第二组算例固定 α 为 1.0, 分别取 β^2 为 0.5, 0.7, 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 及自适应形式(40); 第三组算例固定 α 为 2.0, 分别取 β^2 为 0.7, 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 15.0, 20.0, 及自适应形式(40).

计算结果如图 5~7 所示. 可以看出, 当 α 取为 0.0, 即不采用预处理时, β^2 的最优值约为 5.0; 当 α 取为 1.0, 即对守恒形式的方程直接采用预处理时, β^2 的最优值约为 1.0; 当 α 取为 2.0, 即对非守恒形式的方程直接采用预处理时, β^2 的最优值也约为 1.0. 在一般的情况下, β^2 的取值在 0.5 到 10.0 之间时, 其收敛特性均较好. 当不采用预处理, 即 $\alpha=0.0$ 时, β^2 取自

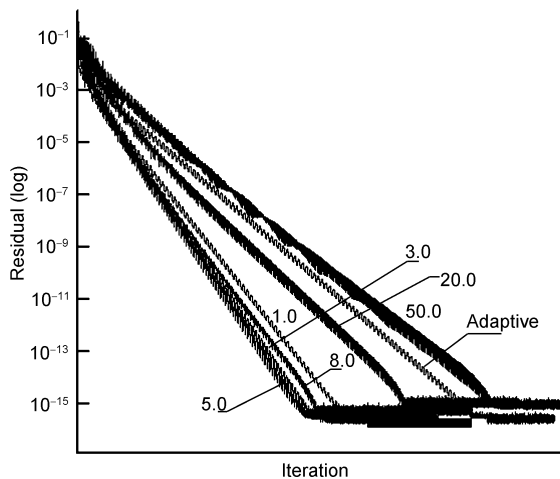


图 5 $\alpha=0.0$, β 对收敛特性的影响

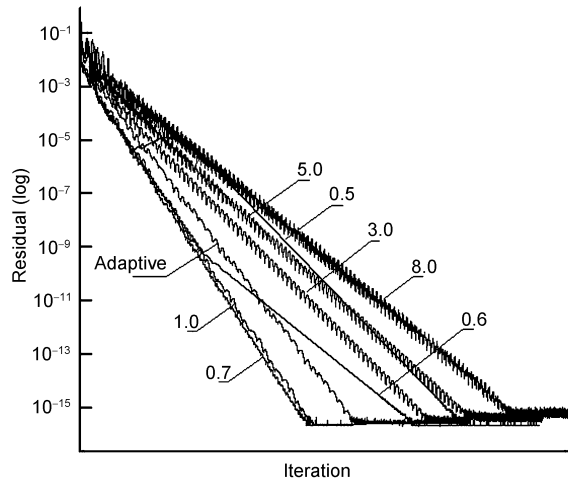


图 6 $\alpha=1.0$, β^2 对收敛特性的影响

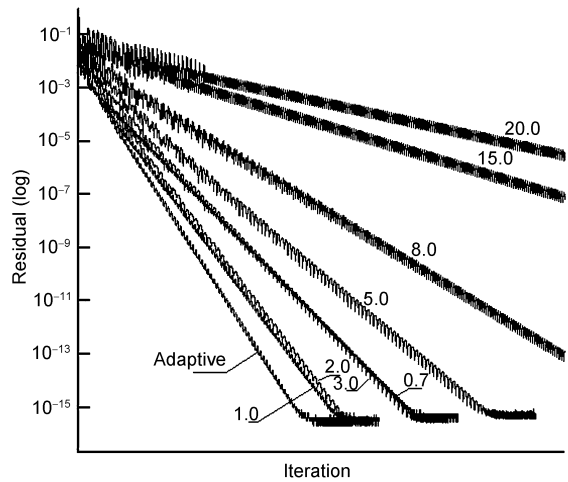


图 7 $\alpha=2.0$, β^2 对收敛特性的影响

适应形式(40)时的收敛速度相对于取固定值时并不具有明显优势. 当采用预处理, 即 $\alpha \neq 0.0$ 时, β^2 取自

适应形式(40)时的收敛速度在大多数情况下优于取固定值时的速度. 但 β^2 取自适应形式不需要根据具体流动状况来人工调节, 故总体上自适应形式相对于固定值形式有其优势.

(2) 本组算例考察 β 取自适应形式(40)时对收敛特性的影响. 在此, 参数 α 分别取为 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0.

计算结果如下图 8 所示, 可以看到当 α 取 2.0 时, 收敛速度最理想, 即对非守恒形式的方程直接进行预处理的收敛效果最好, 这与文献[15]的分析结论一致. 且当 α 取 1.0, 2.0 和 3.0 时, 收敛特性皆相对于 α 取 0.0, 即不采用预处理时, 有较大改善, 表明本文提出的预处理拟压缩计算技术能很好地改善一般拟压缩方法的收敛特性.

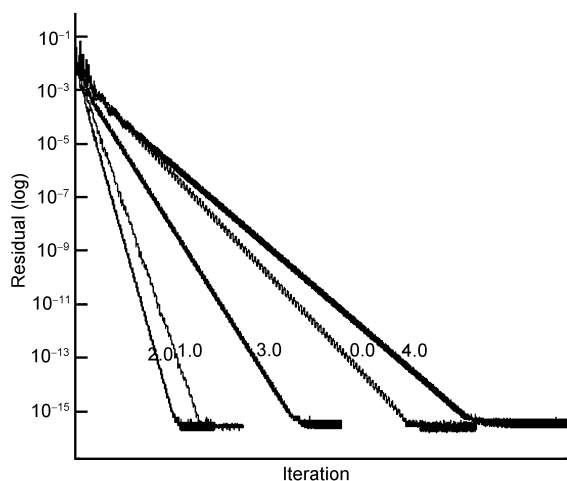


图 8 β^2 取自适应形式(40)时, α 对收敛特性的影响

2.3 非定常黏性流动求解中的应用

本节将本文所建立的数值方法应用于非常流动的求解, 作为初步数值实验研究, 求解了 Reynolds 数 $Re=200$ 的圆柱绕流问题. 该算例中流动呈现为非定常的涡脱落, 即著名的 Karman 涡街现象. 非定常问题计算时间离散采用的是双时间步迭代方法, 对虚拟时间步(内循环)采用 LU-SGS 隐式离散方法, 对物理时间步采用二阶精度的向后差分格式. 此时(27)将变为如下形式

$$\left[I + I_m \frac{3\Delta t}{2\Delta t_p} + \Delta t(\delta_\xi \hat{A}_T + \delta_\eta \hat{B}_T) \right] \Delta Q^n / J = \Delta t \widehat{\mathbf{RHS}}^n, \quad (41)$$

其中

$$\widehat{\mathbf{RHS}}^{n+1,m} = \left[\Gamma_{i,j} \mathbf{RHS} \right]^{n+1,m} - \frac{I_m}{J\Delta t_p} (1.5Q^{n+1,m} - 2Q^n + 0.5Q^{n-1}), \quad (42)$$

这里 m 表示内迭代的循环步数, t_p 表示物理时间, $I_m = \text{diag}[0, 1, 1]$, 相应地 L , U 和 D 等算子的形式也有所改变.

本算例采用的网格与 2.1.3 节 $Re=40$ 时所用网格完全相同. 根据 2.2 节对收敛特性的研究, 采用本文提出的预处理方法时取 $\alpha=2.0$ 可给出最优的收敛特性. 因此以下的计算采用 $\alpha=2.0$, 而 β^2 取自适应形式(40). 物理时间步长取为 0.05. 内迭代(虚拟时间步)计算推进到全场最大残差下降 3 个数量级.

图 9 给出了计算得到的一个完整周期内 ($t=129.60, 131.00, 132.40, 133.75$ 和 135.15 时刻)的压力云图变化和涡脱落过程流线显示. 图 10 显示了升力和阻力系数随时间变化的历程, 本文在计算时并未添加人工扰动, 故而在 t_p 约等于 80.0 之前, 涡脱落过程处于发展阶段, 之后脱落过程才充分发展起来, 呈现出周期性. 表 2 列出了本文及其他文献计算结果和实验观测结果的对比. 本文得到的流动的斯特劳哈尔数 $S_t = 0.18$, 阻力系数 $C_x = 1.35 \pm 0.05$ 和文献[12]采用三阶及五阶显式迎风格式、文献[14]采用 WENO 格式的计算结果、文献[23]采用二阶和四阶紧致格式以及实验[24~26]观测结果符合得很好. 升力系数 C_y 计算的分散性较大, 各个文献[12, 14, 23]给出的结果并不统一, 本文得到的结果为 $C_y = \pm 0.69$. 本文计算结果和其他文献计算和实验测试结果吻合的很好, 初步验证了该算法对于非定常问题求解的可靠性.

3 结论

本文推导了一般曲线坐标系下带预处理的拟压缩 Navier-Stokes 方程的特征系统, 结合有限差分法, 采用类似 Roe 的迎风格式, 建立了适用于不可压缩黏性流动计算的数值方法. 通过对无黏不可压缩圆柱绕流、平板层流流动和低 Reynolds 数圆柱定常绕流等算例的模拟计算验证了数值算法的可靠性. 在此基础上, 结合数值实验进一步研究考察了预处理参数 α 和虚拟压缩因子 β 在不同取值形式下该方法的

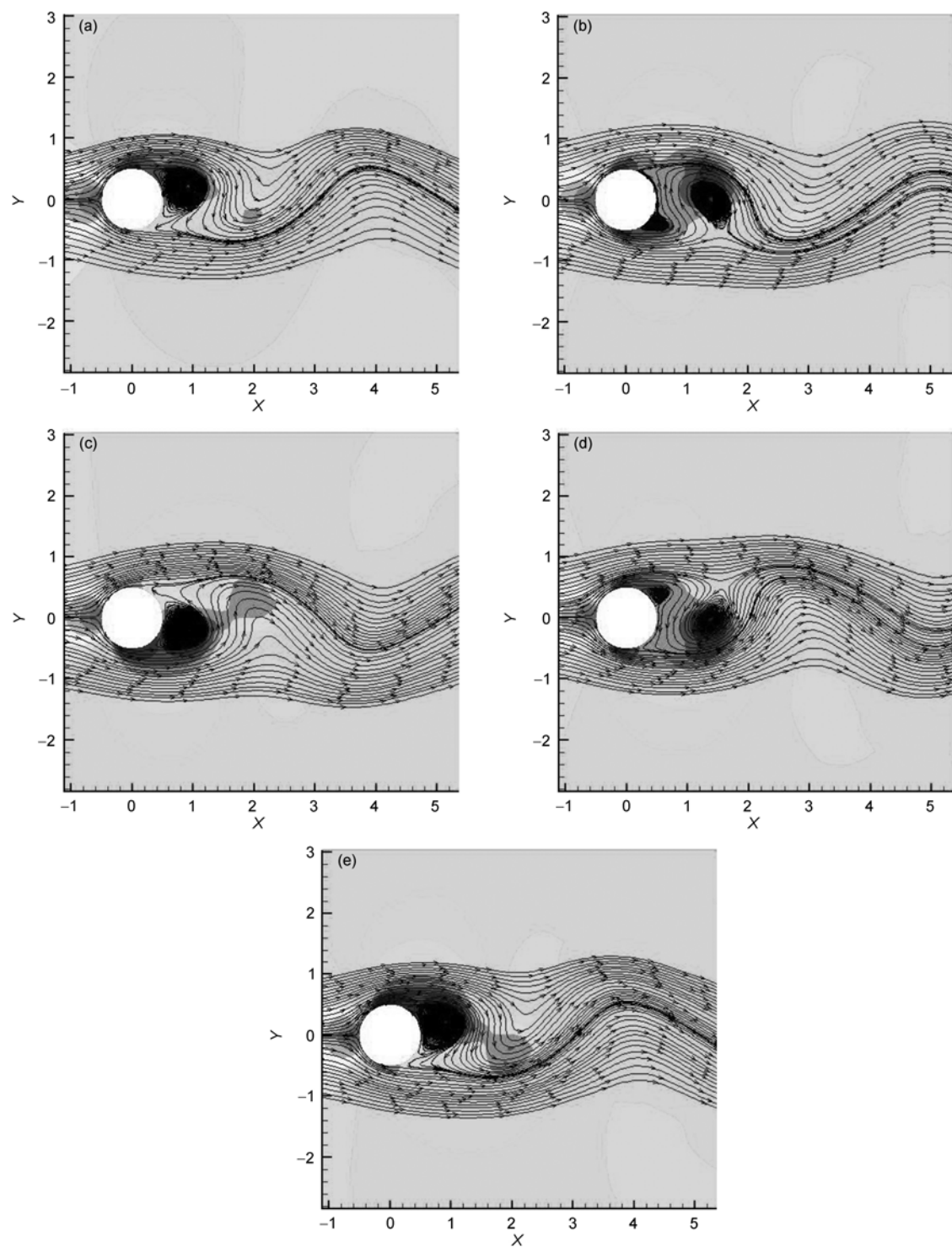
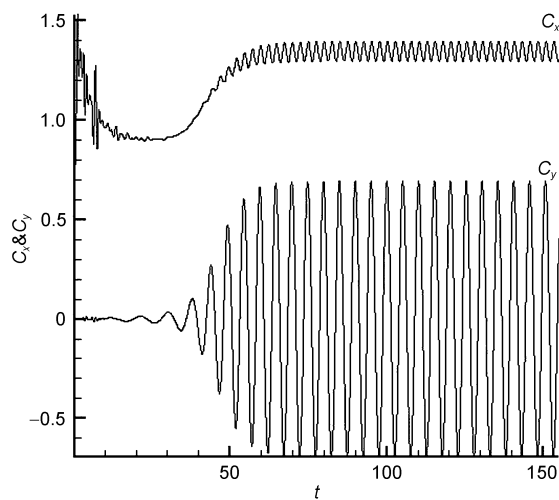


图9 $Re=200$ 时, 一个周期内的压力云图变化和涡脱落过程流线显示
(a) $t=129.60$; (b) $t=131.00$; (c) $t=132.40$; (d) $t=133.75$; (e) $t=135.15$.

表 2 $Re=200$ 时, 计算结果对比

	阻力系数 C_x	升力系数 C_y	斯特劳哈尔数 S_t
本文	1.35 ± 0.05	± 0.69	0.18
文献[12]三阶格式	1.29 ± 0.05	± 0.75	0.16
文献[12]五阶格式	1.23 ± 0.05	± 0.65	0.185
文献[14]WENO 格式	1.33 ± 0.04	± 0.72	0.197
文献[23]二阶格式	1.46 ± 0.04	± 0.70	0.227
文献[23]四阶格式	1.58 ± 0.0035	± 0.50	0.194
文献[24](实验)	—	—	0.19
文献[25](实验)	—	—	0.19
文献[26](实验)	1.3	—	—

图 10 $Re=200$ 时, 升力和阻力系数随时间变化的历程

计算精度和对收敛特性的影响. 结果表明在参数 α 和 β 较大变化范围内, 本文所建立的数值方法可给出较高的计算精度. 所开展的数值试验还给出了收敛速度最优的 α 和 β 选值. 最后, 将所发展的数值算法应用于低 Reynolds 数黏性圆柱非定常绕流的数值模拟亦得到了令人满意的结果.

本文研究表明, 迎风型 Roe 格式相对于二阶中心差分格式得到的结果更令人满意; 对拟压缩 Navier-Stokes 方程进行预处理可有效地提高数值计算的收敛速度; 自适应的拟压缩因子取值能在更大程度上改善数值解的收敛特性, 且不需要根据具体流动形式进行人工调节.

致谢 感谢中国空气动力研究与发展中心李志辉研究员在本文研究过程中的帮助和建议.

参考文献

- 1 Wu X H, Wu J Z, Wu J M. Effective vorticity-velocity formulation for three-dimensional incompressible viscous flows. *J Comput Phys*, 1995, 122: 68–82
- 2 E W N, Liu J G. Finite difference methods for 3D viscous incompressible flows in the vorticity-vector potential formulation on non-staggered grid. *J Comput Phys*, 1997, 138: 57–82
- 3 Harlow F, Walch J. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free scheme. *Phys Fluids*, 1965, 8: 2182–2189
- 4 Patankar S V, Spalding D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int J Heat Mass Transfer*, 1972, 5: 1787–1806
- 5 Chorin A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math Comput*, 1968, 22: 745–762
- 6 Chorin A J. A numerical methods for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys*, 1967, 2: 12–26
- 7 Tamamidis P, Zhang G, Assanis D N. Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows. *J Comput Phys*, 1996, 124: 1–13
- 8 Choi Y H, Merkle C L. The application of preconditioning to viscous flows. *J Comput Phys*, 1993, 105: 207–231
- 9 Turkel E. Preconditioning techniques in computational fluid dynamics. *Annu Rev Fluid Mech*, 1999, 31: 385–416

- 10 Weiss J M, Simth W A. Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA J*, 1995, 33: 2050–2057
- 11 Kwak D, Chakravarthy S R. A three-dimensional incompressible Navier-Stokes flow solver using primitive variables. *AIAA J*, 1986, 24: 390–396
- 12 Rogers S E, Kwak D. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA J*, 1990, 28: 253–262
- 13 Rogers S E, Kwak D. An Upwind-Differencing Scheme for the Incompressible Navier-Stokes Equations. NASA TM-101051, 1988
- 14 Chen Y N, Yang S C, Yang J Y. Implicit weighted essentially non-oscillatory schemes for the incompressible Navier-Stokes equations. *Int J Numer Meth Fluids*, 1999, 31: 747–765
- 15 Turkel E. Preconditioning methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J Comput Phys*, 1987, 72: 277–298
- 16 Liu C, Zheng X, Sung C H. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *J Comput Phys*, 1998, 139: 35–57
- 17 Esfahanian V, Akbarzadeh P. The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method. *Appl Math Comput*, 2008, 206: 651–661
- 18 Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta Time-Stepping schemes. *AIAA Paper*, 1981, AIAA-81-1259
- 19 Roe P L. Approximate Riemann Solvers, parameter vectors and difference schemes. *J Comput Phys*, 1981, 43: 357–372
- 20 Yoon S, Jameson A. Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations. *AIAA J*, 1988, 26: 1025–1026
- 21 Tritton D J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J Fluid Mech*, 1959, 6: 547–567
- 22 Contanceau M, Bouard R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. steady flow. *J Fluid Mech*, 1972, 79: 231–256
- 23 Lecoq Y, Piquet J. On the use of several compact methods for the study of unsteady incompressible viscous flow round a circular cylinder. *Comput Fluids*, 1984, 12(4): 255–280
- 24 Roshko A. On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets. NACA Report-1191, 1954
- 25 Kovasznay L S G. Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers. *Proc R Soc London Ser A*, 1949, 198: 174–190
- 26 Wille R. Karman Vortex Streets. *Advances in Applied Mechanics*, V6. New York: Academic, 1960. 273–287