递 归 结 构
——I. 可解决性理论

胡 世 华
(中国科学院软件研究所,北京 100080)

摘 要

本文提出一类代数结构,称为递归结构. 在续篇中,将在递归结构基础上建立可解决性理论,并应用于数学问题.

关键词: 递归函数,代数结构

Hilbert 说,判定问题是"数理逻辑中的基本问题". 在 ML(数理逻辑)中对可判定性和不可判定性的研究都有很多成果. 但是在这方面多数是研究各种命题类的可判定性, 对于单独一个命题的可判定性还研究得较少.

本文将提出一类代数结构称为 RS 即递归结构 (Recursive Structure). 提出 RS 是数学基础发展的需要, 也是本文续篇 II 研究可解决性问题的需要.

一、原始递归函数和递归结构

本文考虑一种可数代数结构 $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ 可以表作一个 3 元组

$$\mathfrak{A} = \langle \mathscr{A}, \{f_i\}_{i \in I}, \{a_j\}_{j \in J} \rangle = \langle \mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathscr{C} \rangle,$$

其中 $\mathscr{A}$ 是一可数无穷集,称为 $\mathfrak{A}$ 的论域 (domain). $\mathscr{F}$ 是一函数集,称为 $\mathscr{A}$ 的原始函数集: 任何 $f_i \in \mathscr{F}$ 都是一 $n_i \in N^+$(非零自然数集,即 N-$\{0\}$) 元函数

$$f: \mathscr{A}^n \to \mathscr{A}$$

$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个固定的常元集. 一般可以假定 $I \subseteq N$, $J \subseteq N$, J 不空.

涉及的形式语言是带等词的,等词写作"$\equiv$",把"$=$"用以表示直观的相等.

称一可数代数结构 $\mathfrak{A}$ 为一秩 (rank) 为 α 的递归结构 (RS) 是说它满足以下 3 个条件.

1. 对 $\mathfrak{A}$ 而言 α 给定, $\alpha \in N^+ \cup \{\omega\}$.

2. $\mathfrak{A}$ 的常元集中恰好有一个元称为 $\mathfrak{A}$ 的初始元,一般写初始元为零.

3. $\mathfrak{A}$ 的原始函数集 $\mathscr{F}$ 可以表作两个函数集的 L 和, $\mathscr{F} = S \cup PR$. S 和 PR 两函数

本文 1989 年 9 月 14 日收到压缩稿.

集应满足的条件分别陈述如下:

$$S = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_k\} \text{ 当 } \alpha = k \in N^+ \text{ 时},$$
$$S = \{\sigma_i | i \in N^+\} \text{ 当 } \alpha = \omega \text{ 时},$$

各 σ_i 都是 1 元函数, 称 S 为 $\mathfrak{A}$ 的后继函数集. 当给定的秩 $\alpha = 1$ 时可记唯一的后继函数 σ_1 为 σ. 可以表 $\mathfrak{A}$ 为以下形式:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathscr{A}, S \cup PR, 0\rangle \text{ 或}$$
$$= \langle \mathscr{A}_\alpha, S_\alpha \cup PR_\alpha, 0\rangle.$$

关于 $\mathscr{F} = S \cup PR$ 中 S 部分, 在给定秩 α 的前提下施后继函数的运算于初始元零上恰好无重复地遍历尽 $\mathscr{A}$ 中所有元. 换言之, $\mathscr{A}$ 中任何元 a 必有 $\sigma_{i_1}, \cdots, \sigma_{i_m} \in S$ 使 $a = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_m} 0$, 如另有 $\sigma_{j_1}, \cdots, \sigma_{j_n} \in S$ 使 $a = \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_n} 0$ 则必有 $m = n, i_1 = j_1, \cdots, i_m = j_m$. 为了说明 $\mathscr{F}$ 中 $PR(PR_\alpha)$ 部分所满足的条件, 先作以下定义. 设 g 是 $n-1$ 元的, $h_1, \cdots, h_k$ (当 $\alpha = k \in N^+$ 时) $h_1, h_2, \cdots$ (当 $\alpha = \omega$ 时) 是 $n+1$ 元的, 由给定的函数和常元集 $S \cup \{0\} \cup \{f_1, \cdots, f_m\}$ 的有穷子集经显定义而得. 当 f 是满足以下条件的 n 元函数, 任何 $x_1, \cdots, x_n \in \mathscr{A}$ 恒有

$$\begin{cases} f(0, x_2, \cdots, x_n) = g(x_2, \cdots, x_n), \text{(当 } n = 1 \text{ 时为常元)}. \\ f(\sigma_i x_1, x_2, \cdots, x_n) = h_i(f(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \\ \qquad i = 1, \cdots, k \text{ 当 } \alpha = k \in N^+ \text{ 时}, \\ \qquad i \in N^+ \text{ 当 } \alpha = \omega \text{ 时}. \end{cases} \tag{P$_\alpha$}$$

称 f 为由 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ (此集许可空)经原始递归定义模式 (P$_\alpha$) 而得的函数. 现在陈述 $\mathscr{F}$ 中 $PR(PR_\alpha)$ 部分所满足的条件. PR_α 是满足以下两条件的最小的函数集 P:(1)所有由空函数集经原始递归模式 (P$_\alpha$) 而得的 $f \in P$, (2) P 封闭于经模式 (P$_\alpha$) 而得的函数, 即, 如果 $f_1, \cdots, f_m \in P$, 则由 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 经模式 (P$_\alpha$) 而得的 $f \in P$. 当 $\mathscr{F} = S \cup PR(S_\alpha \cup PR_\alpha)$ 时记 $\mathscr{F}$ 为 $PRF(PRF_\alpha)$ 由之记 $\mathfrak{A}$ 为

$$\mathfrak{A} = \langle \mathscr{A}, PRF, 0\rangle,$$

可记秩为 α 的 RS $\mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{A}_\alpha$, 并记

$$\mathfrak{A}_\alpha = \langle \mathscr{A}_\alpha, PRF_\alpha, 0\rangle.$$

称一结构 $\mathfrak{A}$ 为一 RS, 当且仅当, 它是一秩为 $\alpha \in N^+ \cup \{\omega\}$ 的 RS.

称 $PRF(PRF_\alpha)$ 为 RS $\mathfrak{A}$ 的原始递归函数集. 今后写"PRF"表示 $\mathfrak{A}$ 中的这个函数集, 又作为"原始递归函数"的简写. $PR_\alpha(PR)$ 是 $\mathfrak{A}_\alpha$ 中借模式 (P$_\alpha$) 定义而得的函数集. "PR"既用以表示这集, 又用以代替措词"原始递归". 从上下文可以分清同一措词的不同的表示.

以上的定义可以写作与一般 ML 文献中的 PRF 的定义比较接近的形式, 即通过以下 5 个定义模式以代模式 (P$_\alpha$) 来作出. 常数 α (除了表示所讨论的结构的秩)表示 (I$_\alpha$) 式中给出了 α 个函数, (V$_\alpha$) 式中包括 $1 + \alpha$ 个等式, 不同的是给定了一个可数无穷集 $\mathscr{A}$, 给出其中一个初始元零和 $\mathscr{A}$ 上的一个函数集 S_α (满足前面所讲条件), 由之定义出一个 $\mathscr{A}$ 上的 PRF 集.

$$f(x) = \sigma_i(x) \qquad i = 1, \cdots, k, \qquad \text{当 } \alpha = k \in N^+,$$
$$i \in N^+, \text{ 当 } \alpha = \omega, \tag{I$_\alpha$}$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a\qquad a\in\mathscr{A},\tag{II}$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x_i\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\tag{III}$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(h_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,h_m(x_1,\cdots,x_n)),\tag{IV}$$

$$\begin{cases}f(0)=a,\qquad a\in\mathscr{A}\\ f(\sigma_i(x))=h_i(f(x),x),\\ \qquad\qquad i=1,\cdots,k,\ \text{当}\ \alpha=k,\\ \qquad\qquad i\in N^+,\qquad \text{当}\ \alpha=\omega,\\ \text{于}\ f\ \text{为 1 元时}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(0,x_2,\cdots,x_n)=g(x_2,\cdots,x_n),\\ f(\sigma_i(x),x_2,\cdots,x_n)=h_i(f(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n),\\ \qquad\qquad i=1,\cdots,k\ \text{当}\ \alpha=k,\\ \qquad\qquad i\in N^+,\qquad \text{当}\ \alpha=\omega,\\ \text{于}\ f\ \text{为}\ n\geqslant 2\ \text{元时}.\end{cases}\tag{V_α}$$

用这里的 (I_α), (II), (III), (IV), (V_α) 式来定义秩为 α 的 PRF 集 PRF_α 和前面用模式 (P_α) 来定义是等价的.

上面定义了可数无穷个数学结构 $\mathfrak{A}_k(k\in N^+)$ 和 $\mathfrak{A}_\omega$，称为 RS. 这些结构将成为以后引进形式语言、形式理论的预定解释.

设 f 是 1 元函数，写"$f(x)$"和 "fx" 表示同样的意思. 如果 f 是 2 元函数，往往写 $f(x,y)$ 为 (xfy) 或写作 xfy. 如$+(x,y)$写作 $x+y$.

引理 1.1. RS 的 PRF 集封闭于经显定义而得的函数. 换言之，设 $f_1,\cdots,f_m\in PRF$，f 是由 $S\cup\{0\}\cup\{f_1,\cdots,f_m\}$ 的有穷子集经显定义而得，肯定 $f\in PRF$.

证明从略. 下同.

引理 1.2. 设 $f_1,\cdots,f_m$ (一般可设 $m\geqslant 2$) 满足以下条件：任何 $x_1,\cdots,x_n\in\mathscr{A}$,

$$\begin{cases}f_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\\ \vdots\\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases}$$

中恰好有一个等式成立；又设有 m 个 n 元的 g_i, f 与 f_i,g_i 有以下关系：

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}g_1(x_1,\cdots,x_n),\qquad \text{当}\ f_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\\ \vdots\\ g_m(x_1,\cdots,x_n),\qquad \text{当}\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=0.\end{cases}$$

肯定：$f_i,g_i(i=1,\cdots,m)\in PRF\Rightarrow f\in PRF$.

在 RS 中的第一个后继函数为 σ_1. 令

$$0_1=_{df}\sigma_1 0.$$

一个 n 元的函数 f，对任何 $x_1,\cdots,x_n$，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 恒于 $\{0,0_1\}$ 中取值，则称 f 为**一表示函数**. 设 R 是一 n 元的关系，满足条件

$$R(x_1,\cdots,x_n)\Longleftrightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=0,$$

$$\text{非}\ R(x_1,\cdots,x_n)\Longleftrightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=0_1.$$

称 f 表示 R，$f(x_1,\cdots,x_n)$表示 $R(x_1,\cdots,x_n)$.

上面所写的 PR 定义模式 (P_α) 给出了施 PR 于第一个变元的定义. 对 n 元的函数有施 PR 于第 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 个变元的定义模式,可写作

$$\begin{cases} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n) \\ \qquad = g(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n), \\ f(x_1, \cdots, x_{j-1}, \sigma_i x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) \\ \qquad = h_i(x_1, \cdots, x_{j-1}, f(x_1, \cdots, x_n), x_j, \cdots, x_n), \\ \qquad i = 1, \cdots, k, \text{ 当 } \alpha = k \in N^+ \text{ 时}, \\ \qquad i \in N^+, \text{ 当 } \alpha = \omega \text{ 时}. \end{cases} \qquad (\mathrm{P}_\alpha)_{j,n}$$

任何给定的 $1 \leqslant n$ 由这里的模式 $(\mathrm{P}_\alpha)_{j,n}$ 定义的 n 元的 f 不超出原来用模式 (P_α) 定义的 PR_σ 的范围.

二、RS 中的一些 *PRF* 的定义

本节列举一些各个不同秩的 RS 在本结构内都可以作出的 PR 定义.

$$0_i =_{df} \sigma_i(0) \qquad i = 1, \cdots, k, \text{ 当 } \alpha = k \in N^+$$
$$\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots \text{ 当 } \alpha = \omega.$$

$$\begin{cases} x \bigoplus_\alpha 0 =_{df} x, \\ x \bigoplus_\alpha \sigma_i(y) =_{df} \sigma_i\left(x \bigoplus_\alpha y\right), \quad i = 1, \cdots, k (i = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

在一定的上下文范围里,在不至于引起误会时可作定义

$$xy =_{df} x \oplus y =_{df} x \bigoplus_\alpha y.$$

由于 $\bigoplus_\alpha \in PRF$ 满足组合律,所以 $x(yz)$, $(xy)z$ 可以写为 xyz. xy 可读为 x 与 y 的并.

以下作 k 个(ω 个) PRF $\breve{\sigma}_j(j = 1, \cdots, k$ 当 $\alpha = k \in N^+, j = 1, 2, \cdots$ 当 $\alpha = \omega)$的 PR 定义.

$$\begin{cases} \breve{\sigma}_j(0) =_{df} 0_j, \\ \breve{\sigma}_j(\sigma_i x) =_{df} \sigma_i \breve{\sigma}_j(x), \\ \qquad i = 1, \cdots, k, \text{ 当 } \alpha = k \in N^+, \\ \qquad i = 1, 2, \cdots \text{ 当 } \alpha = \omega. \end{cases}$$

$$\mathrm{inv}(0) =_{df} 0,$$
$$\mathrm{inv}(\sigma_i x) =_{df} \breve{\sigma}_i(\mathrm{inv}(x)), \quad i = 1, \cdots, k$$
$$i = 1, 2, \cdots.$$

关于 $\breve{\sigma}_i$ 和 RS 的 PR 定义模式 (P_α) 有以下引理.

引理 2.1. 设由 g, h_i 通过以下模式定义 f:

$$\begin{cases} f(0, x_2, \cdots, x_n) =_{df} g(x_2, \cdots, x_n), \\ f(\breve{\sigma}_i(x_1), x_2, \cdots, x_n) =_{df} h_i(f(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \\ \qquad i = 1, \cdots, k, \text{ 当 } \alpha = k \in N^+, \\ \qquad i \in N^+, \text{ 当 } \alpha = \omega. \end{cases} \qquad (1)$$

那么 f 相对于 g, h_i 原始递归；即 g, h_i 为 PRF 时 f 也是。

引理说明，$\breve{\sigma}_i$ 可以与模式（P_a）中的 σ_i 起着同样的作用。

$$\begin{cases} \dashv 0 =_{df} 0_1, \\ \dashv \sigma_i x =_{df} 0, \quad i = 1, \cdots, k(1, 2, \cdots), \end{cases}$$

$$sg(x) =_{df} \dashv \dashv x,$$

$$\begin{cases} 0 \curlywedge y =_{df} sg(y), \\ \sigma_i x \curlywedge y =_{df} 0_1, \quad i = 1, \cdots, k(1, 2, \cdots), \end{cases}$$

$$x \rightharpoonup y =_{df} \dashv (x \curlywedge \dashv y),$$

$$x \curlyvee y =_{df} \dashv (\dashv x \curlywedge \dashv y),$$

$$x \leftrightharpoons y =_{df} (x \rightharpoonup y) \curlywedge (y \rightharpoonup x).$$

以下给出 k 个（ω 个）PRF，记为 $\mathrm{let}_j, j = 1, \cdots, k(j = 1, 2, \cdots)$：

$$\begin{cases} \mathrm{let}_j(0) =_{df} 0_1, \\ \mathrm{let}_j(\sigma_i x) =_{df} \begin{cases} sg(x), & \text{当 } i = j \text{ 时}, \\ 0_1, & \text{当 } i \neq j \text{ 时}. \end{cases} \\ \qquad i = 1, \cdots, k(1, 2, \cdots). \\ \mathrm{let}_j(x) \text{ 表示 } x \text{ 是 } 0_j. \end{cases}$$

引理 2.2 （受囿特称和全称运算对于 PRF 的封闭性）

设 $f: \mathscr{A}^n \to \mathscr{A}$，令

(i) $$g(x_1, \cdots, x_n)$$
$$=_{df} \langle \partial y \rangle_{x_j} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$
$$=_{df} \begin{cases} 0, & \text{当有 } y, y_1, y_2 \text{ 使 } x_j = y_1 y y_2 \text{ 并且} \\ & \quad f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n) = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ 0_1, & \text{当 } x_j \text{ 不满足上述条件时}. \end{cases}$$

(ii) $$h(x_1, \cdots, x_n)$$
$$=_{df} \langle y \rangle_{x_j} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$
$$=_{df} \begin{cases} 0, & \text{当任何有 } y_1, y_2 \text{ 使 } x_j = y_1 y y_2 \text{ 的 } y \text{ 恒有} \\ & \quad f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n) = 0, 1 \leqslant j \leqslant n, \\ 0_1, & \text{当 } x_j \text{ 不满足上述条件时}. \end{cases}$$

肯定：$f \in PRF \Rightarrow g, h \in PRF$；$g, h$ 相对 fPR。

为了书写的方便，令

$$\langle \partial y_1, \cdots, y_n \rangle_x —— =_{df} \langle \partial y_1 \rangle_x \cdots \langle \partial y_n \rangle_x ——$$

$$\langle y_1, \cdots, y_n \rangle_x —— =_{df} \langle y_1 \rangle_x \cdots \langle y_n \rangle_x ——$$

$$\begin{cases} \mathrm{del}r(0) =_{df} 0, \\ \mathrm{del}r(\sigma_i x) =_{df} x, \quad i = 1, \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} r\mathrm{let}(0) =_{df} 0, \\ r\mathrm{let}(\sigma_i x) =_{df} 0_i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \succeq y =_{df} sg(y), \\ \sigma_i x \succeq y =_{df} x \succeq \mathrm{del}r(y) \curlywedge \mathrm{let}_i(r\mathrm{let}(y)), \end{cases}$$

$$x \succeq y \text{ 表示 } x = y,$$
$$x \not\succeq y =_{df} \rightharpoondown (x \succeq y),$$
$$\mathrm{in}(x,y) =_{df} \langle \partial y_1, y_2 \rangle_y [y \succeq y_1 x y_2].$$

以上在各秩的 RS 中定义 PRF 时使用了直观符号$\succeq$, $\lrcorner$, $\rightharpoondown$, $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\leftrightharpoons$(对应于逻辑演算中的等词$\equiv$，连接词$\neg$, $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$)，称为拟逻辑词项. 表示 $\langle \partial y \rangle_x$, $\langle y \rangle_x$ 的符号使用 (symbolism) 也是一种拟逻辑词项，称为受囿特称和全称量词. 下一节还将引进另外的受囿量词. RS 的理论中包含着一个二值的L系统. 0 为真值，0_1 为假值.

$$\mathrm{let}(x) =_{df}$$
$$x \not\succeq 0 \curlywedge \langle y, z \rangle_x [x \succeq yz \rightharpoondown x \succeq 0 \curlyvee y \succeq 0],$$

如果在秩为 $k \in N^+$ 的 RS 中，则 let 可定义为

$$\mathrm{let}(x) =_{df} \mathrm{let}_1(x) \curlyvee \cdots \curlyvee \mathrm{let}_k(x).$$

三、有穷秩 RS 中秩为 1 的 RS

本节证明，在有穷秩 $k \geqslant 2$ 的 RS $\mathfrak{A}_k$ 中可定义一个秩为 1 的 RS $\mathfrak{A}_1$，使 $\mathfrak{A}_1$ 成为 $\mathfrak{A}_k$ 的子结构. 我们写

$$\mathfrak{A}_k = \langle \mathscr{A}_k, S_k \cup PR_k, 0 \rangle,\ 2 \leqslant k < \omega,$$
$$\mathfrak{A}_1 = \langle \mathscr{A}_1, S_1 \cup PR_1, 0 \rangle,$$

其中 $S_k = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_k\}$，$S_1 = \{\sigma\}$，$\sigma$ 不属于 S_k，但可于 $\mathfrak{A}_k$ 中借模式 (P_k) 定义 $\sigma \in PR_k$ (见以下定义中之 (iv)) 并证明于 $\mathfrak{A}_k$ 中可借 PR 定义模式 (P_1) 定义 $\mathfrak{A}_1$ 中的 PRF_1，使 $PRF_1 \subseteq PRF_k$. 从而使 $\mathfrak{A}_1$ 成为 $\mathfrak{A}_k$ 的子结构(见以下引理 3.1).

定义. 于 $\mathfrak{A}_k$ 中作以下 (i)—(vi) 定义:

设 $1 \leqslant i < k$，令

$$\begin{cases} \langle x \rangle^1 =_{df} x, \\ \langle x \rangle^{i+1} =_{df} \langle x \rangle^i \oplus_k x, \end{cases} \tag{i}$$

$$\begin{cases} \mathrm{lw}(0) =_{df} 0, \\ \mathrm{lw}(\sigma_i x) =_{df} \langle \mathrm{lw}(x) \rangle^k \oplus_k \langle 0_1 \rangle^i,\ i = 1, \cdots, k. \end{cases} \tag{ii}$$

$$\mathrm{lwor}(x) =_{df} \langle y \rangle_x [\mathrm{let}(y) \rightharpoondown \mathrm{let}_1(y)]. \tag{iii}$$

$$\begin{cases} \sigma 0 =_{df} 0_1, \\ \sigma \sigma_i x =_{df} \sigma_{i+1} x, \text{ 当 } 1 \leqslant i < k, \\ \sigma \sigma_k x =_{df} \sigma_1 \sigma(x). \end{cases} \tag{iv}$$

$$\begin{cases} \mathrm{len}(0) =_{df} 0, \\ \mathrm{len}(\sigma_i x) =_{df} \sigma(\mathrm{len}(x)),\ i = 1, \cdots, k. \end{cases} \tag{v}$$

$$\mathrm{el}(x) =_{df} \begin{cases} \mathrm{len}(x), & \text{当 } \mathrm{lwor}(x) = 0, \\ 0 & \text{当 } \lrcorner\,\mathrm{lwor}(x) = 0. \end{cases} \tag{vi}$$

引理 3.1. 取 $\mathfrak{A}_1$ 的论域 $\mathscr{A}_1$ 为 $\mathfrak{A}_k$ 的论域 $\mathscr{A}_k$，取 $\sigma \in PR_k \subseteq PRF_k$ 为 $\mathfrak{A}_1$ 的唯一的后继函数，肯定 $PRF_1 \subseteq PRF_k$.

由这引理，显然可以在任何有穷秩的 RS $\mathfrak{A}_k$ 中作有如N中的 PR 定义，可以把 $\mathfrak{A}_k$ 的论域 $\mathscr{A}$ 当作 N，借 σ 对 0 的叠代无重复地遍历 $\mathscr{A}_k$，即 $\mathscr{A}_k = \{0, \sigma 0, \sigma\sigma 0, \cdots\}$. 若取

$\mathscr{A}_k$ 为 N，可令

$$\begin{cases}1 =_{df} \sigma 0, \\ n+1 =_{df} \sigma n.\end{cases}$$

引理 3.2. 设

$$f(x) =_{df} \langle \partial y \rangle_{\leqslant x} g(y) (\langle \partial y \rangle_{<x} g(y)) =_{df} \begin{cases}0, \text{ 当有 } y \leqslant x (y < x) \text{ 使得 } g(y) = 0, \\ 1, \text{ 当没有这样的 } y.\end{cases} \tag{i}$$

$$f(x) =_{df} \langle y \rangle_{\leqslant x} g(y) (\langle y \rangle_{<x} g(y)) =_{df} \begin{cases}0, \text{ 当任何 } y \leqslant x (y < x) g(y) \\ \quad \text{恒为 } 0, \\ 1, \text{ 当不如此时}.\end{cases} \tag{ii}$$

$$f(x) =_{df} \langle \mu y \rangle_{\leqslant x} g(y) (\langle \mu y \rangle_{<x} g(y)) =_{df} \begin{cases}\text{最小的 } y \leqslant x (y < x) \text{ 使 } g(y) = 0, \\ \qquad \text{当有这样一个 } y \text{ 时}, \\ \sigma(y)(y), \text{ 当不存在这样一个 } y \text{ 时}.\end{cases} \tag{iii}$$

肯定 (i),(ii),(iii) 式中的 f 都相对于 g PR，即

$$g \in PRF \Longrightarrow f \in PRF.$$

f 和 g 都可以有更多参数. 以 (i) 式为例,如 f 与 g 为

$$f(x_1, \cdots, x_n) =_{df} \langle \partial y \rangle_{<x_j} g(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$

则 f 相对于 g PR.

仿上可于秩为 ω 的 RS $\mathfrak{A}_\omega$ 中定义一个秩为 1 的 RS $\mathfrak{A}_1$ 中的后继函数 $\sigma \in PR_\omega$，证明于 $\mathfrak{A}_\omega$ 中可使用定义模式 (P_1)，使 $\mathfrak{A}_1$ 成为 $\mathfrak{A}_\omega$ 的子结构.

四、秩为 1 的 RS 中的有穷秩的 RS

本节将给出引理 3.1 的逆命题：取有穷秩为 $k \geqslant 2$ 的 RS 的论域 $\mathscr{A}_k$ 为秩为 1 的 RS 的论域 $\mathscr{A}_1$，于 $\mathfrak{A}_1$ 中借模式 (P_1) 定义 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in PR_1$ 为 $\mathfrak{A}_k$ 的后继函数，于 $\mathfrak{A}_1$ 中可以使用 (P_k)，从而证明 $PRF_k \subseteq PRF_1$ (引理 4.3). 由引理 3.1 与 4.3 乃有 $PRF_1 = PRF_k$.

给定了一个 $z \in N$，任一 $y \in N$ 可以作以下(1)式的算术表达. 关于 z 我们可以设想它的后继数 $z' = z + 1 = k$.

$$\begin{cases} y = 0, \text{ 或者} \\ y = i_m \cdot (z')^{m-1} + \cdots + i_{n+1} \cdot (z')^n + i_n \cdot (z')^{n-1} \\ \quad + \cdots + i_2 \cdot z' + i_1 \quad \text{其中的 } m \\ \quad \text{和 } i_1, \cdots, i_m \text{ 是由给定的 } z \\ \quad \text{和 } y \text{ 唯一确定的}, \\ \quad 0 \leqslant i_1, \cdots, i_m \leqslant z, \ 1 \leqslant i_m. \end{cases} \tag{1}$$

按(1)式中有关各数的关系，于自然数域中定义以下(2)，(3)，(4)式中 3 个 N 上的函数 sfp, lenp, $\oplus$.

$$\begin{cases} \mathrm{sfp}(0,y,z)=_{df}0, \\ \mathrm{sfp}(n',y,z)=_{df}\begin{cases} i_{n+1}\cdot(z')^n+i_n\cdot(z')^{n-1}+\cdots+i_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 当\ n+1\leqslant m 时, \\ y, \qquad\qquad\qquad\quad 当\ m<n+1 时. \end{cases}\end{cases} \tag{2}$$

其中参数 z 是用以表示 RS 的秩 $k=z'$ 的. (1)式中的 m 取为 y 与 z 的函数,记为

$$\mathrm{lenp}(y,z)=_{df}m. \tag{3}$$

再令

$$\begin{cases} \oplus(0,y,z)=_{df}y, \\ \oplus(x',y,z)=_{df}i_n\cdot(z')^{(\mathrm{lenp}(y,z)+n)-1}+\cdots+i_1\cdot(z')^{\mathrm{lenp}(y,z)}+y, \\ \qquad 当\ x'=i_n\cdot(z')^{n-1}+\cdots+i_1, \\ \qquad 其中\ n=\mathrm{lenp}(x',z),\ 1\leqslant i_1,\cdots,i_n\leqslant z'. \end{cases} \tag{4}$$

按上面在自然数域中由(1)式作(2),(3),(4)式 3 个直观定义的思想,可于 $\mathfrak{A}_1$ 中作以下定义中的 (i),(ii),(iii) 3 个 PR 定义. 从定义中使我们确认 (2),(3),(4) 式中的 sfp, lenp,$\oplus$是自然数的 PRF. 自然数的 PRF 本来就是秩为 1 的 PRF 的特例. 定义中需要于 $\mathfrak{A}_1$ 中对于给定的 k 重新定义 σ_i, $\mathrm{let}_i(i=1,\cdots,k)$, let, $r$let, del$r$, 因为现在是于 $\mathfrak{A}$ 中作定义.

定义. 以 (P_1) 在 $\mathfrak{A}_1$ 中作 (i)—(x) 10个 PR 定义.

以下的 a 是 $\left[\dfrac{y\dot{-}\mathrm{sfp}(x,y,z)}{(\sigma y)^x}\right]$ 的临时缩写.

$$\begin{cases} \mathrm{sfp}(0,y,z)=_{df}0, \\ \mathrm{sfp}(\sigma x,y,z)=_{df}\begin{cases} 0, & 当\ y=0, \\ y, & 当\ (0\prec y 人 a)=0, \\ \langle\mu i\rangle_{\leqslant\sigma z}(0\prec i 人 \mathrm{div}(\sigma z,a\dot{-}i))\cdot \\ \qquad (\sigma z)^x+\mathrm{sfp}(x,y,z), \\ & 当\ (0\prec y 人 \neg a)=0. \end{cases}\end{cases} \tag{i}$$

$$\mathrm{lenp}(x,z)=_{df}\langle\mu y\rangle_{\leqslant z}(\mathrm{sfp}(y,x,z)\simeq\mathrm{sfp}(\sigma y,x,z)). \tag{ii}$$

$$\oplus(x,y,z)=_{df}(\sigma z)^{\mathrm{lenp}(y,z)}\cdot x+y. \tag{iii}$$

$$\begin{cases} 0_1=_{df}\sigma 0, \\ 0_{i+1}=_{df}\sigma 0_i,\ 1\leqslant i<k \end{cases} \tag{iv}$$

这是对给定的 $k\in N^+$ 对 $\mathscr{A}_1$ 中 k 个元 $0_1,\cdots,0_k$ 的定义.

$$\oplus_k(x,y)=_{df}\oplus(x,y,k\dot{-}1),\ k\geqslant 2. \tag{v}$$

$$\sigma_i^k x=_{df}x\oplus_k 0_i=_{df}\oplus_k(x,0_i),\ i=1,\cdots,k. \tag{vi}$$

$$\mathrm{let}^k(x)=_{df}0\prec x 人 \langle y,z\rangle_{\leqslant x}(x\simeq(y\oplus_k z)\to y\simeq 0). \tag{vii}$$

$$\mathrm{let}_i^k(x)=_{df}x\simeq 0_i,\ i=1,\cdots,k \tag{viii}$$

$$\begin{cases} r\mathrm{let}^k(0)=_{df}0, \\ r\mathrm{let}^k(\sigma x)=_{df}\langle\mu y\rangle_{\leqslant\sigma x}\langle\partial z\rangle_{\leqslant\sigma x}(\sigma x\simeq(z\oplus_k y) 人 \mathrm{let}^k(y)). \end{cases} \tag{ix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{del}r^k(0)=_{df}0, \\ \mathrm{del}r^k(\sigma x)=_{df}\langle\mu y\rangle_{\leqslant x}\langle\partial z\rangle_{\leqslant\sigma x}(\sigma x\simeq(y\oplus_k z) 人 \mathrm{let}^k(z)). \end{cases} \tag{x}$$

对上面定义中所定义的那些函数，显然可以肯定以下的引理。

引理 4.1. 任何 $k\in N^+$ 恒有 sfp, lenp, $\oplus$, $\oplus_k$, $\sigma_1^k,\cdots,\sigma_k^k$, let^k, $\mathrm{let}_i^k(i=1,\cdots,k)$, $r\mathrm{let}^k$, $\mathrm{delr}^k\in PR_1$.

对于给定的 k，于讨论中不再涉及别的秩的 RS 时，上面 (v)—(x) 式中所定义的函数的直观符号上的“k”可以省写，并写 $x\oplus_k y$ 为 xy，(vi) 式可以写为

$$\sigma_i x =_{df} x0_i,\quad i=1,\cdots,k$$

等等。

引理 4.2. 串值递归

设 $\tilde{f}$ 是由 f 借 (P_1) 定义而得

$$\begin{cases}\tilde{f}(0,x_2,\cdots,x_n)=_{df}1,\\ \tilde{f}(\sigma x_1,x_2,\cdots,x_n)=_{df}\prod_{y=0}^{x_1}p_y^{f(y,x_2,\cdots,x_n)},\end{cases}$$

f 与 h 满足条件：任何 $x_1,\cdots,x_n\in\mathscr{A}_1$ 恒有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=h(\tilde{f}(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n).$$

肯定：

$$h\in PRF_1\Longrightarrow f\in PRF_1.$$

引理 4.3. 对于给定的 $k\in N^+(k\geqslant 2)$，设 f 与 $g,h_1,\cdots,h_k$ 满足以下条件：对于任何 $x_1,\cdots,x_n\in\mathscr{A}_1$ 恒有

$$\begin{cases}f(0,x_2,\cdots,x_n)=g(x_2,\cdots,x_n),\\ f(\sigma_i x_1,x_2,\cdots,x_n)=h_i(f(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n),\\ \qquad\qquad i=1,\cdots,k.\end{cases}$$

肯定：

$$g,h_1,\cdots,h_k\in PRF_1\Longrightarrow f\in PRF_1.$$

换言之，取秩为 k 的 RS 的论域 $\mathscr{A}_k$ 为秩为 1 的 RS 的论域 $\mathscr{A}_1$，取 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k\in PR_1$ 为 $\mathfrak{A}_k$ 中的后继函数。肯定：于 $\mathfrak{A}_1$ 中可以使用模式 (P_k)，$PRF_k\subseteq PRF_1$.

引理 4.3 和引理 3.1 按各自的证明，$\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_k$ 都互为子结构。不难进一步证明：在 $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}_k)$ 的子结构 $\mathfrak{A}_k$（子结构 $\mathfrak{A}_1$）中再借引理 3.1（引理 4.3）定义秩为 1 的 RS（秩为 k 的 RS），那么所定义的就是原来的 $\mathfrak{A}_1$（就是原来的 $\mathfrak{A}_k$）.

仿上可以于 $\mathfrak{A}_1$ 中作 $\mathfrak{A}_\omega$ 中后继函数的定义，并进而证明 PRF_1 与 PRF_ω 外延地相等。

在此基础上，还可以证明以下定理。

定理 4.1. 设 $\alpha,\beta\in N^+\cup\{\omega\}$，$\sigma_i^\alpha$($i=1,\cdots,k$ 当 α 为 $k\in N^+$，$i\in N^+$，当 α 为 ω) 与 σ_j^β($j=1,\cdots,k$ 当 β 为 $k\in N^+$，$j\in N^+$ 当 β 为 ω) 相应地为 $\mathfrak{A}_\alpha$ 和 $\mathfrak{A}_\beta$ 的后继函数。肯定：可于 $\mathfrak{A}_\beta$ 中作 σ_i^α 的 PR 定义 $\sigma_i^\alpha\in PR_\beta$，于 $\mathfrak{A}_\beta$ 中可用 (P_α) 使 $PRF_\alpha\subseteq PRF_\beta$；相应地可于 $\mathfrak{A}_\alpha$ 中作 σ_j^β 的 PR 定义 $\sigma_j^\beta\in PR_\beta$，于 $\mathfrak{A}_\alpha$ 中可用模式 (P_β) 使 $PRF_\beta\subseteq PRF_\alpha$.

对于两个 RS $\mathfrak{A}_\alpha$，$\mathfrak{A}_\beta$，它们虽然等价，可以互相嵌入，有 $PRF_\alpha=PRF_\beta$，但是在用以处理某些有关数学问题(包括可解决性问题)时可以出现用一个比用另一个更为便于处理的情况。