

格点动力系统 中的异宿环*

秦 文 新

(中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 北京 100080; 苏州大学数学系, 苏州 215006)

钱 敏

(北京大学数学系, 北京 100871)

摘要 讨论格点动力系统中空间混沌出现的一个判据——异宿环. 证明了若格点动力系统有渐近稳定的异宿环, 则系统有渐近稳定的同宿点, 从而系统有空间混沌.

关键词 格点动力系统 异宿环 同宿点

格点动力系统是分析时空混沌的有力工具. 到目前为止, 格点动力系统方面数值模拟的文章较多(见文献[1]及其中的参考文献), 严格的数学理论的文章则较少^[2,3]. 文献[2]论证了耦合映射格点系统(CML)中时空混沌的存在性(遍历论角度). 从动力学角度看, 还没有时空混沌的定义. 文献[4]和[5]从空间结构的复杂性方面讨论格点动力系统, 已有的一个结果为: 渐近稳定的同宿点意味着有空间混沌^[5]. 本文讨论格点动力系统 中的异宿环的存在性和空间混沌的关系. 最后利用所得的理论结果讨论一个具体例子的空间混沌.

1 主要结果

设 $B = \{u = \{u_j\}, j \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集, $u_j \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p$ 是 p 维标准 Euclid 空间.

记 $l^\infty = \{u \mid u \in B, \|u\|_{l^\infty} < \infty\}$, 其中 $\|u\|_{l^\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|u_j\|$. 以后简记 $\|\cdot\|$ 为 l^∞ 中的模, 且记 $(u)_j$ 为 u 在格点 j 处的坐标.

考虑 l^∞ 中的映射 $\tilde{F}: l^\infty \rightarrow l^\infty$

$$(\tilde{F}u)_j = F(\{u_j\}^s), \quad (1.1)$$

其中 $\{u_j\}^s = (u_{j-s}, u_{j-s+1}, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+s}) \in (\mathbb{R}^p)^{2s+1}$, $F: (\mathbb{R}^p)^{2s+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ 的 C^k ($k \geq 2$) 映射. 容易证明, 若 F 是 C^k ($k \geq 2$) 的, 则 $\tilde{F}: l^\infty \rightarrow l^\infty$ 也是 C^k 的. 以后均假定 F 是 C^k ($k \geq 2$) 的. $\{\tilde{F}^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 构成了 l^∞ 上的动力系统.

在空间 l^∞ 中, 除考虑时间演化 $\tilde{F}$ 外, 还要考虑空间移位变换 S_{j_0} ($j_0 \in \mathbb{Z}$):

$$(S_{j_0}u)_j = u_{j+j_0}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

显然每个变换 S_{j_0} 是 l^∞ 中的等距同构, 且与 $\tilde{F}$ 可交换, 即

1996-08-03 收稿, 1997-04-28 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

$$S_j \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ S_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

定义 1 称满足 $\mathcal{F}u = u$ 的 u 为系统 $\{\mathcal{F}^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的驻解(即 $\mathcal{F}$ 的不动点).

记 $A = \{u \mid \mathcal{F}u = u\}$. 显然 $\forall j \in \mathbb{Z}, S_j A = A$.

定义 2 设 u 是 $\mathcal{F}$ 的驻解. 若存在常数 $c > 0, 0 < q < 1$ 和 $\rho > 0$, 使得对任意 $u', u'' \in l^\infty$, 且 $\|u' - u\| \leq \rho, \|u'' - u\| \leq \rho$, 有

$$\|\mathcal{F}^n u' - \mathcal{F}^n u''\| \leq cq^n \|u' - u''\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

则称 u 是渐近稳定的.

定义 3 设 $u = \{u_j\} \in A$, 称 $\mathcal{U} = \{v \mid v = \{v_j\} \in l^\infty, |v_j - u_j| < \epsilon, j \in \mathbb{Z}\}$ 为 u 的半径为 ϵ 的齐次邻域.

定义 4 设 $u^1, u^2, \dots, u^n \in A, u^i = \{u_j^i\}$, 若存在 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^p$, 使得

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} u_j^i &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \lim_{j \rightarrow -\infty} u_j^i &= a_{i+1}, \quad a_{n+1} = a_1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.5)$$

则称 $u^1, u^2, \dots, u^n$ 形成异宿 n 环. 异宿 1 环($n=1$)也称同宿点.

注 1 定义 4 类似于低维系统异宿环的定义^[6].

注 2 如记 $v^i = \{v_j^i\}$, 其中 $v_j^i = a_i, j \in \mathbb{Z}$, 则由 $\mathcal{F}$ 的连续性知 $v^i (i=1, 2, \dots, n)$ 也是 $\mathcal{F}$ 的驻解, 即 $v^i \in A (i=1, 2, \dots, n)$. 以下总记 $v^1, \dots, v^n$ 为与异宿 n 环 $u^1, \dots, u^n$ 相应的 n 个驻解.

定理 1 设 $u^1, \dots, u^n \in A$ 形成异宿 n 环, 且 $u^1, \dots, u^n$ 和 $v^1, \dots, v^n$ 都是渐近稳定的, 则格点系统 $\{\mathcal{F}^n\}$ 有渐近稳定的同宿点.

定理 2 设 $u^1 \in A$ 是同宿点, u^1 与相应的 v^1 都是渐近稳定的. 则存在常数 $r > 0$, 使得对任意有限的指标集 $\{i\} \subset \mathbb{Z}$, 满足对不同的 $j', j'' \in \{i\}, |j' - j''| \geq r$, 都有

(i) 存在 $\mathcal{F}$ 的一个驻解 $u^* = u^*(\{i\})$, 使得

$$\begin{aligned} \prod_j u^* &\in \prod_j \mathcal{U}(u^1 \cup (\cup_{j' \in \{i\}} S_{j'} u^1)), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \prod_j u^* &\notin \prod_j \mathcal{U}(u^1 \cup (\cup_{j' \in \{i\} \setminus j} S_{j'} u^1)), \quad j' \in \{i\}, \end{aligned}$$

其中 $\prod_j$ 为到第 j 格点上的投影, $\mathcal{U}(\cdot)$ 为括弧内元素的某个邻域.

(ii) u^* 是渐近稳定的.

注 3 给定满足定理 2 条件的一个指标集 $\{i\} = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$. 不妨设同宿点 u^1 只有一个“峰”, 且“峰”出现在格点 $j=0$ 处. 由定理 2 可以构造一个新的驻解 u^* . 这个驻解 u^* 有 n 个“峰”, 并且 u^* 在格点 $j_k (k=1, 2, \dots, n)$ 处的形状与 u^1 在格点 $j=0$ 处的形状相似. 严格地说, u^* 在格点 j_k 处的坐标包含在 $S_{j_k} u^1$ 在格点 j_k 处坐标的一个小邻域里.

若定理 1 的条件满足, 则系统有一个渐近稳定的同宿点, 从而出现复杂的空间结构. 若把同宿点看成是单“峰”的驻解, 则由定理 2 可以构造出任意多个(有限)“峰”的驻解, 只要“峰”与“峰”之间的距离大于某个常数 $r > 0$. 参照时间混沌的概念, 称这时出现了空间混沌. 事实上, 这时变换群 $\{S_j\}$ 在构造出的驻解集上的作用可以和符号动力系统联系起来. 记 Λ_r 是按定理 2 构造出的驻解集, 记 $w = \{w_j\}, w_j \in \{0, 1\}, w \in \Sigma_r$ 当且仅当 $w_{j'} = 1, w_{j''} = 1$ 时必有 $j' \neq j'',$ 且 $|j' - j''| \geq r.$ Σ_r 赋以如下范数: $\|w' - w''\| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|j|}} |w'_j - w''_j|.$ Σ_r 上的

移位映射 σ_{j_0} 定义为 $(\sigma_{j_0} w)_j = w_{j+j_0}$. 这样符号动力系统 $\{\sigma_j\}$ 在 Σ_r 上的作用就完全刻画了空间移位变换 $\{S_j\}$ 在驻解集 Λ_r 上的动力学行为.

2 定理的证明

定理 1 的证 只证 $n=2$ 的情形, 因为当 $n>2$ 时, 可以用同样的方法构造异宿 $n-1$ 环, ..., 直至异宿 2 环. 证明分 3 步: (i) 利用压缩映象原理构造新的驻解 u^* . (ii) 证明 u^* 是同宿点. (iii) 证明 u^* 是渐近稳定的同宿点.

(i) 因为 u^1 是渐近稳定的, 由定义 2, 存在常数 $c_1>0$, $0<q_1<1$, $\rho_1>0$, 使得对 u^1 的半径为 ρ_1 的齐次邻域内的任意两点 u, v , 都有

$$\|\mathcal{F}^n u - \mathcal{F}^n v\| \leq c_1 q_1^n \|u - v\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

取定 $m_1>0$, 使得 $c_1 q_1^{m_1} = a < 1/6$, 则当 $m \geq m_1$ 时, $\|\mathcal{F}^m u - \mathcal{F}^m v\| \leq a \|u - v\|$, 即 $\mathcal{F}^m$ 在 u^1 的半径为 ρ_1 的齐次邻域内是压缩的, 且在该邻域内是正不变的. 事实上, $\mathcal{F}^m$ 在 u^1 的半径小于 ρ_1 的齐次邻域内都是压缩、正不变的. 由于 u^1, u^2, v^1 和 u^2 都是渐近稳定的, 可以取共同的 $m>0, \rho>0$, 使得 $\mathcal{F}^m, \mathcal{F}^{m-1}$ 在 u^1 (或 u^2 或 v^1 或 v^2) 的半径小于 ρ 的齐次邻域内是压缩的, 正不变的, 压缩常数 $a < 1/6$.

对 l^∞ 中的映射 $\mathcal{F}^m$, 可以写成

$$(\mathcal{F}^m u)_j = F^{(m)}(\{u_j\}^{ms}), \quad (2.1)$$

此时 $F^{(m)}$ 是 $(\mathbb{R}^P)^{2ms+1} \rightarrow \mathbb{R}^P$ 的映射. 由异宿环的定义:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} u_j^1 = a_2, \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} u_j^2 = a_2.$$

因此对上述 $\rho>0$, 存在 $j^*>0$, 使得当 $j>j^*$ 时, $|u_j^1 - a_2| < \rho/3$, 当 $j < -j^*$ 时, $|u_j^2 - a_2| < \rho/3$. 取 $j_0 \geq j^* + 2ms$. u^1 和 u^2 的半径为 $\rho/3$ 的齐次邻域分别记为 $\mathcal{U}^1$ 和 $\mathcal{U}^2$. 由 (1.3) 式知, $\mathcal{F}^m$ 在 $S_{j_0} \mathcal{U}^1$ 和 $S_{-j_0} \mathcal{U}^2$ 内是正不变的 (即 $\mathcal{F}^m(S_{j_0} \mathcal{U}^1) \subset S_{j_0} \mathcal{U}^1, \mathcal{F}^m(S_{-j_0} \mathcal{U}^2) \subset S_{-j_0} \mathcal{U}^2$) 且是压缩的, 压缩常数 $a < 1/6$. 取

$$V_i = \begin{cases} \prod_i (S_{j_0} \mathcal{U}^1), & i < -ms, \\ \prod_i (S_{j_0} \mathcal{U}^1) \cap \prod_i (S_{-j_0} \mathcal{U}^2), & |i| \leq ms, \\ \prod_i (S_{-j_0} \mathcal{U}^2), & i > ms, \end{cases}$$

其中 $\prod_i$ 表示在第 i 个格点上的投影, 此时显然有 $V_i \neq \emptyset, |i| \leq ms$. 这样可以构造出 l^∞ 中的一个开集 $\mathcal{U} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} V_i$. 以下证明 $\mathcal{F}^m \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, 且 $\mathcal{F}^m$ 在 $\mathcal{U}$ 内是压缩的. $\forall u \in \mathcal{U}, u = \{u_j\}$, 此时 $u_j \in V_j$. 当 $|j| > ms$ 时, 由于 $(\mathcal{F}^m u)_j$ 只与 u_j 邻近的 $2ms+1$ 个坐标有关, 再由 V_j 的构造, 利用 $\mathcal{F}^m$ 在 $S_{j_0} \mathcal{U}^1$ 和 $S_{-j_0} \mathcal{U}^2$ 上的不变性知 $(\mathcal{F}^m u)_j \in V_j$. 当 $|j| \leq ms$ 时 (不妨设 $-ms \leq j \leq 0$, 对 $0 \leq j \leq ms$ 的情形同样可证), $(\mathcal{F}^m u)_j \in \prod_j (S_{j_0} \mathcal{U}^1)$ 是显然的, 只要证明 $(\mathcal{F}^m u)_j \in \prod_j (S_{-j_0} \mathcal{U}^2)$. 注意到 $(\mathcal{F}^m u)_j$ 只与 $\{u_j\}^{ms}$ 有关, 找一个 $S_{-j_0} \mathcal{U}^2$ 中的点 $u' = \{u'_j\}$ 使得 $u'_i = u_i (-ms \leq i \leq j+ms)$, 从而

$$|F^{(m)}(\{u'_j\}^{ms}) - (S_{-j_0} u^2)_j| = |(\mathcal{F}^m u')_j - (\mathcal{F}^m (S_{-j_0} u^2))_j| \leq$$

$$\|\mathcal{F}^m \mathbf{u}' - \mathcal{F}^m(S_{-j_0} \mathbf{u}^2)\| \leq a \|\mathbf{u}' - S_{-j_0} \mathbf{u}^2\| \leq a\rho/3.$$

同样, 可以找到 v^2 的半径为 ρ 的齐次邻域中的两点 $\mathbf{u}'$ 和 $\mathbf{u}''$, 使它们在格点 $i (j - ms \leq i \leq j + ms)$ 上的坐标分别为 u'_i 和 u_i . 因此

$$\begin{aligned} & |F^{(m)}(\{u'_j\}^{ms}) - F^{(m)}(\{u_j\}^{ms})| \leq \|\mathcal{F}^m \mathbf{u}' - \mathcal{F}^m \mathbf{u}''\| \leq a\rho, \\ & |(\mathcal{F}^m \mathbf{u})_j - (S_{-j_0} \mathbf{u}^2)_j| = |F^{(m)}(\{u_j\}^{ms}) - (S_{-j_0} \mathbf{u}^2)_j| \leq \\ & |F^{(m)}(\{u_j\}^{ms}) - F^{(m)}(\{u'_j\}^{ms})| + |F^{(m)}(\{u'_j\}^{ms}) - (S_{-j_0} \mathbf{u}^2)_j| \leq \\ & a\left(\frac{\rho}{3} + \rho\right) \leq \frac{1}{6}\left(\frac{\rho}{3} + \rho\right) \leq \frac{\rho}{3}. \end{aligned}$$

即 $(\mathcal{F}^m \mathbf{u})_j \in \Pi_j(S_{-j_0} \mathcal{U}^2)$, 故 $\mathcal{F}^m \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. 同样可证 $\mathcal{F}^{m-1} \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. 下证 $\mathcal{F}^m$ 在 $\mathcal{U}$ 内是压缩的.

设 $\mathbf{u}' = \{u'_j\}$, $\mathbf{u}'' = \{u''_j\} \in \mathcal{U}$. 对任意 $i \in \mathbb{Z}$ (不妨设 $i \leq 0$, 对 $i > 0$ 同样可证), 取 $S_{j_0} \mathbf{u}^1$ 的半径为 ρ 的齐次邻域中的两点 $\mathbf{v}' = \{v'_j\}$, $\mathbf{v}'' = \{v''_j\}$, 使得

$$\begin{cases} v'_j = u'_j, & i - ms \leq j \leq i + ms, \\ v'_j = (S_{j_0} \mathbf{u}^1)_j, & \text{其他 } j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v''_j = u''_j, & i - ms \leq j \leq i + ms, \\ v''_j = (S_{j_0} \mathbf{u}^1)_j, & \text{其他 } j, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}^m \mathbf{u}')_i - (\mathcal{F}^m \mathbf{u}'')_i| &= |F^{(m)}(\{u'_i\}^{ms}) - F^{(m)}(\{u''_i\}^{ms})| \leq \\ & \|\mathcal{F}^m \mathbf{v}' - \mathcal{F}^m \mathbf{v}''\| \leq a \|\mathbf{v}' - \mathbf{v}''\|, \forall i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

从而 $\|\mathcal{F}^m \mathbf{u}' - \mathcal{F}^m \mathbf{u}''\| \leq a \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}''\|$. 因此 $\mathcal{F}^m$ 在 $\mathcal{U}$ 内是压缩的.

由压缩映射原理, 存在唯一的一点 $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}$, 使得 $\mathcal{F}^m \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*$. 注意到 $\mathcal{F}^{m-1} \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}$ 且满足 $\mathcal{F}^m(\mathcal{F}^{m-1} \mathbf{u}^*) = \mathcal{F}^{m-1}(\mathcal{F}^m \mathbf{u}^*) = \mathcal{F}^{m-1} \mathbf{u}^*$, 即 $\mathcal{F}^{m-1} \mathbf{u}^*$ 也是 $\mathcal{F}^m$ 在 $\mathcal{U}$ 内的不动点, 由唯一性知 $\mathcal{F}^{m-1} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*$. 因此 $\mathcal{F} \mathbf{u}^* = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{m-1} \mathbf{u}^*) = \mathcal{F}^m \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*$, $\mathbf{u}^*$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个驻解.

(ii) 记 $\mathbf{u}^* = \{u_j^*\}$. 由异宿环定义, $\lim_{j \rightarrow +\infty} u_j^2 = a_1$, 当 j 充分大时有 $|u_j^2 - a_1| < 2\rho/3$. 而由 $\mathcal{U}$ 的构造, 当 j 充分大时有 $|u_j^* - u_j^2| < \rho/3$. 因此当 j 充分大后, $|u_j^* - a_1| < \rho$. 下证 $\lim_{j \rightarrow +\infty} u_j^* = a_1$.

若不然, $\exists \epsilon_0 > 0, \exists j_n \rightarrow +\infty$ 使得 $|u_{j_n}^* - a_1| > \epsilon_0, n = 1, 2, \dots$. 取正整数 k 使得 $a^k \rho < \epsilon_0$, 再取充分大的 j_n , 使得当 $j_n - kms \leq i \leq j_n + kms$ 时有 $|u_i^* - a_1| < \rho$. 取 $\mathbb{I}^\infty$ 中的元 $\mathbf{u}'$, 使得 $\mathbf{u}'$ 在第 i 个格点上的坐标为 $u_i^*(j_n - kms \leq i \leq j_n + kms)$, 其余格点上的坐标为 a_1 . 于是

$$\begin{aligned} |u_{j_n}^* - a_1| &= |(\mathcal{F}^{mk} \mathbf{u}')_{j_n} - a_1| = |F^{(mk)}(\{u_{j_n}\}^{mks}) - a_1| \leq \\ & \|\mathcal{F}^{mk} \mathbf{u}' - \mathbf{v}^1\| \leq a^k \|\mathbf{u}' - \mathbf{v}^1\| \leq a^k \rho < \epsilon_0, \end{aligned}$$

矛盾. 因此有 $\lim_{j \rightarrow +\infty} u_j^* = a_1$. 同样可证 $\lim_{j \rightarrow -\infty} u_j^* = a_1$, 从而 $\mathbf{u}^*$ 是一个同宿点.

(iii) 现已证得存在 $\mathbf{u}^*$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$, 当 $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in \mathcal{U}$ 时, $\|\mathcal{F}^m \mathbf{u}' - \mathcal{F}^m \mathbf{u}''\| < a \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}''\|$. 对任意 $n, \exists t \in \mathbb{N}, n = tm + r, 0 \leq r \leq m$. 这样,

$$\|\mathcal{F}^n \mathbf{u}' - \mathcal{F}^n \mathbf{u}''\| = \|\mathcal{F}^{mt}(\mathcal{F}^r \mathbf{u}') - \mathcal{F}^{mt}(\mathcal{F}^r \mathbf{u}'')\| \leq a^t \|\mathcal{F}^r \mathbf{u}' - \mathcal{F}^r \mathbf{u}''\| \leq ca^t \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}''\|.$$

从而 $\exists \rho' > 0, c_1 = c/a > 0, q = \sqrt[n]{a} < 1$, 使得对 $\forall u', u'' \in I^\infty$ 且 $\|u' - u^*\|, \|u'' - u^*\| < \rho'$,

$$\|\mathcal{F}^n u' - \mathcal{F}^n u''\| \leq c_1 q^n \|u' - u''\|,$$

因此 u^* 是渐近稳定的.

综合 (i)~(iii), 定理 1 得证.

定理 2 的证 与定理 1 的证明完全类似. 现以 $\{i\} = \{i_1, i_2\}$ 为例说明证明的框架. 不妨设同宿点 u^1 的“峰”出现在格点 $j=0$ 处. $\mathcal{F}^m$ 在 u^1 的一个齐次邻域 $\mathcal{U}^1$ 内是压缩的. 移动 u^1 的“峰”到格点 i_1 和 i_2 处, 得到两个驻解 $S_{-i_1} u^1$ 和 $S_{-i_2} u^1$. 按定理 1 的方法把 $S_{-i_1} \mathcal{U}^1$ 和 $S_{-i_2} \mathcal{U}^1$ 接起来得到一个新的邻域 $\mathcal{U}$, 可证明 $\mathcal{F}^m$ 在 $\mathcal{U}$ 内是压缩映象, 从而得到一个新的驻解 u^* , 在格点 i_1 和 i_2 处的形状与 u^1 在 $j=0$ 处的形状基本一致. u^* 的渐近稳定性与定理 1 一样证明.

3 应用

记 $u = \{u_j\}$. 在 I^∞ 中考虑 Sine-格点系统:

$$u_j(n+1) = u_j(n) + \alpha \sin u_j(n) + \beta(u_{j-1}(n) - 2u_j(n) + u_{j+1}(n)), \quad (3.1)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$. 设 (3.1) 对应的 I^∞ 中的映射为 $\mathcal{F}$.

为找系统的驻解, 令 $\alpha \sin u_j + \beta(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = 0$, 若令 $u_j = v_j$, 则有

$$v_j = u_{j+1} = -\frac{\alpha}{\beta} \sin u_j + 2u_j - u_{j-1} = -\frac{\alpha}{\beta} \sin v_{j-1} + 2v_{j-1} - u_{j-1},$$

改变一下记号, 得到平面上的一个交换

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -\frac{\alpha}{\beta} \sin y + 2y - x \end{pmatrix}.$$

给定平面上一个点 (x_0, y_0) , 由 T 迭代可得到一点列

$$\cdots, (x_{-n}, y_{-n}), \cdots, (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n), \cdots.$$

如果 $\sup_{i \in \mathbb{Z}} |x_i| < +\infty$, 则 $u = (\cdots, x_{-n}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 就是 (3.1) 式的一个驻解. 下面通过讨论平面映射 T 来探讨 (3.1) 式驻解的性质.

容易看出, 只要 x 满足 $\sin x = 0$, (x, x) 就是 T 的不动点, $u = \{u_j\} (u_j = x, j \in \mathbb{Z})$ 就是 (3.1) 式的驻解. 考虑 T 的一个不动点 $(-\pi, -\pi)$. 该点处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 + \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix} = A,$$

特征方程为 $\lambda^2 - \left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\lambda + 1 = 0$, 显然该方程有两正根 $\lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$. 因此 $P = (-\pi, -\pi)$ 是 T 的鞍点. 同理 $Q = (\pi, \pi)$ 也是 T 的鞍点. 它们都有稳定流形和不稳定流形.

记平面上关于直线 $y = -x$ 的对称映射为 R , 关于直线 $y = x$ 的对称映射为 R' , 即 $R(x, y) = (-y, -x), R'(x, y) = (y, x)$. 容易验证:

$$T \circ R \circ T = R, T \circ R' \circ T = R'.$$

因此, 如记 $W^u(P)$ 为 P 的不稳定流形, 则 $R(W^u(P))$ 为 Q 的稳定流形, $R'(W^u(P))$ 为 P 的稳定流形. 只要证明 $W^u(P)$ 与直线 $y = -x$ 交不空, 说明 $W^u(P) \cap W^s(Q) \neq \emptyset, W^s(P) \cap W^u(Q) \neq \emptyset$, 即映射 T 有异宿环, 从而系统 (3.1) 也有按定义 4 的异宿环.

考察 $W^u(P)$. 记 P 点处对应于特征值 $\lambda_2 > 1$ 的特征方向为 (ξ_0, η_0) , 即

$$A \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\eta_0}{\xi_0} = \lambda_2 > 1.$$

记 $E = (-\pi, -\pi/2)$, $G = (-\pi/2, -\pi/2)$, 下面证明 $W^u(P)$ 从三角形 PEG 中穿出时只能从线段 EG 透出. 设向量 (ξ, η) 满足 $1 < \eta/\xi < +\infty$, 当 $-\pi < y_0 < -\pi/2$ 时

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \frac{\alpha}{\beta} \cos y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ -\xi + \left(2 - \frac{\alpha}{\beta} \cos y_0\right) \eta \end{pmatrix},$$

$$\frac{\left(2 - \frac{\alpha}{\beta} \cos y_0\right) \eta - \xi}{\eta} \geq 2 - \frac{\xi}{\eta} > 1,$$

从而 $W^u(P)$ 只能从线段 EG 上穿出. 在 T 作用下, EG 变为线段 $E'G'$, $E' = (-\pi/2, \alpha/\beta)$, $G' = (-\pi/2, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\pi}{2})$. 当 $\alpha/\beta > \pi$ 时, 线段 $E'G'$ 在直线 $y = -x$ 的上方, 因此 $W^u(P)$ 必定与直线 $y = -x$ 相交, 由前面的讨论, 系统(3.1)有异宿环.

设 $W^u(P)$ 与直线 $y = -x$ 相交于 $H(x_0, y_0)$, H 关于直线 $y = x$ 的对称点记为 $H' = (y_0, x_0)$, 对 H , 由 T 的迭代得到平面上一个点列

$$\cdots, (x_{-n}, y_{-n}), \cdots, (x_0, y_0), \cdots, (x_n, y_n), \cdots,$$

且当 $n \rightarrow -\infty$ 时 $x_n \rightarrow -\pi$, $y_n \rightarrow -\pi$. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $x_n \rightarrow \pi$, $y_n \rightarrow \pi$. 而 $u^1 = \{u_j^1\}$ ($u_j^1 = y_j$, $j \in \mathbb{Z}$) 为(3.1)式的一个驻解, 满足 $u_j^1 \rightarrow -\pi$ ($j \rightarrow -\infty$), $u_j^1 \rightarrow \pi$ ($j \rightarrow +\infty$). 同样, 由 H' 可得(3.1)式的另一个驻解 $u^2 = \{u_j^2\}$, 满足 $u_j^2 \rightarrow \pi$ ($j \rightarrow -\infty$), $u_j^2 \rightarrow -\pi$ ($j \rightarrow +\infty$). 按定义4, 驻解 u^1 和 u^2 形成异宿环. 记 $v^1 = \{v_j^1\}$, $v_j^1 = -\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, $v^2 = \{v_j^2\}$, $v_j^2 = \pi$, $j \in \mathbb{Z}$. 容易证明, 当 $4\beta + \alpha < 1$ 且 $\alpha/\beta > \pi$ 时, $D\mathcal{F}(u^1)$, $D\mathcal{F}(u^2)$, $D\mathcal{F}(v^1)$ 和 $D\mathcal{F}(v^2)$ 的谱半径小于1, 从而 u^1 , u^2 , v^1 , v^2 都是渐近稳定的.

通过上面的讨论, 得到如下结论:

定理3 当 $\alpha/\beta > \pi$ 且 $\alpha + 4\beta < 1$ 时, 系统(3.1)存在异宿环 u^1 和 u^2 . u^1 , u^2 及相应的驻解 v^1 和 v^2 都是渐近稳定的, 从而系统(3.1)有渐近稳定的同宿点.

由定理2, 可构造出(3.1)式的驻解集 A' , 使移位变换群 $\{S_j\}$ 在 A' 上的作用是混沌的.

参 考 文 献

- 1 Kaneko K. Theory and Applications of Coupled Map Lattices. Chichester: J Wiley, 1993
- 2 Bunimovich L A, Sinai Ya G. Space time chaos in coupled map lattices. Nonlinearity, 1988, 1:491~516
- 3 Afraimovich V S, Pesin Ya. Travelling waves in lattice models of multi-dimensional and multi-component media: I General hyperbolic properties. Nonlinearity, 1993, 6:429~455
- 4 Chow S N, Shen W. Dynamics in a discrete Nagumo equation——Spatial chaos. SIAM J Appl Math, 1995, 55(6):1 764~1 781
- 5 Afraimovich V S, Chow S N. Topological spatial chaos and homoclinic points of $\mathbb{Z}^d$ -action in lattice dynamical systems. Japan J Indust Appl Math, 1995, 12:1~17
- 6 严寅, 钱敏. 横截环及在 Hénon 映象中的应用. 科学通报, 1985, 30(13):961~965