中国科学: 数学　2015 年　第 45 卷　第 5 期: 539～558
www.scichina.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布

韩东, 张登*

上海交通大学数学系, 上海 200240
E-mail: donghan@sjtu.edu.cn, zhangdeng@amss.ac.cn

收稿日期: 2015-01-30; 接受日期: 2015-03-25; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171216) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB808000 和 2015CB856004) 资助项目

摘要　本文主要研究随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布. 在严平稳遍历的情形下, 本文证明随机生灭 Q 矩阵的经验谱分布弱收敛于某个非随机概率分布. 进一步, 在非严平稳遍历情形下, 本文研究了比 Beta-Hermite 系综更广的一类随机矩阵模型, 建立了与之相应的随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布存在性, 并且证明它的极限谱分布具有卷积表达式. 特别地, Beta-Hermite 系综所对应的随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布是经典半圆率与 Dirac 测度 δ_{-2} 的卷积.

关键词　随机生灭 Q 矩阵　极限谱分布　Beta-Hermite 系综

MSC (2010) 主题分类　60B20, 60F05, 60G10

1　引言和主要结果

本文主要考虑具有以下三对角结构的随机生灭 Q 矩阵模型:

$$Q_n = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & b_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $n \geqslant 1$, $\{a_i, b_i\}_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ 为一族正的随机变量, $a_0 = 0$, $0 < a_i, b_i < \infty$, 且 $d_i = -(a_{i-1} + b_i) < 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

本文的出发点主要基于下列两个方面:

一方面, 在确定情形下, 三对角矩阵 (1.1) 是经典的生灭 Q 矩阵. 生灭 Q 矩阵所生成的生灭过程是 Markov 过程中最基本的一个模型, 侯振挺教授在专著 [1] 中系统总结了生灭过程的研究成果. 另外, 当 $a_i = b_i > 0$, $d_i \in \mathbb{R}$, 这类三对角矩阵在文献中称为 Jacobi 矩阵, 与正交多项式有密切的联系 (参见文献 [2]).

英文引用格式: Han D, Zhang D. Limiting spectral distribution of random birth-death Q matrices (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 539–558, doi: 10.1360/N012015-00065

另一方面, 在随机情形下, 随机生灭 Q 矩阵 (1.1) 是随机环境中随机游动的基本模型 (参见文献 [3]). 而当 $\{d_n\}$ 是独立的随机变量时 (此时不是随机生灭 Q 矩阵), 这类随机矩阵模型在量子物理和随机矩阵理论中具有广泛的应用和研究. 例如, 它们可以作为随机 Schrödinger 算子的一维离散模型, 如对称情形下的 Anderson 模型 ($a_i = b_i$, 且 $\{a_i, d_i\}$ 独立同分布) 以及非对称情形下的 Hatano-Nelson 模型 ($d_j \in \mathbb{R}, a_j/b_j > 0$), 相关的文献可参见文献 [4,5]; 再如, 在对称 ($a_n = b_n$) 情形下, 当 $\{a_n, d_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立、a_n 服从分布 $\chi_{n\beta}/\sqrt{\beta}$ ($\chi_{n\beta}$ 是参数为 $n\beta$ 的卡方分布) 且 d_n 服从正态分布 $N(0, 2/\beta)$ 时, 这类三对角矩阵 (1.1) 在随机矩阵文献中称为 Beta-Hermite 系综. 它们最早由 Dumitriu 和 Edelman [6] 提出, 并且特征值的联合分布具有下面明确的表达式:

$$f_\beta(\lambda) = \frac{1}{Z_{n\beta}} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \exp\bigg(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \bigg), \tag{1.2}$$

其中 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 是 Q_n 的特征值, $Z_{n\beta}$ 为规范化常数. 特别地, 当 $\beta = 1, 2, 4$ 时, (1.2) 分别对应了经典的 Gauss 正交系综 (GOE)、Gauss 酉系综 (GUE) 和 Gauss 辛系综 (GSE) 等经典系综.

进一步, 随机矩阵的极限谱分布不仅具有很强的物理和统计背景 (参见文献 [2,4,7]), 而且紧密联系着许多重要的特征值函数的渐近行为, 因此在文献中被广泛研究. 例如, 关于 Beta-Hermite 系综的极限谱分布, Dumitriu 和 Edelma [8] 建立了整体半圆率; 鲍志刚和苏中根[9] 证明了局部半圆率. 进一步, Popescu [10] 研究了比 Beta-Hermite 系综更广的一类三对角随机矩阵模型并刻画了相应的极限谱分布, 该项工作随后由 Bose 等人[11] 推广到一般的带状随机矩阵 (带长固定). 此外, 关于 Beta 不变系综的动力学模型 (广义 Dyson Brown 运动) 及其极限谱分布的研究可参见李向东等人的最新工作 (参见文献 [12]).

基于上述生灭 Q 矩阵、三对角随机矩阵以及极限谱分布在应用和理论上的重要意义, 我们在本文中主要研究随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布. 与上述各类经典的矩阵模型所不同的是, 随机生灭 Q 矩阵的对角元素与非对角元素有很强的相依性. 文献上, 关于对称随机 Q 矩阵 (非对角元均独立同分布) 的极限谱分布存在性问题最早由 Bai [13] 在对称 Wigner 矩阵的基础上提出. 后来 Bryc 等人[14] 应用经典的矩方法证明对称随机 Q 矩阵的极限谱分布是经典半圆率和标准正态分布的自由卷积. 此项工作继而由 Bordenave 等人[15] 推广到非对称情形, 在 Tao 和 Vu [16] 关于非对称 Wigner 矩阵圆率工作的基础上, 他们给出了非对称随机 Q 矩阵的极限谱分布是圆率和标准正态分布的自由卷积.

与上述工作不同的是, 本文所考虑的随机生灭 Q 矩阵 (1.1) 具有三对角结构, 不要求非对角元具有对称性或独立同分布. 在严平稳 (严平稳是指过程的有限维分布随时间平移不变) 和遍历的条件下, 我们证明了它的极限谱分布的存在性. 事实上, 这类随机矩阵的经验谱分布弱收敛于非随机的概率测度 (见定理 1). 而在不具有严平稳遍历的情形下, 我们考虑了比 Beta-Hermite 系综更广的一类随机矩阵模型, 建立了与之相应的随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布存在性, 并进一步证明了极限谱分布可表达为两个测度的卷积, 且其中一个测度是集中在单点上的 Dirac 测度. 特别地, 与 Beta-Hermite 系综对应的随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布是经典半圆率和 Dirac 测度 δ_{-2} 的卷积.

叙述主要结果之前, 我们先引进一些记号. 设 $\{\lambda_i(Q_n)\}_{i=1}^n$ 为矩阵 Q_n(1.1) 的全体特征值, μ_{Q_n} 为 Q_n 的经验谱测度, 即

$$\mu_{Q_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(Q_n)},$$

其中 $\delta_{\lambda_i(Q_n)}$ 表示集中在特征值 $\lambda_i(Q_n)$ 上的 Dirac 测度. $\mathscr{P}(\mathbb{R}^-)$ 记为 $\mathbb{R}^-$ 上概率测度全体, $\mathbb{R}^-$ 表示非正实轴, 且对 $\forall \mu, \nu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^-)$, $\mu \xrightarrow{w} \nu$ 表示测度 μ 弱收敛于 ν. 本文的主要结果陈述如下.

定理 1 设两个正的随机变量序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 分别是二阶矩有限的严平稳遍历过程, 而且两个序列之间相互独立或者 $a_n = b_n$ (对称), $\forall n \in \mathbb{N}$, 则存在非随机 $\mu_Q \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^-)$ 使得 $\mathbb{P}-$a.s.,

$$\mu_{Q_n} \xrightarrow{w} \mu_Q, \quad n \to \infty.$$

下面若无特殊说明, 我们均规定 a_n 和 b_n 为正的随机变量, 即 $0 < a_n, b_n < \infty$, $\forall n \geqslant 1$.

作为上述定理的直接应用, 当 (i) $\{a_n, b_n\}_{n\geqslant 1}$ 独立同分布且二阶矩有限; 或者 (ii) $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 与 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立, 且它们分别是二阶矩有限的严平稳遍历 Markov 链, 则随机生灭 Q 矩阵 (1.1) 的极限谱分布存在且非随机.

进一步, 在非严平稳遍历的情形下, 我们亦有下述结果.

定理 2 设正的随机变量 $\{a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 之间相互独立, 或者 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ (对称) 且 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 之间相互独立. 给定 $\alpha > 0$, $\forall i \geqslant 1$, 记 $a_i^{(n)} := n^{-\alpha} a_i$, $b_i^{(n)} := n^{-\alpha} b_i$ 及 $Q_i^{(n)} := n^{-\alpha} Q_i$.

(i) 若存在 $C_0 > 0$, $\forall C \geqslant C_0$, $\forall k \geqslant 1$, 存在 $m_{1,k}(C)$ 和 $m_{2,k}(C)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(a_n^{(n)})^k I_{[a_n^{(n)} > C]} = m_{1,k}(C), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(b_n^{(n)})^k I_{[b_n^{(n)} > C]} = m_{2,k}(C), \tag{1.3}$$

则存在非随机 $\mu_Q \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^-)$ 使得 $\mathbb{P}-$a.s.,

$$\mu_{Q_n^{(n)}} \xrightarrow{w} \mu_Q, \quad n \to \infty; \tag{1.4}$$

(ii) 若存在常数 a 和 b 使得 $\forall k \geqslant 1$, 当 $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}(a_n^{(n)})^k \to a^k, \quad \mathbb{E}(b_n^{(n)})^k \to b^k, \tag{1.5}$$

则存在非随机 $\mu_Q \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^-)$ 满足 (1.4), 并有

$$\mu_Q = \mu_\alpha * \delta_{-c}, \tag{1.6}$$

其中 μ_α 是 $n^{-\alpha}(Q_n - \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n))$ 的极限谱分布, 且 $c = a + b > 0$.

值得一提的是, 定理 2 的条件包含了经典 Beta-Hermite 系综所对应的随机生灭 Q 矩阵, 特别地, 它们的极限谱分布是经典半圆率和 Dirac 测度 δ_{-2} 的卷积.

本文的结构具体安排如下. 定理 1 的证明主要在第 2 节给出. 我们首先利用生灭 Q 矩阵的可配称性, 将非对称矩阵 Q_n 转化为对称矩阵 S_n 并保持谱不变; 然后借助经典的截断方法, 将定理 1 的证明转化为矩阵元素一致有界的情形; 继而, 运用矩方法获得极限谱分布的存在性. 与文献 [14] 所采用的矩方法不同的是, 这里给出的证明并未涉及复杂的计数问题. 第 3 节则主要包括了定理 2 的证明. 其中论断 (i) 的证明主要基于定理 1 以及矩收敛条件 (1.3); 而论断 (ii) 的证明则关键依赖于矩比较引理 (见引理 3), 将随机生灭 Q 矩阵 (1.1) 中具有强相依性的对角元素分别替换为常数 c, 以此入手来获得 μ_Q 的卷积形式. 最后, 定理证明后面的注说明了, 文中关于极限谱分布存在性的证明方法同时也适用于许多经典的三对角随机矩阵模型.

下面符号说明. 任给定 $n \times n$ 矩阵 M, $M(ij)$ 表示 M 中第 i 行第 j 列元素, $\mathrm{Tr}M$ 为矩阵 M 的迹, $\mathrm{Tr}M = \sum_{i=1}^n M(ii)$, μ_M 表示 M 的特征值所对应的经验谱测度, 即

$$\mu_M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(M)},$$

其中 $\{\lambda_i(M)\}_{i=1}^n$ 是 M 的特征值, $\mathrm{supp}(\mu_M)$ 表示测度 μ_M 的支集, 且对任给定 $\alpha > 0$, $M^{(n)}$ 表示经 $n^{-\alpha}$ 约化后的矩阵 $n^{-\alpha}M$. 记 $\mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$ 为对角矩阵, 其中对角元素依次为 $c_1, \dots, c_n$. 给定实数 x, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 再记 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ $(\mathscr{P}(\mathbb{R}^-))$ 为 $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^-)$ 上概率测度全体. $\forall X \in L^p(\mathbb{P})$, $p \geqslant 1$, $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}$ 为标准的 L^p 范数. $\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2$ 则表示向量 v 的 Euclid 长度, 即 $\|v\|_2 = (\sum_{i=1}^n v_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

2 定理 1 的证明

我们先引入下面引理, 利用生灭 Q 矩阵的可配称性将 (1.1) 转化为对称矩阵.

引理 1 设 $\pi_i = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{b_k}{a_k}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, $\pi_1 = 1$. 令 $S_n(ij) = \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_j}} Q_n(ij)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 则 S_n 是对称矩阵, S_n 和 Q_n 的特征值相同且均非正. 特别地,

$$\mu_{Q_n} = \mu_{S_n} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^-). \tag{2.1}$$

证明 关于 S_n 的对称性, 由一些简单的代数运算易得

$$\pi_i Q_n(ij) = \pi_j Q_n(ji), \quad j = i \pm 1. \tag{2.2}$$

于是,

$$S_n(ij) = \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_j}} Q_n(ij) = \frac{\pi_i Q_n(ij)}{\sqrt{\pi_i \pi_j}} = \frac{\pi_j Q_n(ji)}{\sqrt{\pi_i \pi_j}} = S_n(ji).$$

另一方面, 注意到,

$$S_n = \Lambda\ Q_n\ \Lambda^{-1}, \tag{2.3}$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(1, \sqrt{\pi_2}, \dots, \sqrt{\pi_n})$, 可见 Q_n 与对称矩阵 S_n 有相同的实特征值. 又由于生灭 Q 矩阵的特征值小于等于 0 (参见文献 [17, 第 2 页]), 由此可得引理. □

引理 1 说明了有关 Q_n 特征值的论断均等价于对称矩阵 S_n 的相关论断. 此外, 由 S_n 的定义, 有

$$S_n(i, i+1) = \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_{i+1}}} Q_n(i, i+1) = \sqrt{a_i b_i},$$

即

$$S_n = \begin{pmatrix} d_1 & \sqrt{a_1 b_1} & & & & \\ \sqrt{a_1 b_1} & d_2 & \sqrt{a_2 b_2} & & & \\ & \sqrt{a_2 b_2} & d_3 & \sqrt{a_3 b_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{a_{n-2} b_{n-2}} & d_{n-1} & \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \\ & & & & \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} & d_n \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

下面将给出的截断性引理 2 说明, 在二阶矩有限的条件下, 定理 1 的证明可转化为矩阵元素一致有界的情形. 为简便起见, 引入记号 $\forall C > 0$, $a_n^C := a_n I_{[a_n \leqslant C]}$, $b_n^C := b_n I_{[b_n \leqslant C]}$, 并令 Q_n^C 和 S_n^C 分别

为 (1.1) 和 (2.4) 中将 a_i, b_i 换为 a_i^C, b_i^C 后所形成的随机矩阵. 令 $d(\cdot,\cdot):\mathscr{P}(\mathbb{R})\times\mathscr{P}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 为 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 上的 Lévy 距离, 熟知 $(\mathscr{P}(\mathbb{R}),d)$ 是一个完备的度量空间 (参见文献 [7]), 并且拓扑等价于测度弱收敛.

引理 2　在定理 1 的条件下, 若存在 $C_0>0$, $\forall C\geqslant C_0$, 存在非随机 $\mu_{Q^C}\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 满足 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\lim_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n^C},\mu_{Q^C})=0, \tag{2.5}$$

则存在非随机 $\mu_Q\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 使得 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\lim_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_Q)=0. \tag{2.6}$$

证明　下面主要给出非对称情形的证明, 对称情形 $(a_n=b_n)$ 的证明类似. 由引理 1 及扰动不等式 (参见文献 [7, 推论 A.41]) 可得, $\forall C\geqslant C_0$,

$$\begin{aligned}
d^3(\mu_{Q_n},\mu_{Q_n^C}) &= d^3(\mu_{S_n},\mu_{S_n^C})\leqslant \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_n-S_n^C)^2\\
&=\frac{1}{n}\left[2\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i(1-I_{[a_i\leqslant C]}I_{[b_i\leqslant C]})^2+\sum_{i=1}^{n-1}(a_iI_{[a_i>C]}+b_iI_{[a_i>C]})^2\right]\\
&\leqslant \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n-1}[a_ib_i(I_{[a_i>C]}I_{[b_i>C]}+I_{[a_i>C]}I_{[b_i\leqslant C]}+I_{[a_i\leqslant C]}I_{[b_i>C]})\\
&\quad+(a_i^2I_{[a_i>C]}+b_i^2I_{[b_i>C]})].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

于是, 由独立性和严平稳遍历条件可知, $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_n^C})=0. \tag{2.8}$$

考虑到 $\forall n,m\geqslant 1$,

$$d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_m})\leqslant d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_n^C})+d(\mu_{Q_n^C},\mu_{Q_m^C})+d(\mu_{Q_m^C},\mu_{Q_m}).$$

应用 (2.5) 得 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\limsup_{n,m\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_m})\leqslant 2\limsup_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_n^C}),\quad \forall C\geqslant C_0. \tag{2.9}$$

于是, 令 $C\to\infty$, 由上式和 (2.8) 得 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\limsup_{n,m\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_m})\leqslant 2\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_n^C})=0.$$

故 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$, $\{\mu_{Q_n}\}$ 是 $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 上的 Cauchy 列. 于是, 由 $(\mathscr{P}(\mathbb{R}),d)$ 的完备性, 存在 $\mu_Q\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$, 使得 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$, $\mu_{Q_n}\xrightarrow{w}\mu_Q$. 再由 (2.5) 和 (2.8) 得

$$\lim_{C\to\infty} d(\mu_Q,\mu_{Q^C})=\lim_{C\to\infty}\lim_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n},\mu_{Q_n^C})=0,$$

从而, 由 $\{\mu_{Q^C}\}$ 的非随机性知 μ_Q 亦非随机. 引理 2 证毕. □

引理 2 说明定理 1 可归结为截断后随机矩阵 Q_n^C 的极限谱分布存在性. 简便起见, 分别记 a_n^C, b_n^C 和 Q_n^C 为 a_n, b_n 和 Q_n, 于是在下面的论证中, $\{a_n,b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 n 一致有界.

定理 1 的证明 我们主要给出非对称情形 ($\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 相互独立) 的证明. 对称情形 ($a_n = b_n$) 的论证类似且更简单些. 证明主要分为以下三步:

(I) $\mathrm{supp}(\mu_{Q_n})$ 的一致有界性;

(II) $\forall\, k \geqslant 1$, $\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k$ 的极限存在;

(III) $\forall\, k \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\mathrm{Tr}Q_n^k - \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k) = 0$, $\mathbb{P}-\mathrm{a.s.}$

其中在第 (II) 步中, 我们利用了矩阵 (1.1) 的三对角结构来得到矩的类似次可加性的性质, 类似的论证思路也将在后面定理 2 的证明中用到.

(I) $\mathrm{supp}(\mu_{Q_n})$ 的一致有界性.

考虑到 Q_n 的特征值小于等于 0, 我们只需估计 $|\lambda_{\min}(Q_n)|$, 等价地, $\lambda_{\max}(-Q_n)$. 由 $\{a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 n 的一致上界 C 以及 $\lambda_{\max}(-Q_n)$ 的定义, 得

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\max}(-Q_n) &= \max_{v\in\mathbb{R}^n:\|v\|_2=1} \|(-Q_n)v\|_2^2 \\
&= \max_{v\in\mathbb{R}^n:\|v\|_2=1} \sum_{i=1}^n |a_{i-1}v_{i-1} + d_iv_i + b_iv_{i+1}|^2 \\
&\leqslant 8 \max_{v\in\mathbb{R}^n:\|v\|_2=1} \sum_{i=1}^n (|a_{i-1}v_{i-1}|^2 + |d_iv_i|^2 + |b_iv_{i+1}|^2) \\
&\leqslant 24C^2 \max_{v\in\mathbb{R}^n:\|v\|_2=1} \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 24C^2 < \infty,
\end{aligned}
$$

第 (I) 步证毕.

结合 Weierstrass 定理可知, $\{\mu_{Q_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的弱收敛极限完全由各阶矩 $\{\mu_{Q_n}(x^k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限所确定, $k \geqslant 1$, 因此, 下面着重分析各阶矩的极限性.

(II) $\forall\, k \geqslant 1$, $\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k$ 的极限存在性.

下面的证明主要基于观察到, 三对角结构 (1.1) 可提供矩的类似次可加性的性质.

$\forall\, n, m \geqslant 1$, 由 (1.1) 的三对角结构, 我们有

$$
Q_{n+m} = \begin{pmatrix} Q_n & C_{n,m} \\ D_{m,n} & \widetilde{Q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_n & O \\ O & \widetilde{Q}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & C_{n,m} \\ D_{m,n} & O \end{pmatrix},
$$

其中

$$
Q_n = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & & \\ a_1 & d_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q}_m = \begin{pmatrix} d_{n+1} & b_{n+1} & & \\ a_{n+1} & d_{n+2} & b_{n+2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_{n+m-1} & d_{n+m} \end{pmatrix},
$$

且

$$
C_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

于是, $\forall\, k \geqslant 1$, 由

$$Q_{n+m}^k = \left[\begin{pmatrix} Q_n & O \\ O & \widetilde{Q}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & C_{n,m} \\ D_{m,n} & O \end{pmatrix}\right]^k = \begin{pmatrix} Q_n^k & O \\ O & \widetilde{Q}_m^k \end{pmatrix} + R_{m+n,m+n},$$

可得

$$\mathrm{Tr} Q_{m+n}^k = \mathrm{Tr} Q_n^k + \mathrm{Tr} \widetilde{Q}_m^k + \mathrm{Tr} R_{m+n,m+n}. \tag{2.10}$$

注意到, 由严平稳性 (截断之后, $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 仍是严平稳过程), $\mathbb{E}\mathrm{Tr}\widetilde{Q}_m^k = \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_m^k$, 从而有

$$\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_{m+n}^k = \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_n^k + \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_m^k + l(m,n,k), \tag{2.11}$$

其中 $l(m,n,k) := \mathbb{E}\mathrm{Tr} R_{m+n,m+n}$.

进一步, 由于 $C_{n,m}$ 和 $D_{m,n}$ 仅含有一个元素, 它们与 Q_n 和 $\widetilde{Q}_m$ 进行若干次相乘之后仍只有一个元素, 再由矩阵元素关于 n 的一致有界性, 便可推出

$$|l(n,m,k)| \leqslant C_k < \infty,$$

其中 C_k 是与 m 和 n 无关的常数.

现在, $\forall\, n \geqslant 1$, $1 \leqslant m < n$, 取 $n', r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < m$, 满足 $n = n'm + r$. 反复应用 (2.11) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_n^k &= \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_{n'm}^k + \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_r^k + l(n'm, r, k) \\ &= \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_{(n'-1)m}^k + \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_m^k + \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_r^k + l(n'm,r,k) + l((n'-1)m, m, k) \\ &\vdots \\ &= n'\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_m^k + \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_r^k + \sum_{j=1}^{n'-1} l((n'-j)m, m, k) + l(n'm, r, k) \\ &\leqslant n'\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_m^k + \mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_r^k + n'C_k. \end{aligned} \tag{2.12}$$

于是,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_n^k \leqslant \frac{n'}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_m^k + \frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_r^k + \frac{n'}{n} C_k.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_n^k \leqslant \frac{1}{m}\mathrm{Tr} Q_m^k + \frac{1}{m} C_k.$$

再令 $m \to \infty$ 便有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr} Q_n^k \leqslant \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{m}\mathrm{Tr} Q_m^k.$$

由此可知, $\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k$ 的极限存在. 第 (II) 步证毕.

(III) $\forall\, k \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\mathrm{Tr}Q_n^k - \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k) = 0$, $\mathbb{P}-$a.s.

我们先来定义下述一些量. $\forall\, 0 \leqslant l \leqslant [\frac{k}{2}]$, $1 \leqslant i \leqslant n-l$, 定义

$$Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} := M_{l,i}^{\vec{m}_l} \prod_{j=0}^{l} (Q_n(i+j,i+j))^{n_j}, \tag{2.13}$$

其中

$$M_{l,i}^{\vec{m}_l} := \prod_{j=0}^{l-1} (Q_n(i+j,i+j+1)Q_n(i+j+1,i+j))^{m_{j+1}} = \prod_{j=0}^{l-1} (a_{i+j}b_{i+j})^{m_{j+1}},$$

$\vec{m}_l = (m_1, m_2, \ldots, m_l)$, $\vec{n}_l = (n_0, n_1, \ldots, n_l)$, $m_j \geqslant 0$, $n_h \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $0 \leqslant h \leqslant l$, 并满足

$$2\sum_{j=1}^{l} m_j + \sum_{h=0}^{l} n_h = k,$$

且若 $l > 0$, 存在 $p : 1 \leqslant p \leqslant l$, 使得 $m_p = 0$, 则 $\forall\, j, h : p < j \leqslant l$, $p \leqslant h \leqslant l$, $m_j = 0$, $n_h = 0$.

上述各量的直观含义解释如下, 由矩展开和三对角结构知,

$$\mathrm{Tr} Q_n^k = \sum_{\pi \in \mathscr{P}_n} Q_\pi, \quad Q_\pi := \prod_{j=1}^{k} Q(\pi_j, \pi_{j+1}),$$

其中 $\mathscr{P}_n$ 表示回路的全体: $\mathscr{P}_n = \{\pi : (1,\ldots,k) \to (1,\ldots,n) : |\pi_j - \pi_{j+1}| \leqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant k, \pi_{k+1} = \pi_1\}$. $\{l, i, \vec{m}_l, \vec{n}_l\}$ 决定了 $\mathscr{P}_n$ 里的类别, $Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 是该类别中一个代表元, 其中起点为 i, l 表示自 i 出发向右走的距离 (回路的长度), $\vec{m}_l$ 对应非对角元所形成的回路 $\widehat{\pi}$, 其中 m_{j+1} 表示往返顶点 $i+j$ 和 $i+j+1$ 的次数, 对应的矩阵元素即为

$$(Q_n(i+j,i+j+1)Q_n(i+j+1,i+j))^{m_{j+1}} = (a_{i+j}b_{i+j})^{m_{j+1}},$$

因而 $M_{l,i}^{\vec{m}_l}$ 即是回路 $\widehat{\pi}$ 所对应的矩阵部分. 余下的, $\vec{n}_l$ 对应对角元的部分, n_j 即为从顶点 $i+j$ 一步回到自身的环的个数. 记 $C_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 为类别 $\{l, i, \vec{m}_l, \vec{n}_l\}$ 里的元素个数, 由于同一类别里的元素个数相同, $C_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} = C_{l,j}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$, $\forall\, i, j$, 可令 $C_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} = C_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$. 于是据上面的分析有

$$\mathrm{Tr} Q_n^k = \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{\vec{m}_l,\vec{n}_l} \sum_{i=1}^{n-l} C_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} = \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{\vec{m}_l,\vec{n}_l} C_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} U_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}, \tag{2.14}$$

其中

$$U_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l} := \sum_{i=1}^{n-l} Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$$

表示不同起点的代表元的总和.

以 $k=3$, $n=4$ 为例, 此时 $l=0$ 或 $l=1$. 类别 $\{l, \vec{m}_l, \vec{n}_l\}$ 分别为 $\{0,(0),(3)\}$, $\{1,(1),(1,0)\}$ 和 $\{1,(1),(0,1)\}$, 而每个类相应的元素个数 $C_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 分别是 1, 3 和 3. 它们对应的矩阵元素 $Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 分别是: 当 $1 \leqslant i \leqslant 3$, $(Q_4(ii))^3, (a_ib_i)Q_4(ii), (a_ib_i)Q_4(i+1,i+1)$; 当 $i=4$, $(Q_4(44))^3$. $U_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 即为 $\sum_{i=1}^{4}(Q_4(ii))^3$, $\sum_{i=1}^{3}(a_ib_i)Q_4(ii)$, $\sum_{i=1}^{3}(a_ib_i)Q_4(i+1,i+1)$. 于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} Q_4^3 = {} & (Q_4(11))^3 + 3(a_1b_1)Q_4(11) + 3(a_1b_1)Q_4(22) + (Q_4(22))^3 \\ & + 3(a_2b_2)Q_4(22) + 3(a_2b_2)Q_4(33) + (Q_4(33))^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+3(a_3b_3)Q_4(33)+3(a_3b_3)Q_4(44)+(Q_4(44))^3\\
=&U_0^{(0),(3)}+3U_1^{(1),(1,0)}+3U_1^{(1),(0,1)}.
\end{aligned}
$$

将 $Q_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 和 $U_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 中心化, 可定义

$$
\widetilde{Q}_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}-\mathbb{E}Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l},\quad \widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=U_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}-\mathbb{E}U_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}.
$$

于是,

$$
\mathrm{Tr}Q_n^k-\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k=\sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]}\sum_{\vec{m}_l,\vec{n}_l}C_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}. \tag{2.15}
$$

由于 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 相互独立且分别严平稳遍历, 可知 $\{\widetilde{Q}_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\}_{2\leqslant i\leqslant n-l-1}$ 也是严平稳遍历 (参见文献 [18, 定理 7.1.3]), 故而应用 Birkhoff 遍历性定理 (参见文献 [18, 定理 7.2.1]) 得

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=0,\quad \mathbb{P}-\mathrm{a.s.} \tag{2.16}
$$

代入 (2.15) 便有, $\forall\, k\geqslant 1$,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{Tr}Q_n^k-\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^k)=0,\quad \mathbb{P}-\mathrm{a.s.} \tag{2.17}
$$

下面为定理 2 的证明作准备, 我们在独立同分布的特殊情形下给出另一个简便证明 (无需 Birkhoff 遍历性定理). 为此, 我们将 $\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 分解为若干错开的无公共元素的随机变量之和. 注意到, 由 (1.1) 的三对角结构, 对角线元素 $Q_n(jj)$ 只依赖 $Q_n(j,j-1)$ 和 $Q_n(j,j+1)$. 因而, 当 $l=0$, $\widetilde{Q}_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=(\widetilde{Q}_n(ii))^k$, $\{\widetilde{Q}_{l,i+2j}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\}_{j\geqslant 0}$ 之间相互独立, $i=1,2$. 再考虑 $l\geqslant 1$ 的情形. $\forall\, i>2$, $Q_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 与之前的 $Q(j,j-1)$ 无关, $j<i$, 且与后面的 $Q(j,j\pm 1)$ 无关, $j>i+l+1$. 因此, 可选取 $L=l+2$, 则 $\forall\, j\neq h$, $Q_{l,jL+i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 与 $Q_{l,hL+i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 无公共元素. 再令 $N=[\frac{n-l-1}{L}]$, 则 $\frac{n-l-1}{L}-1<N\leqslant\frac{n-l-1}{L}$. 从而, 由 $\{a_n,b_n\}_{n\geqslant 1}$ 独立同分布可知, $\{Q_{l,jL+i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\}_{1\leqslant j\leqslant N-1}$ 也是独立同分布, 则可分解 $\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 如下, 当 $n-l-NL<L$,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=&\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}+\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+2}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}+\cdots+\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+(n-l-NL)}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\\
&+\sum_{j=0}^{N-1}\widetilde{Q}_{l,jL+(n-l-NL+1)}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}+\cdots+\sum_{j=0}^{N-1}\widetilde{Q}_{l,jL+L}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l},
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

类似地, 当 $n-l-NL=L$,

$$
\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}+\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+2}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}+\cdots+\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+L}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}. \tag{2.19}
$$

由以上分析, 我们可应用强大数定律取极限. 以 (2.18) 第一个求和式为例, 由于 $\{Q_{l,jL+1}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\}_{1\leqslant j\leqslant N-1}$ 之间独立同分布, 由强大数律得

$$
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=0,\quad \mathbb{P}-\mathrm{a.s.} \tag{2.20}
$$

另由 N 的定义, $0<\frac{N+1}{n}\leqslant\frac{2}{L}<\infty$, 从而,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}=\frac{N+1}{n}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}\right)\to 0,\quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

同理可分析 (2.18) 或 (2.19) 中其余的求和项. 注意到 L 固定, 于是有 (2.16) 成立, 进而 (2.17) 也成立. 第 (III) 步得证.

至此, 由第 (II) 和 (III) 步知, 存在非随机 m_k 使得 $\forall\, k\geqslant 1$, $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\mu_{Q_n}(x^k)=\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(Q_n)^k\to m_k,\quad n\to\infty. \tag{2.21}$$

又由第 (I) 步 $|\lambda_{\max}(-Q_n)|$ 的一致有界性,

$$|m_k|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}(Q_n)^k\right|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}|\lambda_{\max}(-Q_n)|^k\leqslant(24C^2)^k<\infty.$$

于是,

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_{2k}^{-\frac{1}{2k}}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{24C^2}=\infty,$$

$\{m_k\}_{k\geqslant 1}$ 满足 Carleman 条件. 从而, 由文献 [7, 引理 B.3和 B.1], 存在唯一非随机 $\mu_Q\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 满足

$$\mu_Q(x^k)=m_k,\quad k\geqslant 1,$$

且 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\mu_{Q_n}\xrightarrow{w}\mu_Q,\quad n\to\infty.$$

最终, 结合引理 2, 并注意到 Q_n 的特征值小于等于 0, 定理 1 得证. □

注 1 设三个随机变量序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{d_n\}$ (a_n 和 b_n 不必是正数) 分别是二阶矩有限的严平稳遍历过程, 且它们之间相互独立. 则类似定理 1 的论证可证明, 它们所形成的三对角随机矩阵的极限谱分布存在. 特别地, 对于一类特殊的 Anderson 模型, $a_n=b_n=-1$, 且 d_n 独立同分布并二阶矩有限, 它的极限谱分布存在.

作为定理 1 的应用, 我们给出下列具体的例子.

例 1 当正的随机变量序列 $\{a_n,b_n\}_{n\geqslant 1}$ 独立同分布且二阶矩有限, 此时定理 1 的条件满足, 故而相应的随机生灭 Q 矩阵 (1.1) 的极限谱分布存在.

例 2 当两个正的随机变量序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 与 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立, $\{a_n\}_{\geqslant 1}$ ($\{b_n\}_{\geqslant 1}$) 是遍历的时齐 Markov 链, 且其极限分布 π_a (π_b) 的二阶矩有限, 则以 π_a (π_b) 为初始分布, $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ ($\{b_n\}_{\geqslant 1}$) 即为二阶矩有限的严平稳遍历 Markov 链. 因此, 由定理 1 可知, 相应的随机生灭 Q 矩阵 (1.1) 的极限谱分布存在.

3 定理 2 的证明

我们先给出下述引理, 为后面 (1.6) 的证明作准备.

引理 3 在定理 2(ii) 的条件下, 设 $A_n := S_n - \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $R_n := A_n - n^{\alpha} c I_n$, 其中 S_n 依 (2.4) 定义, $c = a + b$, 且 a 和 b 满足 (1.5). 再记 $S_n^{(n)} := n^{-\alpha} S_n$, $R_n^{(n)} := n^{-\alpha} R_n$, α 依定理 2(ii) 取定, 则 $\forall\, k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(S_n^{(n)})^k - \mathrm{Tr}(R_n^{(n)})^k] \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

证明 类似 (2.13), $\forall\, 0 \leqslant l \leqslant [\frac{k}{2}]$, $1 \leqslant i \leqslant n - l$, 定义

$$S_{l,i}^{\vec{m}_l, \vec{n}_l} := M_{l,i}^{\vec{m}_l} \prod_{j=0}^{l} (S_n(i+j, i+j))^{n_j}, \tag{3.2}$$

其中 $M_{l,i}^{\vec{m}_l}, \vec{m}_l$ 和 $\vec{n}_l$ 依定理 1 第 (III) 步定义. 记总和

$$V_l^{\vec{m}_l, \vec{n}_l} := \sum_{i=1}^{n-l} S_{l,i}^{\vec{m}_l, \vec{n}_l}.$$

$S_n^{(n)}$, $M_{l,i}^{(n), \vec{m}_l}$ 和 $V_l^{(n), \vec{m}_l, \vec{n}_l}$ 分别表示相应的量经 $n^{-\alpha}$, $n^{-\alpha(\sum_{j=0}^{l-1} m_{j+1})}$ 和 $n^{-\alpha k}$ 约化后所得的量.

同理定义

$$R_{l,i}^{\vec{m}_l, \vec{n}_l} = M_{l,i}^{\vec{m}_l} \prod_{j=0}^{l} (R_n(i+j, i+j))^{n_j}, \quad W_l^{\vec{m}_l, \vec{n}_l} = \sum_{i=1}^{n-l} R_{l,i}^{\vec{m}_l, \vec{n}_l},$$

并类似上面定义 $R_n^{(n)}$ 和 $W_l^{(n), \vec{m}_l, \vec{n}_l}$.

于是, 与 (2.14) 同理, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(S_n^{(n)})^k - \mathrm{Tr}(R_n^{(n)})^k] &= \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{\vec{m}_l, \vec{n}_l} C_l^{\vec{m}_l, \vec{n}_l} \mathbb{E}(V_l^{(n), \vec{m}_l, \vec{n}_l} - W_l^{(n), \vec{m}_l, \vec{n}_l}) \\ &= \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{\vec{m}_l, \vec{n}_l} C_l^{\vec{m}_l, \vec{n}_l} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-l} \mathbb{E}\bigg[M_{l,i}^{(n), \vec{m}_l} \bigg(\prod_{j=0}^{l} (S_n^{(n)}(i+j, i+j))^{n_j} \\ &\quad - \prod_{j=0}^{l} (R_n^{(n)}(i+j, i+j))^{n_j} \bigg)\bigg].\end{aligned}$$

由文献 [10, 引理 1] 不难观察到, 为证 (3.1), 只需证明

$$\mathbb{E}\bigg[M_{l,n}^{(n), \vec{m}_l} \bigg(\prod_{j=0}^{l} (S_n^{(n)}(n+j, n+j))^{n_j} - \prod_{j=0}^{l} (R_n^{(n)}(n+j, n+j))^{n_j} \bigg)\bigg] \to 0. \tag{3.3}$$

下证 (3.3). 简记 $\mathcal{M}_{n,l} := M_{l,n}^{(n), \vec{m}_l}$, $\mathcal{S}_{n,j} := (S_n^{(n)}(n+j, n+j))^{n_j}$, $\mathcal{R}_{n,j} := (R_n^{(n)}(n+j, n+j))^{n_j}$, 利用独立性和 Hölder 不等式, 分析上式有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg[\mathcal{M}_{n,l} \bigg(\prod_{j=0}^{l} \mathcal{S}_{n,j} - \prod_{j=0}^{l} \mathcal{R}_{n,j} \bigg)\bigg] &= \sum_{j=0}^{l} \mathbb{E}\bigg[\mathcal{M}_{n,l} (\mathcal{S}_{n,j} - \mathcal{R}_{n,j}) \prod_{i=0}^{j-1} \mathcal{S}_{n,i} \prod_{i=j+1}^{l} \mathcal{R}_{n,i}\bigg] \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{l} \mathbb{E}\|\mathcal{M}_{n,l}\|_{2(l+1)} \|\mathcal{S}_{n,j} - \mathcal{R}_{n,j}\|_{2(l+1)}\end{aligned}$$

$$\times \prod_{i=0}^{j-1} \|\mathcal{S}_{n,i}\|_{l+1} \prod_{i=j+1}^{l} \|\mathcal{R}_{n,i}\|_{l+1}, \tag{3.4}$$

这里约定 $\prod_{i=0}^{-1} \mathcal{S}_{n,i} = 1$, $\prod_{i=l+1}^{l} \mathcal{R}_{n,i} = 1$.

易见

$$\prod_{i=j+1}^{l} \|\mathcal{R}_{n,i}\|_{l+1} \leqslant c^{(l-j)k}. \tag{3.5}$$

又由于 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i^{(n)} \leqslant a_i^{(i)}$, 于是, 由 (1.5) 可知, $\forall k \geqslant 1$,

$$M_k := \sup_n \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{E}[(a_i^{(n)})^k + (b_i^{(n)})^k] < \infty. \tag{3.6}$$

通过取最大值的操作, 无妨设 $\{M_k\}$ 单调递增且大于 1. 注意到, $\forall 0 \leqslant i \leqslant l$, $a_{n+i-1}^{(n)} \leqslant 2^\alpha a_{n+i-1}^{(n+i-1)}$, $b_{n+i}^{(n)} \leqslant 2^\alpha b_{n+i}^{(n+i)}$, 以及初等不等式 $|x+y|^r \leqslant 2^{r-1}(|x|^r + |y|^r)$, $r \geqslant 1$, 可推出, 当 $n_i > 0$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_{n,i}\|_{l+1} &= \|(a_{n+i-1}^{(n)} + b_{n+i}^{(n)})^{n_i}\|_{l+1} \\
&\leqslant 2^{n_i-1}(\|(a_{n+i-1}^{(n)})^{n_i}\|_{l+1} + \|(b_{n+i}^{(n)})^{n_i}\|_{l+1}) \\
&\leqslant 2^{n_i-1}2^{\alpha n_i}(\|(a_{n+i-1}^{(n+i-1)})^{n_i}\|_{l+1} + \|(b_{n+i}^{(n+i)})^{n_i}\|_{l+1}) \\
&\leqslant 2^{n_i+\alpha n_i} M_{(l+1)n_i}^{1/l} \leqslant 2^{n_i+\alpha n_i} M_{(l+1)k}^{1/l}.
\end{aligned}$$

于是, 由 $\sum_{i=0}^{l} n_i \leqslant k$ 得

$$\prod_{i=0}^{j-1} \|\mathcal{S}_{n,i}\|_{l+1} \leqslant 2^{(\alpha+1)k} M_{(l+1)k}. \tag{3.7}$$

此外, 由 $\{a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的独立性和 $2\sum_{j=0}^{l-1} m_{j+1} \leqslant k$ 得

$$\|\mathcal{M}_{n,l}\|_{2l}^{2l} = \prod_{j=0}^{l-1} \mathbb{E}(a_{n+j}^{(n)} b_{n+j}^{(n)})^{2lm_{j+1}} \leqslant 2^{2\alpha lk} \prod_{j=0}^{l-1} M_{2lm_{j+1}}^2 \leqslant 4^{\alpha lk} M_{kl}^{2l}. \tag{3.8}$$

综合 (3.4)–(3.8) 可见, 为证明 (3.3) 只需证明

$$\|\mathcal{S}_{n,j} - \mathcal{R}_{n,j}\|_{2(l+1)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

下面证明 (3.9). 首先, 由矩收敛 (1.5) (应用文献 [7, 引理 B.3 和 B.1]) 可知,

$$a_n^{(n)} \xrightarrow{w} a, \quad b_n^{(n)} \xrightarrow{w} b.$$

于是,

$$a_n^{(n)} \xrightarrow{pr} a, \quad b_n^{(n)} \xrightarrow{pr} b, \tag{3.10}$$

其中 “pr” 表示依概率收敛.

考虑 $n_j \geqslant 1$, 由于

$$\|\mathcal{S}_{n,j} - \mathcal{R}_{n,j}\|_{2(l+1)} = \|(a_{n+j-1}^{(n)} + b_{n+j}^{(n)})^{n_j} - (a+b)^{n_j}\|_{2(l+1)}, \tag{3.11}$$

由 (3.10) 知, (3.11) 中被积函数依概率趋于 0. 进一步, 类似上述估计有

$$\begin{aligned}|(a_{n+j-1}^{(n)}+b_{n+j}^{(n)})^{n_j}-(a+b)^{n_j}| &\leqslant 2^{n_j-1}((a_{n+j-1}^{(n)})^{n_j}+(b_{n+j}^{(n)})^{n_j})+c^k+1\\ &\leqslant 2^{n_j-1+\alpha n_j}((a_{n+j-1}^{(n+j-1)})^{n_j}+(b_{n+j}^{(n+j)})^{n_j})+c^k+1\\ &\leqslant 2^{(\alpha+1)k-1}((a_{n+j-1}^{(n+j-1)})^{k}+(b_{n+j}^{(n+j)})^{k}+2)+c^k+1\in L^2(\mathbb{P}).\end{aligned}$$

因而, 被积函数一致可积. 于是取极限可得 (3.11) 趋于 0, 从而 (3.9) 成立. 引理证毕. □

定理 2 的证明　(i) 证明与定理 1 的论证类似. 我们首先由矩收敛条件 (1.3) 给出

$$\lim_{C\to\infty}\limsup_{n\to\infty} d(\mu_{Q_n^{(n)}},\mu_{Q_n^{(n),C}})=0. \tag{3.12}$$

事实上, 类似 (2.7), 我们有 $\forall C\geqslant C_0$,

$$\begin{aligned}d^3(\mu_{Q_n^{(n)}},\mu_{Q_n^{(n),C}})\leqslant \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n-1}[&a_i^{(n)}b_i^{(n)}(I_{[a_i^{(n)}>C]}I_{[b_i^{(n)}>C]}+I_{[a_i^{(n)}>C]}I_{[b_i^{(n)}\leqslant C]}+I_{[a_i^{(n)}\leqslant C]}I_{[b_i^{(n)}>C]})\\ &+((a_i^{(n)})^2I_{[a_i^{(n)}>C]}+(b_i^{(n)})^2I_{[b_i^{(n)}>C]})].\end{aligned}$$

注意到 $\forall 1\leqslant i\leqslant n-1$, $a_i^{(n)}\leqslant a_i^{(i)}$, 于是, $I_{[a_i^{(n)}>C]}\leqslant I_{[a_i^{(i)}>C]}$, $b_i^{(n)}$ 项亦同理. 从而,

$$\begin{aligned}d^3(\mu_{Q_n^{(n)}},\mu_{Q_n^{(n),C}})\leqslant \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n-1}[&a_i^{(i)}b_i^{(i)}(I_{[a_i^{(i)}>C]}I_{[b_i^{(i)}>C]}+I_{[a_i^{(i)}>C]}+I_{[b_i^{(i)}>C]})\\ &+((a_i^{(i)})^2I_{[a_i^{(i)}>C]}+(b_i^{(i)})^2I_{[b_i^{(i)}>C]})].\end{aligned} \tag{3.13}$$

为取极限, 我们以上式中 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}a_i^{(i)}b_i^{(i)}I_{[a_i^{(i)}>C]}$ 为例. 首先注意到, $\forall 1\leqslant i\leqslant n$, $a_i^{(n)}\leqslant a_i^{(i)}$, $b_i^{(n)}\leqslant b_i^{(i)}$, 结合矩收敛条件 (1.3) 知, 存在 $M<\infty$, 使得 $\forall 1\leqslant k\leqslant 4$,

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbb{E}((a_i^{(n)})^kI_{[a_i^{(n)}>C_0]}+(b_i^{(n)})^kI_{[b_i^{(n)}>C_0]})\leqslant M<\infty, \tag{3.14}$$

并由 Chebyshev 不等式可得

$$\lim_{C\to\infty}m_{1,k}(C)=\lim_{C\to\infty}m_{2,k}(C)=0,\quad k=1,2. \tag{3.15}$$

于是,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\mathbb{E}(a_i^{(i)}b_i^{(i)}I_{[a_i^{(i)}>C]})^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\mathbb{E}(a_i^{(i)})^2\mathbb{E}(b_i^{(i)})^2\leqslant M^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\infty.$$

因而, 由 $\{a_n,b_n\}_{n\geqslant 1}$ 的独立性假设, 应用文献 [19, 第 272 页] 得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}[a_i^{(i)}b_i^{(i)}I_{[a_i^{(i)}>C]}-\mathbb{E}a_i^{(i)}b_i^{(i)}I_{[a_i^{(i)}>C]}]\to 0,\quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

又由 (1.3) 有 $\mathbb{E}a_i^{(i)}b_i^{(i)}I_{[a_i^{(i)}>C]}\to m_{1,1}(C)m_{2,1}$, $i\to\infty$, 于是,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}a_i^{(i)}b_i^{(i)}I_{[a_i^{(i)}>C]}\to m_{1,1}(C)m_{2,1}.$$

因而,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(i)} b_i^{(i)} I_{[a_i^{(i)}>C]} \to m_{1,1}(C)m_{2,1}, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

同理可用 4 阶矩一致有界证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} (a_i^{(i)})^2 I_{[a_i^{(i)}>C]} \to m_{1,2}(C), \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

(3.13) 中其余诸项均可类似的分析. 从而结合 (3.15) 得 (3.12) 成立.

因此, 类似 (2.8) 下面部分的论证, 由 (3.12) 可推知, 在定理 2(i) 条件下, 类似的引理 2 成立. 依定理 1 的证明思路, 下面无妨假定 $\{a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 关于 n 一致有界. 因而, (1.3) 中 $m_{1,k}$ 和 $m_{2,k}$ (省略记号 C) 亦有界, 满足 Carleman 条件. 从而存在随机变量 ξ 和 η 满足

$$a_n^{(n)} \xrightarrow{w} \xi, \quad b_n^{(n)} \xrightarrow{w} \eta. \tag{3.16}$$

且 $\forall k \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\xi^k = m_{1,k} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(a_n^{(n)})^k, \quad \mathbb{E}\eta^k = m_{2,k} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(b_n^{(n)})^k. \tag{3.17}$$

现在 $\forall 1 \leqslant i < j$, 记 $Q_{[i,j]}$ 为 Q_j 中去除前 $i-1$ 行前 $i-1$ 列所得到的矩阵, 特别有 $Q_{[1,n]} = Q_n$. 并记 $Q_{[i,j]}^{(n)} := n^{-\alpha} Q_{[i,j]}$. 类似 (2.10) 可得, $\forall m, n \geqslant 1$,

$$\mathrm{Tr}Q_{m+n}^k = \mathrm{Tr}Q_n^k + \mathrm{Tr}Q_{[n+1,m+n]}^k + \mathrm{Tr}R_{m+n,m+n}.$$

下面简记 $\mathrm{Tr}Q_j^{(i),k} = \mathrm{Tr}(Q_j^{(i)})^k$, $\forall i, j$. 我们有

$$\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{m+n}^{(m+n),k} = \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^{(m+n),k} + \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[n+1,m+n]}^{(m+n),k} + l_{(m,n,k)}^{(m+n)}, \tag{3.18}$$

其中 $|l_{(m,n,k)}^{(m+n)}| = |n^{-(m+n)\alpha k}\mathbb{E}\mathrm{Tr}R_{m+n,m+n}| \leqslant C_k$, C_k 是与 m 和 n 无关的常数.

类似 (2.12) 论证, $\forall n \geqslant 1$, $\forall 1 \leqslant m < n$, 取 $n', r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < m$, 满足 $n = n'm + r$. 无妨设 $r > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^{(n),k} &= \sum_{i=0}^{n'-1} \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{(n),k} + \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[n'm+1,n]}^{(n),k} + \sum_{j=0}^{n'-1} l_{((n'-j)m,m,k)}^{(n)} + l_{(n'm,r,k)}^{(n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n'-1} \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{(n),k} + \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[n'm+1,n]}^{(n),k} + n'\mathcal{O}(1).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

注意

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n'-1} \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{(n),k} &= \frac{n'}{n}\frac{1}{n'}\sum_{i=0}^{n'-1}\left(\frac{(i+1)m}{n}\right)^{\alpha k} \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{((i+1)m),k} \\
&= \frac{n'}{n}\left(\frac{n'm}{n}\right)^{\alpha k}\frac{1}{n'}\sum_{i=0}^{n'-1}\left(\frac{i+1}{n'}\right)^{\alpha k} \mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{((i+1)m),k}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

易见,

$$\frac{n'}{n} \to \frac{1}{m}, \quad \left(\frac{n'm}{n}\right)^{\alpha k} \to 1.$$

进一步, 由 a_i 与 b_j 之间的独立性及矩收敛 (3.17), 我们有

$$\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{((i+1)m),k} \to \mathbb{E}\mathrm{Tr}Z_m^k, \quad i \to \infty, \tag{3.21}$$

其中 Z_m 是 $m\times m$ 矩阵, 满足 $Z_m(j,j+1)=\eta_j$, $Z_m(j,j-1)=\xi_{j-1}$, $Z_m(j,j)=-(\xi_{j-1}+\eta_j)$, $1\leqslant j\leqslant m$, 且 $Z_m(ij)=0$ 当 $|i-j|\geqslant 2$. $\xi_{j-1}\overset{d}{=}\xi$, $\eta_j\overset{d}{=}\eta$, 且相互独立.

事实上, 由 (3.16) 知, $\forall im+1\leqslant j\leqslant (i+1)m$, $Q_{(j,j+1)}^{((i+1)m)}$ 与 $Q_{(j,j-1)}^{((i+1)m)}$ 分别弱收敛于 η_j, ξ_{j-1}, $\eta_j\overset{d}{=}\eta$, $\xi_{j-1}\overset{d}{=}\xi$, 且相互独立. 于是, 由 Skorohod 表示定理, 存在一概率空间 $(\widehat{\Omega},\widehat{\mathscr{F}},\widehat{\mathbb{P}})$ 及随机变量 $\widehat{a}_{j-1}$, $\widehat{b}_j$, $\widehat{\xi}_{j-1}$ 和 $\widehat{\eta}_j$, 使得

$$\widehat{a}_{j-1}\overset{d}{=}Q_{(j,j-1)}^{((i+1)m)}, \quad \widehat{b}_j\overset{d}{=}Q_{(j,j+1)}^{((i+1)m)}, \quad \widehat{\xi}_{j-1}\overset{d}{=}\xi_{j-1}, \quad \widehat{\eta}_j\overset{d}{=}\eta_j,$$

且当 $i\to\infty$ (注意 $im+1\leqslant j\leqslant (i+1)m$),

$$\widehat{a}_{j-1}\to\widehat{\xi}_{j-1}, \quad \widehat{b}_j\to\widehat{\eta}_j, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

类似 Z_m 可定义 $m\times m$ 三对角矩阵 $\widehat{Z}_m$, 只需将 Z_m 元素分别替换为 $\widehat{\xi}_{j-1}$ 和 $\widehat{\eta}_j$. 再记 $\widehat{Q}_{m,i}$ 为 $m\times m$ 三对角矩阵, 满足 $\widehat{Q}_{m,i}(j,j+1)=\widehat{b}_j$, $\widehat{Q}_{m,i}(j,j-1)=\widehat{a}_{j-1}$, $\widehat{Q}_{m,i}(j,j)=-(\widehat{a}_{j-1}+\widehat{b}_j)$, 其余元素为 0. 于是有

$$\mathrm{Tr}\widehat{Q}_{m,i}^k\to\mathrm{Tr}\widehat{Z}_m^k, \quad i\to\infty, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

考虑到 $\widehat{a}_j$ 和 $\widehat{b}_j$ 的一致有界性, 应用有界控制收敛定理可得

$$\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{((i+1)m),k}=\widehat{\mathbb{E}}\mathrm{Tr}\widehat{Q}_{m,i}^k\to\widehat{\mathbb{E}}\mathrm{Tr}\widehat{Z}_m^k=\mathbb{E}\mathrm{Tr}Z_m^k,$$

证得 (3.21) (若 (1.3) 对 $\forall k\geqslant 1$, $C=0$ 成立, 且 $\{m_{1,k}\}$ 和 $\{m_{2,k}\}$ 满足 Carleman 条件, 则 (3.21) 也可用定理 1 论证中的矩方法来证明).

此外, 考虑到

$$\frac{1}{n'}\sum_{i=0}^{n'-1}\left(\frac{i+1}{n'}\right)^{\alpha k}\to\frac{1}{\alpha k+1},$$

由上述分析不难看出 (3.20) 中

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n'-1}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_{[im+1,(i+1)m]}^{(n),k}\to\frac{1}{\alpha k+1}\frac{1}{m}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Z_m^k. \tag{3.22}$$

因此, 以 $\frac{1}{n}$ 乘以 (3.19) 两边, 令 $n\to\infty$, 再令 $m\to\infty$. 注意到, 由 (3.22) 以及 Z_m 满足定理 1 条件, (3.19) 右边第 1 项极限存在, 而第 2 和 3 项趋于 0. 由此可知, $\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^{(n),k}$ 极限存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Q_n^{(n),k}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\alpha k+1}\frac{1}{m}\mathbb{E}\mathrm{Tr}Z_m^k. \tag{3.23}$$

与定理 1 第 (II) 步的证明类似 (只需将 $\widetilde{Q}_{l,i}^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 和 $\widetilde{U}_l^{\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 等项分别替换为 $\widetilde{Q}_{l,i}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 和 $\widetilde{U}_l^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 等), 不难证明

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(Q_n^{(n)})^k - \frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}(Q_n^{(n)})^k \to 0, \quad n\to\infty, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.} \tag{3.24}$$

事实上, 对 $\mathrm{Tr}(Q_n^{(n)})^k$, 我们有类似 (2.15)、(2.18) 和 (2.19) 成立. 为取极限, 下面以 $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 为例. 由于 $\{\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}\}_{0\leqslant j\leqslant N}$ 无公共元素, 且 $\{a_n,b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 相互独立, 知 $\{\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}\}_{0\leqslant j\leqslant N}$ 之间亦相互独立. 由 Taylor 展开 (参见文献 [20, 定理 6.4.2]) 及 $\mathbb{E}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}=0$ 得

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}} = \prod_{j=0}^N \mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{1}{N}\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}} = \prod_{j=0}^N \left(1+\Lambda_{n,j}\frac{t^2}{N^2}\mathbb{E}(\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l})^2\right),$$

其中 $|\Lambda_{n,j}|\leqslant \frac{1}{2}$. 记 $\theta_{n,j}:=\Lambda_{n,j}\frac{t^2}{N^2}\mathbb{E}(\widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l})^2$, 由 $\{a_i^{(n)},b_i^{(n)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的一致有界性知, 存在 $C_k<\infty$ 使得

$$\max_{0\leqslant j\leqslant N}|\theta_{n,j}|\leqslant \frac{C_k t^2}{2N^2}, \quad \sum_{j=0}^N|\theta_{n,j}|\leqslant \frac{C_k t^2}{2N}\to 0.$$

于是, 应用文献 [20, 第 199 页] 有

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}}\to 1,$$

故 $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}$ 弱收敛于 0, 等价地, 亦概率收敛于 0.

另一方面, 对于任意固定的 h,

$$\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}=0\right\} = \left\{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=h}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}=0\right\},$$

可见

$$\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}=0\right\}$$

是一尾事件. 于是, 由独立随机变量序列尾事件的 0-1 律以及上述依概率收敛的结果, 推出

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^N \widetilde{Q}_{l,jL+1}^{(n),\vec{m}_l,\vec{n}_l}\to 0, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

同理可分析其他求和项, 由此证得 (3.24) 成立. 至此, 类似定理 1 的论证, 我们证得论断 (i) 成立.

(ii) 类似论断 (i) 的思路, 我们可由 (1.5) 和 (3.10) 证明此时 $Q_n^{(n)}$ 的极限谱分布存在, 其中论断 (i) 所涉及的用有界性来取极限的论证可以用高阶矩有界来替代. 我们也可以从 (1.5) 和 (3.10) 不难验证 $a_n^{(n)}$ 和 $b_n^{(n)}$ 满足条件 (1.3). 事实上, 当 $C>a$, 由 (3.10) 有 $a_n^{(n)}I_{[a_n^{(n)}>C]}\stackrel{pr}{\to}0$. 又由 (1.5),

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}|a_n^{(n)}I_{[a_n^{(n)}>C]}|^2\leqslant \sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}(a_n^{(n)})^2<\infty,$$

故而 $\{a_n^{(n)}I_{[a_n^{(n)}>C]}\}$ 一致可积. 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\ a_n^{(n)}I_{[a_n^{(n)}>C]}=0.$$

同理可分析序列 $b_n^{(n)}$. 因此, 由论断 (i) 知, 存在非随机 μ_Q 使得 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\mu_{Q_n^{(n)}} \xrightarrow{w} \mu_Q, \quad n \to \infty. \tag{3.25}$$

为确定极限谱测度 μ_Q 的表达式, 我们利用引理 1 从对称矩阵 S_n 入手. 注意到

$$S_n = A_n + D_n,$$

其中 $D_n = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $A_n = S_n - D_n$. 另一方面, 回忆引理 3 中 $R_n = A_n - n^\alpha c I_n$, 且 $R_n^{(n)}$ 与 $S_n^{(n)}$ 各阶矩的渐近行为相同, 因此, 下面着重分析 $R_n^{(n)}$ 的极限谱分布.

首先注意到, $\forall\, m \geqslant 1$, $\mathbb{E}\mathrm{Tr} A_n^{2m-1} = 0$. 又由独立性和 (1.5),

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sqrt{a_n b_n}}{n^\alpha}\right)^{2m} = \mathbb{E}\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)^m \mathbb{E}\left(\frac{b_n}{n^\alpha}\right)^m \to (ab)^m.$$

于是, 应用文献 [10, 命题 1] (此时可取 $Y \equiv \sqrt{ab}$, 便可满足 $\mathbb{E}Y^{2m} = (ab)^m$), 可知存在有界随机变量 Z 满足. $\forall\, k = 2m, m \geqslant 1$,

$$L_k := \mathbb{E}Z^k = \frac{1}{2\alpha m + 1} C_{2m}^m (ab)^m,$$

这里应用了 $|\Gamma_{2m}| = C_{2m}^m$, 其中 Γ_{2m} 依文献 [10, 第 188 页] 定义, 且由 Stirling 公式 $n! \approx (\frac{n}{\mathrm{e}})^n \sqrt{2\pi n}$ 有

$$L_{2m} \approx (2\alpha m + 1)^{-1} (\pi m)^{-\frac{1}{2}} (4ab)^m,$$

由此可知, $\{L_{2m}\}$ 满足 Carlemann 条件. 于是, 令 $\mu_\alpha = \mathbb{P} \circ Z^{-1}$, 我们有

$$\mu_{A_n^{(n)}} \xrightarrow{w} \mu_\alpha. \tag{3.26}$$

类似引理 1 可见, $n^{-\alpha}(Q_n - D_n)$ 的极限谱分布为 μ_α. 此外, 由 Z 的有界性, 存在 $0 < M < \infty$ (与 n 无关) 使得

$$\operatorname{supp}(\mu_\alpha) \subset [-M, M], \quad \mathbb{P}-\text{a.s.} \tag{3.27}$$

现在, 定义平移算子 $\tau_c : C_b \to C_b$, $(\tau_c f)(x) = f(x - c)$, 则 $\forall\, f \in C_b$,

$$\mu_{R_n^{(n)}}(f) = \mu_{(A_n^{(n)} - cI_n)}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\lambda_i(A_n^{(n)}) - c) = \int (\tau_c f)(x)\ \mu_{A_n^{(n)}}(dx).$$

于是, 由 (3.26) 得

$$\mu_{R_n^{(n)}}(f) \to \int (\tau_c f)(x)\ \mu_\alpha(dx) = \int f(x)\ (\mu_\alpha * \delta_{-c})(dx),$$

因而有 $\mathbb{P}-\text{a.s.}$,

$$\mu_{R_n^{(n)}} \xrightarrow{w} \mu_\alpha * \delta_{-c}. \tag{3.28}$$

由此结合引理 4, 可猜测

$$\mu_Q = \mu_\alpha * \delta_{-c}. \tag{3.29}$$

下面证明 (3.29) 成立. 首先可取可测集 $\widetilde{\Omega}$ 满足 $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega})=1$, 使得 (3.25) 在 $\widetilde{\Omega}$ 上成立. 再由 (3.10) 知, 存在子列 $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ 使得

$$a_{n_j}^{(n_j)} \to a, \quad b_{n_j}^{(n_j)} \to b, \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

以下仅考虑该子列 $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$, 为简便起见, 仍记 $a_{n_j}^{(n_j)}$ 和 $b_{n_j}^{(n_j)}$ 分别为 $a_n^{(n)}$ 和 $b_n^{(n)}$. 于是, $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N(\varepsilon)>1$, 使得

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=N(\varepsilon)}^{\infty}(|a_n^{(n)}-a|+|b_n^{(n)}-b|\geqslant\varepsilon)\bigg)<\varepsilon.$$

记

$$\Omega_\varepsilon:=\widetilde{\Omega}\ \cap\bigcap_{n=N(\varepsilon)}^{\infty}(|a_n^{(n)}-a|+|b_n^{(n)}-b|\leqslant\varepsilon),$$

则 $\mathbb{P}(\Omega_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$, 且 $\forall\,\omega\in\Omega_\varepsilon, n\geqslant N(\varepsilon)$,

$$|a_n^{(n)}(\omega)-a|+|b_n^{(n)}(\omega)-b|\leqslant\varepsilon.$$

从而有 $\{a_n^{(n)}(\omega),b_n^{(n)}(\omega)\}_{n\geqslant N(\varepsilon)}$ 的一致有界性. 类似定理 1 第 (I) 步的论证, 可得 $\{\mu_{R_n^{(n)}}(\omega)\}_{n\geqslant N(\varepsilon)}$ 的支集关于 n 一致有界. 于是, 由 (3.28), $\forall\,k\geqslant 1$,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}(R_n^{(n)}(\omega))^k=\frac{1}{n}\mathbb{E}[(\mu_{R_n^{(n)}}(\omega))(x^k)]\to\widetilde{L}_k:=(\mu_\alpha*\delta_{-c})(x^k), \tag{3.30}$$

再应用引理 1 和 3, $\forall\,k\geqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}(Q_n^{(n)}(\omega))^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}(S_n^{(n)}(\omega))^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\mathrm{Tr}(R_n^{(n)}(\omega))^k=\widetilde{L}_k. \tag{3.31}$$

注意到由 (3.27), $\{\widetilde{L}_k\}_{k\geqslant 1}$ 满足 Carleman 条件, 因而应用文献 [7, 引理 B.1 和 B.3] 得 $\forall\,\omega\in\Omega_\varepsilon$,

$$\mu_{Q_n^{(n)}}(\omega)\xrightarrow{w}\mu_\alpha*\delta_{-c}.$$

则结合 (3.25), $\forall\,\omega\in\Omega_\varepsilon$,

$$\mu_Q(\omega)=\mu_\alpha*\delta_{-c}. \tag{3.32}$$

最后, 取 $\varepsilon_n=2^{-n}, n\geqslant 1$, 并令 $\widehat{\Omega}=\bigcup_{n=1}\Omega_{\varepsilon_n}$, 则 $\mathbb{P}(\widehat{\Omega})=1$, 且 $\forall\,\omega\in\widehat{\Omega}$, (3.32) 成立, 论断 (ii) 得证. 定理 2 证毕. □

注 2 若定理 2(i) 的条件 (1.3) 对 $\forall\,k\geqslant 1$ 和 $C=0$ 成立, 且 $\{m_{1,k}\}$ 和 $\{m_{2,k}\}$ 分别满足 Carleman 条件, 则仍然成立矩 $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}Q_n^{(n),k}$ 几乎处处收敛于某确定常数 m_k. 证明与定理 2(i) 的论证类似, 只需把涉及到用矩阵元素的一致有界性来取极限的论证分别用它们的高阶矩收敛来替换说明. 进一步, 若能证明 $\{m_k\}$ 满足 Carleman 条件, 则 $Q_n^{(n)}$ 的极限谱分布存在.

注 3 类似注 1, 若三个随机变量序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{d_n\}$ (a_n 和 b_n 不必为正) 相互独立, 且分别满足条件 (1.3), 则可类似证明, 约化后随机矩阵 $Q_n^{(n)}$ 的极限谱分布存在.

注 4 定理 2(ii) 的卷积表达式 (1.6) 说明对于此类随机矩阵, 其极限谱分布是由 $A_n^{(n)}$ 的极限谱分布向左平移 c 个单位而得到. 进一步, 考虑到 $\mathrm{supp}(\mu_Q)\subset(-\infty,0]$, 我们可猜测

$$\limsup_{n\to\infty}\lambda_{\max}(A_n^{(n)})\leqslant c.$$

注 5 关于定理 2 中 μ_α 的具体表达式, 由文献 [10, 推论 1] 可知, 当 $a=b=1$ 时, μ_α 是 Ullman 分布且有密度函数 h_α,

$$h_\alpha(x)=I_{[-2,2]}(x)\frac{1}{\alpha\pi}\int_{\frac{|x|}{2}}^{2}\frac{t^{-1+1/\alpha}}{\sqrt{4-t^2}}dt. \tag{3.33}$$

特别地, $h_{1/2}$ 即为经典的半圆率

$$h_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{2\pi}I_{[-2,2]}(x)\sqrt{4-x^2}.$$

作为定理 2 的应用, 我们给出下列具体例子.

例 3 $a_n=u_{1,n}\xi_n$, $b_n=u_{2,n}\eta_n$, 其中 $u_{i,n}\in\mathbb{R}^+$, $n^{-\alpha}u_{1,n}\to a$, $n^{-\alpha}u_{2,n}\to b$, a 和 b 是常数, 且正的随机变量序列 $\{\xi_n,\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 各阶矩有限并相互独立同分布. 不难验证 (1.3) 成立, 故相应的随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布存在.

例 4 考虑 Beta-Hermite 系综, 即 $a_n=b_n$ 服从分布 $\chi_{n\beta}/\sqrt{\beta}$ ($\chi_{n\beta}$ 是参数为 $n\beta$ 的卡方分布), d_n 服从正态分布 $N(0,2/\beta)$, 且它们相互独立. 熟知 (参见文献 [10, 21]) $\chi_{n\beta}-\sqrt{n\beta}$ 弱收敛于正态分布 $N(0,1/2)$, 于是, $\chi_{n\beta}/\sqrt{n\beta}$ 依概率收敛于 1. 因此, 由定理 2 可知, Beta-Hermite 系综所对应的随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布是经典半圆率与 Dirac 测度 δ_{-2} 的卷积.

参考文献

1 侯振挺. 生灭过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000
2 Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach. Courant Lecture Notes in Mathematics 3. Providence, RI: Amer Math Soc, 1999
3 Révész P. Random Walk in Random and Non-Random Environments. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2005
4 Carmona R, Lacroix J. Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Boston: Birkhäuser, 1990
5 Goldsheid I Y, Khoruzhenko B A. The Thouless formula for random non-Hermitian Jacobi matrices. Israel J Math, 2005, 148: 331–346
6 Dumitriu I, Edelman A. Matrix models for beta ensembles. J Math Phys, 2002, 43: 5830–5847
7 Bai Z D, Silverstein J. Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices. Mathematics Monograph Series 2. Beijing: Science Press, 2006
8 Dumitriu I, Edelman A. Global spectrum fluctuations for the β-Hermite and β-Laguerre ensembles via matrix models. J Math Phys, 2006, 47: 5830–5847
9 鲍志刚, 苏中根. $H\beta E$ 的局部半圆率和 Gauss 波动. 中国科学: 数学, 2012, 42: 1017–1030
10 Popescu I. General tridiagonal random matrix models, limiting distributions and fluctuations. Probab Theory Related Fields, 2009, 144: 179–220
11 Bose A, Sen S. Finite diagonal random matrices. J Theoret Probab, 2013, 26: 819–835
12 Li S Z, Li X D, Xie Y X. Generalized Dyson Brownian motion, Mckean-Vlasov equation and eigenvalues of random matrices. ArXiv.org/abs/1303.1240v1, 2013
13 Bai Z D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices: A review. Statist Sinica, 1999, 9: 611–677
14 Bryc W, Dembo A, Jiang T F. Spectral measure of large random Hankel, Markov and Toeplitz matrices. Ann Probab, 2006, 34: 1–38
15 Bordenave C, Caputo P, Chafaï D. Spectrum of Markov generators on sparse random graphs. Comm Pure Appl Math, 2014, 67: 621–669
16 Tao T, Vu V. Random matrices: Universality of ESDs and the circular law. Ann Probab, 2010, 38: 2023–2065
17 Chen M F. Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory. Probability and its Applications. London: Springer-Verlag, 2005
18 Durrett R. Probability: Theory and Examples. 4th ed. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010

19 Petrov V V. Sums of independent random variables. In: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 82. New York/Heidelberg: Springer-Verlag, 1975, 285–304

20 Chung K L. A Course in Probability Theory. 2nd ed. Probability and Mathematical Statistics, vol. 21. New York/London: Academic Press, 1974

21 Dumitriu I, Edelman A. Eigenvalues of Hermite and Laguerre ensembles: Large beta asymptotics. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2005, 41: 1083–1099

Limiting spectral distribution of random birth-death Q matrices

HAN Dong & ZHANG Deng

Abstract This article studies the limiting spectral distributions of random birth-death Q matrices. Under the strictly stationary ergodic condition, we prove that the empirical spectral distribution converges weakly to a non-random probability distribution. Furthermore, in the situations without strictly stationary ergodic condition, we study a class of random birth-death Q matrices, corresponding to generalizations of the Beta-Hermite ensembles, and establish the existences as well as convolution formulations for their limiting spectral distributions. In particular, for the random birth-death Q matrices corresponding to the Beta-Hermite ensembles, the limiting spectral distribution is the convolution of the semi-circle law and Dirac measure δ_{-2}.

Keywords **random birth-death Q matrices, limiting spectral distributions, Beta-Hermite ensembles**

MSC(2010) **60B20, 60F05, 60G10**

doi: 10.1360/N012015-00065