

论 文

非圆信号的协方差匹配自校正算法及其性能分析

尹洁昕*, 吴瑛, 王鼎

解放军信息工程大学, 信息工程学院, 郑州 450002

* 通信作者. E-mail: Cindyin0807@163.com

收稿日期: 2013-09-27; 接受日期: 2014-01-03

国家自然科学基金 (批准号: 61201381) 和信息工程学院未来发展基金 (批准号: YP12JJ202057) 资助项目

摘要 针对非圆信号测向中方位依赖幅相误差的校正问题, 本文根据非圆信号的非圆特性和辅助阵元能够自校正的特点, 对协方差匹配估计技术 (covariance matching estimation technique, COMET) 进行改进, 提出一种适用于信源时域统计特性未知和统计独立特性先验已知两种情况的改进算法: NC-COMET 算法. 该算法利用非圆信号扩展协方差数据, 使其校正精度较常规的基于辅助阵元的最大似然类算法 (未利用非圆特性) 有明显提升, 且降低了最小辅助阵元数要求. 从理论上证明了参数估计的统计一致性, 采用一阶误差分析方法推导了有限采样影响下参数估计的均方误差表达式, 并提出算法的“数据利用率”定义, 定量比较获得了 NC-COMET 算法的数据利用率较常规的最大似然类算法的提升幅度. 仿真结果亦表明 NC-COMET 算法性能较常规的最大似然类算法更优: 低信噪比下具有更强的鲁棒性; 信源时域统计独立特性先验已知或者大非圆率的情况下, 该算法对校正精度的提升尤为明显.

关键词 方位依赖幅相误差 协方差匹配技术 非圆信号 辅助阵元 有限采样 数据利用率

1 引言

非圆 (noncircular NC) 信号是现代通信系统和卫星通信系统中的常用信号, 常见的有 BPSK、AM、PAM 和 MASK 等调制信号. 近年来, 利用信号非圆特性提高波达方向 (direction-of-arrival, DOA) 估计性能的算法得到大量研究: Charge 等^[1] 研究了非圆信号测向的 MUSIC 算法 (记为 NC-MUSIC 算法) 及求根解法; Haart 和 Romer^[2] 将酉 ESPRIT 算法用于非圆信号测向; 文献 [3] 又根据非圆确定性信号波达方向估计的数学模型, 提出了基于非圆信号的 DOA 估计最大似然算法. 虽然这些算法的分辨力和测角精度较传统的 MUSIC、ESPRIT 等算法有明显提高, 但是在工程应用中的阵列误差往往会影响算法的估计精度, 甚至导致其失效, 因此阵列误差校正是进一步提高超分辨率测向算法实际性能的关键技术之一. 目前将非圆特性应用到阵列误差校正方法中的研究较少, 文献 [4] 提出的非圆信号自校正算法也仅针对与方位无关的阵元幅相误差. 然而, 实际应用中遇到的阵列误差很多都是 (或从数学上可以等效为) 方位依赖的幅相误差: 例如当阵元不满足各向同性时, 需要用方位依赖的幅相误差进行建模; 当阵列同时存在多种误差形式 (如阵元通道幅相误差、位置误差^[5] 以及互耦效应^[6] 等), 它们对阵列的综合影响也需要用一个方位依赖的幅相误差模型来描述. 因此, 我们有必要针对非圆信号, 建立校正方位依赖幅相误差的数学模型并对参数的估计方法进行研究.

引用格式: 尹洁昕, 吴瑛, 王鼎. 非圆信号的协方差匹配自校正算法及其性能分析. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1593–1616, doi: 10.1360/N112013-00173

文献 [7] 首先提出了基于协方差匹配估计技术 (covariance matching estimation technique COMET) 的阵列信号处理方法, Boonstra 等 [8,9] 将该技术引入到阵列误差校正方法中, 提出了基于协方差匹配估计技术的有源校正算法, 相比基于子空间原理的校正算法, 该算法能够利用校正源的时域统计独立性, 有利于进一步提高校正精度 (当信源统计独立时). 这种有源校正算法计算简单, 但只适用于不依赖方位的幅相误差, 针对这一问题, 文献 [10,11] 利用辅助阵元 [5,12,13] 能够进行自校正的特点, 通过协方差匹配估计技术构造了在高斯信号源下与最大似然估计器渐近等价的目标函数, 提出了基于辅助阵元的方位依赖幅相误差的最大似然 (maximum likelihood, ML) 自校正算法. 这些算法都是针对圆信号模型的, 虽然基于最大似然准则的误差校正方法对于参数的估计性能已经能够达到圆信号模型相应的克拉美罗界 (Cramér-Rao bound, CRB), 然而这只是在没有利用信源更多信息的情况下达到最优, 若结合非圆信号具有椭圆协方差矩阵不为零的特征, 必然能够进一步提升校正精度.

基于以上研究现状, 本文提出了一种 NC-COMET 算法, 该算法通过利用已校准的辅助阵元, 能够自校正方位依赖的幅相误差, 基于非圆信号的扩展协方差矩阵构造了最优权值的协方差匹配估计器, 并给出了一种信源方位和幅相误差交替迭代的算法用以实现各种参数的优化计算, 适用于信源时域统计特性未知和信源时域统计独立特性先验已知的两种情况. 尤其对于高斯随机非圆信号, 该算法可看作非圆信号的最大似然估计器的另一种实现方式, 因而在大样本数据下能够逼近相应的克拉美罗界 [7], 其性能较文献 [10] 中的最大似然自校正算法有明显提升.

衡量算法性能的重要参照来源于对其性能的理论分析, 它对如何令算法实现更高的预期精度有一定的指导意义. 虽然自校正算法可以消除阵列误差带来的测向干扰, 但是噪声的存在使得算法的估计精度无法避免有限采样的影响, 因此本文又针对提出的 NC-COMET 算法, 通过一阶误差分析将非线性模型近似线性化处理, 利用泰勒 (Taylor) 级数展开的方法获得了有限采样影响下该算法对信源方位以及幅相误差参数估计的均方误差表达式. 此外, 衡量算法性能的指标除了估计精度以外, 文献 [14,15] 都指出非圆特性有利于提高算法的数据利用率, 为了能够更加全面地理解 NC-COMET 算法对非圆信号的阵列误差校正本质, 本文定义了校正算法的“数据利用率”这一概念, 并分别对信源时域统计特性未知和信源时域统计独立特性先验已知的情况下 NC-COMET 算法的数据利用率进行了定量分析.

论文的内容安排如下: 第 2 节列出本文所需的基本数学知识; 第 3 节针对存在方位依赖幅相误差的阵列, 给出了非圆信号的扩展数据模型; 第 4 节建立了 NC-COMET 算法的数学优化模型并设计了求解该模型的交替迭代算法; 第 5 节依次研究分析了 NC-COMET 算法对参数估计的统计一致性, 有限采样影响下的参数估计均方误差表达式以及数据利用率; 第 6 节基于均匀直线阵列, 通过实验仿真将 NC-COMET 算法与基于辅助阵元的最大似然自校正算法 [10] 的性能进行了对比与分析; 第 7 节对全文进行了总结.

2 预备数学知识

命题 1 设矩阵 $\mathbf{A}$ 的正交投影矩阵为 $\Pi_{\mathbf{A}}^{\perp}$, 若 $\mathbf{A}$ 是关于参量 $\gamma \in \mathbf{R}^{K \times 1}$ 的矩阵, 则 $\Pi_{\mathbf{A}}^{\perp}$ 对 $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, K)$ 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial \Pi_{\mathbf{A}}^{\perp}}{\partial \gamma_i} = -\Pi_{\mathbf{A}}^{\perp} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \gamma_i} \mathbf{A}^{\dagger} - \left(\Pi_{\mathbf{A}}^{\perp} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \gamma_i} \mathbf{A}^{\dagger} \right)^{\mathrm{H}}, \quad (1)$$

式中, $[\cdot]^{\mathrm{H}}$ 表示矩阵或者矢量的共轭转置, $[\cdot]^{\dagger}$ 表示矩阵的伪逆.

命题 2 设矩阵 $\mathbf{A}$ 的正交投影矩阵为 $\Pi_{\mathbf{A}}^{\perp}$, 若 $\mathbf{A}$ 是关于参量 $\gamma \in \mathbf{R}^{K \times 1}$ 的矩阵, 则 $\Pi_{\mathbf{A}}^{\perp}$ 对

$\gamma_i, \gamma_j (i, j = 1, 2, \dots, K)$ 的二阶偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_A^\perp}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = & \Pi_A^\perp \frac{\partial A}{\partial \gamma_j} A^\dagger \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} A^\dagger + (A^\dagger)^H \frac{\partial A^H}{\partial \gamma_j} \Pi_A^\perp \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} A^\dagger - \Pi_A^\perp \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} A^\dagger \\ & - \Pi_A^\perp \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} (A^H A)^{-1} \frac{\partial A^H}{\partial \gamma_j} \Pi_A^\perp + \Pi_A^\perp \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} A^\dagger \frac{\partial A}{\partial \gamma_j} A^\dagger + (\dots)^H, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $(\dots)^H$ 表示等式右边所有项的共轭转置.

命题 1、命题 2 的证明见文献 [16], 它们对于推导牛顿型迭代公式起着关键作用.

3 信号模型

3.1 非圆信号

若随机信号与它的任意旋转具有相同的一阶和二阶统计特性, 即该信号具有旋转不变性, 则称之为圆信号, 反之为非圆信号 [17]. 直观来讲, 若 $\mathbf{s}$ 为圆性复随机矢量, 则有 $E[\mathbf{s}] = 0$, 协方差矩阵 $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] \neq 0$ 而椭圆协方差矩阵 $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = 0$ [18], 其中 $[\cdot]^T$ 表示矩阵或者矢量的转置; 若 $\mathbf{s}$ 为非圆信号, 则有 $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] \neq 0$ 且 $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] \neq 0$. 对于非圆信号 $\mathbf{s}_1$ (随机矢量 $\mathbf{s}$ 的第一个信号), 该信号的非圆率 ρ 定义为

$$\rho = \left| \frac{E[\mathbf{s}_1^2]}{E[|\mathbf{s}_1|^2]} \right|. \quad (3)$$

非圆率的取值区间为 $0 \leq \rho \leq 1$, 若信号的非圆率 $\rho = 1$, 则称之为最大非圆率信号.

3.2 存在方位依赖幅相误差的扩展数据模型

在 DOA 估计中 [19], 最常用的信号模型是远场的窄带信号模型. 假设信号源为 N 个远场的窄带非圆信号, 阵列天线由 M 个阵元组成, 阵元数与通道数相等, 其中 K 个阵元存在方位依赖的幅相误差, 已校准的辅助阵元有 $P (P = M - K)$ 个, M 个阵元在特定时刻 t 接收到的信号矢量表示为

$$\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x}(t)$ 为阵列的 $M \times 1$ 维快拍数据矢量, $\mathbf{s}(t)$ 为空间信号源的 $N \times 1$ 维快拍数据矢量, $\mathbf{n}(t)$ 为阵列的 $M \times 1$ 维快拍复圆高斯噪声矢量, 与信号不相关. $\mathbf{B}$ 为误差阵列的 $M \times N$ 维流型矩阵, 具体表达为

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\theta_1, \tau_1), \mathbf{b}(\theta_2, \tau_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_N, \tau_N)], \quad (5)$$

式中, $\theta_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 表示第 n 个信号源的信源方位, $\tau_n \in C^{K \times 1}$ 由 K 个扰动阵元对第 n 个信号源的幅相误差参数构成. 继而阵列流型矢量可以展开为以下形式:

$$\mathbf{b}(\theta_n, \tau_n) = \text{blkdiag}[\mathbf{1}_{1 \times P}, \tau_n] \mathbf{a}(\theta_n) \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

式中, $\text{blkdiag}[\cdot]$ 表示由矩阵或矢量作为对角元素构成的块状对角矩阵, $\mathbf{a}(\theta_n)$ 为原始的阵列流型矢量, 即没有受到幅相误差影响.

根据定义, 观测数据 $\mathbf{x}(t)$ 的协方差矩阵 $\mathbf{R}_x$ 和椭圆协方差矩阵 $\mathbf{R}'_x$ 分别为

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{B}\mathbf{R}_s\mathbf{B}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M, \quad \mathbf{R}'_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] = \mathbf{B}\mathbf{R}'_s\mathbf{B}^T, \quad (7)$$

其中, $\mathbf{R}_s$ 与 $\mathbf{R}'_s$ 分别为非圆信号源 $\mathbf{s}(t)$ 的协方差矩阵和椭圆协方差矩阵.

联合信源的非圆特性, 将信号的协方差矩阵数据矢量扩展为

$$\mathbf{r}_y = [\mathbf{r}^T, \tilde{\mathbf{r}}'^T, \tilde{\mathbf{r}}'^T \mathbf{H}]^T \in \mathbf{C}^{(2M^2+M) \times 1}, \quad (8)$$

式中, $\mathbf{r} = \text{vec}[\mathbf{R}_x]$, $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{S} \text{vec}[\mathbf{R}'_x] = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{r}}$, 其中 $\text{vec}[\cdot]$ 表示矩阵的矢量化, $\mathbf{S}$ 为选择矩阵, 表示取 $\mathbf{R}'_x$ 下三角部分在 $\text{vec}[\mathbf{R}'_x]$ 中的元素, 具体表达式为

$$\mathbf{S} = \text{blkdiag}[\mathbf{I}_M, \bar{\mathbf{I}}_{M-1}, \bar{\mathbf{I}}_{M-2}, \dots, \bar{\mathbf{I}}_1], \quad (9)$$

式中, $\bar{\mathbf{I}}_m = [\mathbf{0}_{m, M-m}, \mathbf{I}_m] \in \mathbf{R}^{m \times M}$ ($m = 1, 2, \dots, M-1$).

需要强调的是, 由于式 (8) 中 $\mathbf{r}_y$ 包含了非圆信号的所有二阶统计数据信息, 为了充分利用非圆特性, 本文的 NC-COMET 算法就是基于该扩展协方差矩阵数据矢量 $\mathbf{r}_y$ 来设计实现的.

4 NC-COMET 算法

4.1 算法的数学优化模型

针对阵列中阵元受到方位依赖幅相误差影响的情况, 基于非圆信号的扩展协方差矩阵, 若将所有未知实参量包含在矢量 $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\Theta}_1^T, \boldsymbol{\Theta}_2^T]^T$ 中, 则有

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = [\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\mu}_1^T, \boldsymbol{\mu}_2^T, \dots, \boldsymbol{\mu}_K^T, \boldsymbol{\nu}_1^T, \boldsymbol{\nu}_2^T, \dots, \boldsymbol{\nu}_K^T]^T \in \mathbf{R}^{(2K+1)N \times 1}, \quad (10)$$

其中, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$, $\boldsymbol{\mu}_k = [\text{Re}\{\boldsymbol{\tau}_1^k, \boldsymbol{\tau}_2^k, \dots, \boldsymbol{\tau}_N^k\}]^T$, $\boldsymbol{\nu}_k = [\text{Im}\{\boldsymbol{\tau}_1^k, \boldsymbol{\tau}_2^k, \dots, \boldsymbol{\tau}_N^k\}]^T$, $\text{Re}\{\cdot\}$, $\text{Im}\{\cdot\}$ 分别表示取矩阵或者矢量的实部、虚部, $\boldsymbol{\tau}_n^k$ 表示误差矢量 $\boldsymbol{\tau}_n$ 的第 k 个元素.

未知参量 $\boldsymbol{\Theta}_2 = [\boldsymbol{\omega}^T, \sigma_n^2]^T$ 在信源时域统计特性未知的情况下, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{(2N^2+N) \times 1}$ 由 $\text{Re}\{[\mathbf{R}_s]_{i,j}\}$, $\text{Im}\{[\mathbf{R}_s]_{i,j}\}$, $\text{Re}\{[\mathbf{R}'_s]_{i,j}\}$, $\text{Im}\{[\mathbf{R}'_s]_{i,j}\}$ ($1 \leq j < i \leq N$) 以及 $[\mathbf{R}_s]_{i,i}$, $\text{Re}\{[\mathbf{R}'_s]_{i,i}\}$, $\text{Im}\{[\mathbf{R}'_s]_{i,i}\}$ ($1 \leq i \leq N$) 构成; 在信源时域统计独立特性先验已知的情况下, 未知参量 $\boldsymbol{\omega}$ 的维数下降为 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{3N \times 1}$, 只包含了协方差矩阵以及椭圆协方差矩阵的对角线元素信息, 即由 $[\mathbf{R}_s]_{i,i}$, $\text{Re}\{[\mathbf{R}'_s]_{i,i}\}$, $\text{Im}\{[\mathbf{R}'_s]_{i,i}\}$ ($1 \leq i \leq N$) 构成.

通过最优加权, 可以最大限度地减少协方差匹配估计器的估计方差 [7], 为此根据协方差匹配估计技术可构造如下优化模型:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \underset{\boldsymbol{\Theta}}{\text{argmin}} V(\boldsymbol{\Theta}), \quad (11)$$

式中,

$$V(\boldsymbol{\Theta}) = (\mathbf{r}_{y,L} - \mathbf{r}_y)^H \mathbf{W} (\mathbf{r}_{y,L} - \mathbf{r}_y) = \|\mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{r}_{y,L} - \mathbf{r}_y)\|_2^2, \quad (12)$$

其中, $\mathbf{r}_{y,L} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{r}_y(t)$, $\|\cdot\|_2$ 为矢量的 L_2 范数, $\mathbf{W}$ 表示加权矩阵, 最优加权矩阵为 $\mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-120}$ ($\mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}$ 为 $\sqrt{L}\mathbf{r}_{y,L}$ 的协方差矩阵). 由大数定理可知 $\sqrt{L}(\mathbf{r}_{y,L} - \mathbf{r}_y)$ 服从零均值的高斯分布 [20], 因而 $\mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}$ 写为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \sqrt{L}(\mathbf{r}_{y,L} - \mathbf{r}_y) \sqrt{L}(\mathbf{r}_{y,L} - \mathbf{r}_y)^H \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_{r,r'} \mathbf{S}^T & \mathbf{K} \mathbf{C}_{r,r'}^* \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} \mathbf{C}_{r,r'}^H & \mathbf{S} \mathbf{C}_{r'} \mathbf{S}^T & \mathbf{S} \mathbf{C}_{r'}^* \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} \mathbf{C}_{r,r'}^T \mathbf{K} & \mathbf{S} \mathbf{C}_{r'}^H \mathbf{S}^T & \mathbf{S} \mathbf{C}_{r'}^* \mathbf{S}^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) 中用到了 $\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{r}^*$, 其中 $\mathbf{K}$ 为交换矩阵, 满足 $\text{vec}[\mathbf{R}_x] = \mathbf{K}\text{vec}[\mathbf{R}_x^T]$, 具体表达式如下:

$$\mathbf{K} = [\bar{\mathbf{K}}^T, \bar{\mathbf{K}}_1'^T, \bar{\mathbf{K}}_2'^T, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{M-1}'^T]^T \quad (14)$$

其中, $\bar{\mathbf{K}} = \text{blkdiag} \left[\underbrace{\mathbf{e}_M^{1T}, \mathbf{e}_M^{1T}, \dots, \mathbf{e}_M^{1T}}_{M \uparrow} \right]$ ($\mathbf{e}_M^1$ 为 M 维的首一向量), $\bar{\mathbf{K}}'_m$ 表示 $\bar{\mathbf{K}}$ 按列右循环移 m 列.

需要指出, (13) 式中各符号的物理意义及表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{C}_r = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \sqrt{L}(\mathbf{r}_L - \mathbf{r})\sqrt{L}(\mathbf{r}_L - \mathbf{r})^H \right\} = \mathbf{R}_x^T \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_x \otimes \mathbf{R}'_x^*) + \mathbf{R}_4, \\ \mathbf{C}_{r'} = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \sqrt{L}(\tilde{\mathbf{r}}_L - \tilde{\mathbf{r}})\sqrt{L}(\tilde{\mathbf{r}}_L - \tilde{\mathbf{r}})^H \right\} = \mathbf{R}_x \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}_x \otimes \mathbf{R}_x) + \mathbf{R}'_4, \\ \mathbf{C}'_{r'} = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \sqrt{L}(\tilde{\mathbf{r}}_L - \tilde{\mathbf{r}})\sqrt{L}(\tilde{\mathbf{r}}_L - \tilde{\mathbf{r}})^T \right\} = \mathbf{R}'_x \otimes \mathbf{R}'_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_x \otimes \mathbf{R}'_x) + \mathbf{R}''_4, \\ \mathbf{C}_{r,r'} = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \sqrt{L}(\mathbf{r}_L - \mathbf{r})\sqrt{L}(\tilde{\mathbf{r}}_L - \tilde{\mathbf{r}})^H \right\} = \mathbf{R}'_x^* \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}_x \otimes \mathbf{R}'_x) + \mathbf{R}'''_4, \end{cases} \quad (15)$$

式中, $[\cdot]^*$ 表示矩阵或者矢量的共轭, $\mathbf{r}_L = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{r}(t)$, $\tilde{\mathbf{r}}_L = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \tilde{\mathbf{r}}(t)$. $\mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}'_4$, $\mathbf{R}''_4$, $\mathbf{R}'''_4$ 分别为 $\mathbf{x}(t)$ 的四阶累积量, 取值方式如下:

$$\begin{cases} [\mathbf{R}_4]_{(k_1-1)M+k_2, (k_3-1)M+k_4} = \text{Cum} \{ \mathbf{x}_{k_1}^*, \mathbf{x}_{k_2}, \mathbf{x}_{k_3}, \mathbf{x}_{k_4}^* \}, \\ [\mathbf{R}'_4]_{(k_1-1)M+k_2, (k_3-1)M+k_4} = \text{Cum} \{ \mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}, \mathbf{x}_{k_3}^*, \mathbf{x}_{k_4}^* \}, \\ [\mathbf{R}''_4]_{(k_1-1)M+k_2, (k_3-1)M+k_4} = \text{Cum} \{ \mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}, \mathbf{x}_{k_3}, \mathbf{x}_{k_4} \}, \\ [\mathbf{R}'''_4]_{(k_1-1)M+k_2, (k_3-1)M+k_4} = \text{Cum} \{ \mathbf{x}_{k_1}^*, \mathbf{x}_{k_2}, \mathbf{x}_{k_3}^*, \mathbf{x}_{k_4} \}. \end{cases} \quad (16)$$

式 (15) 的证明见附录 A. 需要说明: 若信号为高斯分布, 式 (15) 中的高阶累积量为零. 此外, 因为在实际求解过程中一般无法获得 $\mathbf{C}_{r_y}$ 的准确值, 可由式 (15) 中表达式的一致估计值给出.

我们的目标是进行阵列误差校正, 也就是只需要估计包含信源方位参量和阵列误差参量的 Θ_1 , 而此时多余的未知参量较多, 这里考虑采用“嵌入式”优化的思想来减少迭代的未知参量个数, 先将未知参量 Θ_2 的估计值转化为 Θ_1 的闭式表达式, 再对 Θ_1 进行优化.

针对信源时域统计特性未知的情况, 为了表达的简洁, 将未知参量 ω 转化为同维数的复参量, 即 $\omega = [\mathbf{r}_s^T, \tilde{\mathbf{r}}_s'^T, \tilde{\mathbf{r}}_s'^H]^T$ ($\mathbf{r}_s = \text{vec}[\mathbf{R}_s]$, $\tilde{\mathbf{r}}' = S\text{vec}[\mathbf{R}'_s] = S\tilde{\mathbf{r}}$), 继而 $\Theta_2 = [\mathbf{r}_s^T, \tilde{\mathbf{r}}_s'^T, \tilde{\mathbf{r}}_s'^H, \sigma_n^2]^T$. 经过分析可将 $\mathbf{r}_y$ 用 Θ_2 线性表示, 即

$$\mathbf{r}_y = \Psi(\Theta_1)\Theta_2, \quad (17)$$

其中, $\Psi(\Theta_1) \in \mathbb{C}^{(2M^2+M) \times (2N^2+N+1)}$ 的表达式如下:

$$\Psi(\Theta_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{vec}[\mathbf{I}_M] \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中, $\tilde{\mathbf{S}}$ 为 $\mathbf{S}$ 的反变换, 即 $\tilde{\mathbf{r}}_s = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{r}'_s$. 式 (18) 的证明见附录 B.

针对信源时域统计独立特性先验已知的情况, 我们也将 ω 转换为等价的复数变量

$$\omega = [\mathbf{R}_s]_{1,1} \cdots [\mathbf{R}_s]_{N,N}, [\mathbf{R}'_s]_{1,1} \cdots [\mathbf{R}'_s]_{N,N}, [\mathbf{R}'_s^*]_{1,1} \cdots [\mathbf{R}'_s^*]_{N,N}^T. \quad (19)$$

在该情况下, $\mathbf{r}_y$ 与 Θ_2 之间仍然存在形如式 (17) 的线性关系, 通过简单的推导, 得到此时 $\Psi(\Theta_1)$ 的表达式变为

$$\Psi(\Theta_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{vec}[\mathbf{I}_M] \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T} \in \mathbf{C}^{(2M^2+M) \times (3N+1)}, \quad (20)$$

式中, $\mathbf{T} = \text{blkdiag}\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2, \mathbf{1}\} \in \mathbf{R}^{(2N^2+N+1) \times (3N+1)}$, 其中 $\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$ 为选择矩阵:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \mathbf{0}_{N \times N} & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0}_{N \times N} & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \mathbf{0}_{(N-1) \times N} & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0}_{(N-2) \times N} & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

综合以上两种情况, 将 (17) 代入目标函数 (12), 得到

$$V(\Theta) = (\mathbf{r}_{y,L} - \Psi(\Theta_1)\Theta_2)^H \mathbf{W}(\mathbf{r}_{y,L} - \Psi(\Theta_1)\Theta_2). \quad (22)$$

上式即为线性加权最小二乘估计问题, 易得

$$\hat{\Theta}_2 = (\Psi^H(\Theta_1)\mathbf{W}\Psi(\Theta_1))^{-1}\Psi^H(\Theta_1)\mathbf{W}\mathbf{r}_{y,L}. \quad (23)$$

将 (23) 代入 (22) 式, 则目标函数变为仅关于未知参量 Θ_1 的函数, 由于 $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1}$, 有 $\mathbf{W} = \mathbf{W}^H$, 进一步化简后的目标函数为

$$\begin{aligned} V(\Theta_1) &= \mathbf{r}_{y,L}^H \mathbf{W}^{1/2} \left(\mathbf{I}_{2M^2+M} - \mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta_1) (\Psi^H(\Theta_1) \mathbf{W} \Psi(\Theta_1))^{-1} \Psi^H(\Theta_1) \mathbf{W}^{1/2} \right) \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L} \\ &= \left(\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L} \right)^H \Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L} \\ &= \left\| \Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (24)$$

则对参量 Θ_1 的优化问题如下:

$$\hat{\Theta}_1 = \underset{\Theta_1}{\text{argmin}} V(\Theta_1) = \underset{\Theta_1}{\text{argmin}} \left\| \Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L} \right\|_2^2. \quad (25)$$

需要说明, 该优化模型能够估计成功需要注意以下两个假设条件:

假设 1 对于方位空间中的任意 $N+1$ 个方位 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N$, 它们的阵列流型矢量受到扰动后无秩 N 模糊, 即 $\mathbf{a}(\theta_i) (i=0, 1, \dots, N)$ 在受到任意幅相误差 $\tau_j (j=0, 1, \dots, N)$ 的干扰后, $N+1$ 个阵列流型矢量 $\mathbf{b}(\theta_i, \tau_j)$ 之间线性独立.

假设 1 是为了避免方位估计与相位误差估计的模糊性, 保证矩阵 $\Psi(\Theta_1)$ 对待估计参量 Θ_1 具有唯一可辨识性, 它在证明估计量一致性中起到了关键性作用.

假设 2 在信源时域统计特性未知的情况下, 辅助阵元数 P 、阵元总数 M 与信源个数 N 之间需要满足:

$$2(P-1)N + M - 1 \geq 2N^2 + 2MN - 2M^2; \quad (26)$$

在信源时域统计独立特性先验已知的情况下, 它们之间需要满足

$$2(P-2)N + M - 1 \geq 2MN - 2M^2. \quad (27)$$

假设 2 是保证对非圆信号 ($\rho \neq 0$) 估计成功的必要条件, 它是为了要求 (12) 中的方程式个数不小于未知参量个数. 但是当矩阵 $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}'_x$ 具有某些特殊结构时, 这会导致几个方程式呈线性关系继而有效方程个数降维, 则对于给定的信源数 N, M 与 K 之间的关系会被要求得更为严格. 因而在没有特殊矩阵形式的 $\mathbf{R}_x \mathbf{R}'_x$ 情况下, 假设 2 中的式 (26) 与 (27) 能够帮助我们获知在两种情况下 NC-COMET 算法校正成功对辅助阵元个数的要求, 附录 C 证明了 NC-COMET 算法所需的辅助阵元个数是小于同情况下基于辅助阵元的最大似然自校正算法^[10]所需的辅助阵元个数的.

4.2 牛顿型交替迭代算法

由于待优化的未知参量较多, 这里用牛顿型迭代算法进行求解. 根据此时阵列流型矢量的表达式 (6) 可知, 幅相误差矢量 $\boldsymbol{\tau}_n$ 与信源方位角 θ_n 呈乘性关系, 在每一次牛顿型迭代中, 考虑对误差参量和信源方位交替进行处理.

首先, 计算目标函数对信源方位 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度矢量, 根据命题 1 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp}{\partial \theta_n} = & -\Pi_{\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_n} (\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1))^\dagger \\ & - \left(\Pi_{\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_n} (\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1))^\dagger \right)^\text{H}, \end{aligned} \quad (28)$$

继而

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_n} = -2\text{Re} \left\{ \mathbf{p}^\text{H} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_n} \mathbf{q} \right\}, \quad (29)$$

其中, $\mathbf{p} = \mathbf{W}^{1/2} \Pi_{\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L}$, $\mathbf{q} = (\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1))^\dagger \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_{y,L}$.

因而目标函数对信源方位 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度矢量可以表示为

$$\mathbf{G}_1(\boldsymbol{\Theta}_1) = -2 \cdot \text{Re}\{\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\Theta}_1)\}, \quad (30)$$

式中, $\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\Theta}_1) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{p})^\text{H} \mathbf{F}^{(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{q}$, $\mathbf{F}^{(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\boldsymbol{\Psi}^{(\theta_1)\text{H}}(\boldsymbol{\Theta}_1), \boldsymbol{\Psi}^{(\theta_2)\text{H}}(\boldsymbol{\Theta}_1), \dots, \boldsymbol{\Psi}^{(\theta_N)\text{H}}(\boldsymbol{\Theta}_1)]^\text{H}$, 其中 $\boldsymbol{\Psi}^{(\theta_n)}(\boldsymbol{\Theta}_1)$ 表示 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)$ 对 θ_n 的偏导数.

接着, 计算目标函数对信源方位 $\boldsymbol{\theta}$ 的 Hessian 矩阵, 由命题 2 通过简单的推导, 目标函数对信源方位的二阶偏导数可以近似省略为

$$\frac{\partial^2 V(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_n \partial \theta_m} \approx 2\text{Re} \left\{ \mathbf{q}^\text{H} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^\text{H}(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_m} \mathbf{W}^{1/2} \Pi_{\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}{\partial \theta_n} \mathbf{q} \right\}. \quad (31)$$

因而目标函数对信源方位 $\boldsymbol{\theta}$ 的 Hessian 矩阵表示为

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\Theta}_1) \approx 2 \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{h}_1^\text{H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{W}^{1/2} \Pi_{\mathbf{W}^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\Theta}_1) \right\}, \quad (32)$$

其中, $\mathbf{h}_1(\boldsymbol{\Theta}_1) = \bar{\mathbf{F}}^{(\theta)}(\boldsymbol{\Theta}_1)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{q})$, $\bar{\mathbf{F}}^{(\theta)}(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\Psi^{(\theta_1)}(\boldsymbol{\Theta}_1), \Psi^{(\theta_2)}(\boldsymbol{\Theta}_1), \dots, \Psi^{(\theta_N)}(\boldsymbol{\Theta}_1)]$.

根据 (30) 与 (32) 式, 固定幅相误差参量, 可以得到对信源方位估计的牛顿型迭代公式

$$\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_{i-1} - \gamma_1^i \mathbf{H}_1^{-1}(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{G}_1(\boldsymbol{\Theta}_1), \quad (33)$$

式中, $0 < \gamma_1 \leq 1$ 为迭代信源方位角的步长因子.

令 $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\mu}_1^T, \boldsymbol{\mu}_2^T, \dots, \boldsymbol{\mu}_K^T, \boldsymbol{\nu}_1^T, \boldsymbol{\nu}_2^T, \dots, \boldsymbol{\nu}_K^T]^T$, 与目标函数对信源方位 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度矢量的求解方法相似, 我们可以得到目标函数对阵列误差参量 $\boldsymbol{\eta}$ 的梯度矢量为

$$\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\Theta}_1) = -2 \cdot \text{Re}\{[\mathbf{g}_2(\boldsymbol{\Theta}_1) \ \mathbf{g}_3(\boldsymbol{\Theta}_1)]^H\}, \quad (34)$$

式中,

$$\begin{cases} \mathbf{g}_2(\boldsymbol{\Theta}_1) = (\mathbf{I}_{KN} \otimes \mathbf{p})^H \mathbf{F}^{(\mu)}(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{q}, \\ \mathbf{g}_3(\boldsymbol{\Theta}_1) = (\mathbf{I}_{KN} \otimes \mathbf{p})^H \mathbf{F}^{(\nu)}(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{q}, \end{cases} \quad (35)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(\mu)}(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\Psi^{(\mu_{11})H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\mu_{1N})H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\mu_{K1})H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\mu_{KN})H}(\boldsymbol{\Theta}_1)]^H, \\ \mathbf{F}^{(\nu)}(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\Psi^{(\nu_{11})H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\nu_{1N})H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\nu_{K1})H}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\nu_{KN})H}(\boldsymbol{\Theta}_1)]^H. \end{cases} \quad (36)$$

同理, 易得目标函数对阵列误差实参量的 Hessian 矩阵表示为

$$\mathbf{H}_2(\boldsymbol{\Theta}_1) \approx 2 \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{h}_2^H(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{W}^{1/2} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{W}^{1/2} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{h}_2(\boldsymbol{\Theta}_1) \right\}, \quad (37)$$

式中, $\mathbf{h}_2(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\bar{\mathbf{F}}^{(\mu)}(\boldsymbol{\Theta}_1)(\mathbf{I}_{KN} \otimes \mathbf{q}), \bar{\mathbf{F}}^{(\nu)}(\boldsymbol{\Theta}_1)(\mathbf{I}_{KN} \otimes \mathbf{q})]$, $\bar{\mathbf{F}}^{(\mu)}(\boldsymbol{\Theta}_1)$ 与 $\bar{\mathbf{F}}^{(\nu)}(\boldsymbol{\Theta}_1)$ 的表达式如下:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{F}}^{(\mu)}(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\Psi^{(\mu_{11})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\mu_{1N})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\mu_{K1})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\mu_{KN})}(\boldsymbol{\Theta}_1)], \\ \bar{\mathbf{F}}^{(\nu)}(\boldsymbol{\Theta}_1) = [\Psi^{(\nu_{11})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\nu_{1N})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\nu_{K1})}(\boldsymbol{\Theta}_1) \dots \Psi^{(\nu_{KN})}(\boldsymbol{\Theta}_1)]. \end{cases} \quad (38)$$

进一步根据 (34) 与 (37) 式, 固定信源方位, 可以得到对幅相误差参量估计的牛顿型迭代公式

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}_{i-1} - \gamma_2^i \mathbf{H}_2^{-1}(\boldsymbol{\Theta}_1) \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\Theta}_1), \quad (39)$$

式中, $0 < \gamma_2 \leq 1$ 为迭代幅相误差参量的步长因子.

总结前面的讨论, 下面给出上述交替迭代算法的具体步骤:

步骤 1 设置 e 为一个很小的正数以及初始值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\eta}_0$, 选择合适的步长因子 $\gamma_1 \gamma_2$, 并利用式 (24) 计算目标函数 V_1 , 并令 $i \leftarrow 1$;

步骤 2 将 $\boldsymbol{\Theta}_1 = [\boldsymbol{\theta}_{i-1}^T, \boldsymbol{\eta}_{i-1}^T]^T$ 代入式 (33) 计算第 i 次信源方位角的迭代结果 $\boldsymbol{\theta}_i$;

步骤 3 将 $\boldsymbol{\Theta}_1 = [\boldsymbol{\theta}_i^T, \boldsymbol{\eta}_{i-1}^T]^T$ 代入式 (39) 计算第 i 次幅相误差参量的迭代结果 $\boldsymbol{\eta}_i$;

步骤 4 令 $i \leftarrow i + 1$, 并利用式 (24) 计算目标函数 V_i ;

步骤 5 计算 $\Delta_i = |V_i - V_{i-1}|$, 若 $\Delta_i \leq e$, 则终止计算; 否则转至步骤 2.

为了确保该迭代算法能够收敛, 对初始值的选取十分重要, 一般可用次优估计算法 (如秩减估计器 [521~23](rank reduction estimator, RARE)) 获得初始值, 从而避免算法发散, 特别地, 当秩减估计器失效时, 初始值可通过对各个方向阵列流型的预先测量存储、内插 [24] 来得到. 此外, 由上文可知, 信源时域统计特性未知和信源时域统计独立先验已知两种情况的优化问题均能够用 (25) 来构造, 因此上述算法对两种情况都适用, 只是迭代公式中矩阵 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}_1)$ 的表达式有所不同.

5 NC-COMET 性能分析

该部分将在满足假设 1 和假设 2 的条件下, 分别从参数估计一致性、有限采样影响下的均方误差表达式、数据利用率三个方面对 NC-COMET 算法性能展开分析.

5.1 参数估计统计一致性分析

由 NC-COMET 算法给出的估计量具有统计一致性, 下面对目标估计量 $\hat{\Theta}_1$ (信源方位参数、阵元幅相误差参数) 的统计一致性进行分析证明.

当快拍个数 $L \rightarrow \infty$ 时, 观测样本的扩展协方差矩阵趋近于真值, 即有

$$\mathbf{r}_{y,L} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{r}_y(t) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbf{r}_y, \quad (40)$$

相应的优化模型 (25) 变为

$$\hat{\Theta}_1 = \operatorname{argmin}_{\Theta_1} \bar{V}(\Theta_1) = \operatorname{argmin}_{\Theta_1} \left\| \Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta_1)}^\perp \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{r}_y \right\|_2^2. \quad (41)$$

因此, 要证明参量估计的一致性, 只要证明在假设 1 与假设 2 的条件下, $\bar{V}(\hat{\Theta}_1) = 0$ 的充分必要条件是 $\hat{\Theta}_1 = \bar{\Theta}_1$, 其中 $\bar{\Theta}_1$ 表示 Θ_1 的真实值. 由于 $\mathbf{r}_y = \Psi(\bar{\Theta}_1) \bar{\Theta}_2$ ($\bar{\Theta}_2$ 表示 Θ_2 的真实值), 充分性容易得证; 下面利用反证法证明必要性:

首先针对信源方位的估计进行证明, 假设存在参量 Θ'_1 包含至少一个非真实方位 $\theta_0 \neq \theta_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 及对应的幅相误差 τ_0 , 使得 $\bar{V}(\Theta'_1) = 0$. 由假设 1 的条件可知 $\mathbf{B}(\bar{\Theta}_1)$ 与 $\mathbf{B}(\Theta'_1)$ 的列矢量线性独立, 因而 $\Psi(\bar{\Theta}_1)$ 与 $\Psi(\Theta'_1)$ 都是列满秩的, 那么由矩阵论知识, 一定存在非奇异矩阵 $\mathbf{J}$ (信源时域统计特性未知下, $\mathbf{J} \in \mathbf{C}^{(2N^2+N+1) \times (2N^2+N+1)}$; 信源时域统计独立特性先验已知下, $\mathbf{J} \in \mathbf{C}^{(3N+1) \times (3N+1)}$), 使得

$$\Psi(\Theta'_1) = \Psi(\bar{\Theta}_1) \mathbf{J}. \quad (42)$$

根据矩阵 $\Psi(\Theta_1)$ 的结构 (见表达式 (18) 与 (20)), 比较 $\Psi(\Theta'_1)$ 与 $\Psi(\bar{\Theta}_1)$ 的前 M 行, 可知 $\mathbf{b}(\theta_0, \tau_0)$ 能够由真实的阵列流型矢量线性表示, 即有

$$\mathbf{b}(\theta_0, \tau_0) \in \operatorname{span}\{\mathbf{b}(\theta_1, \tau_1), \mathbf{b}(\theta_2, \tau_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_N, \tau_N)\}, \quad (43)$$

其中, $\operatorname{span}\{\cdot\}$ 表示由向量组生成的线性子空间. 上式说明向量组 $\mathbf{b}(\theta_0, \tau_0), \mathbf{b}(\theta_1, \tau_1), \dots, \mathbf{b}(\theta_N, \tau_N)$ 线性相关, 与假设 1 矛盾. 继而必要性得证, 证明了信源方位参数估计的统计一致性.

在信源方位估计的统计一致性基础上, 针对幅相误差参数的估计进行证明, 这里假设存在参量 Θ'_1 , 其中至少有一个真实方位 θ_n ($n \in \{1, 2, \dots, N\}$) 对应的幅相误差矢量 $\tau_0 \neq \tau_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$), 也使得 $\bar{V}(\Theta'_1) = 0$. 与有关信源方位估计的证明相似, 该情况说明 $\mathbf{b}(\theta_n, \tau_0)$ 可由真实的阵列流型矢量线性表示, 即有

$$\mathbf{b}(\theta_n, \tau_0) \in \operatorname{span}\{\mathbf{b}(\theta_1, \tau_1), \mathbf{b}(\theta_2, \tau_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_N, \tau_N)\}, \quad (44)$$

上式说明向量组 $\mathbf{b}(\theta_n, \tau_0), \mathbf{b}(\theta_1, \tau_1), \dots, \mathbf{b}(\theta_N, \tau_N)$ 线性相关, 也与假设 1 矛盾. 继而阵元幅相误差参数估计的统计一致性得证.

5.2 有限采样影响下的估计性能

有限采样是造成校正精度下降的一个重要原因, 由于未知参数较多, 接下来通过一阶误差分析方法研究有限采样对 NC-COMET 算法的性能影响, 推导大快拍个数下该算法对 Θ_1 参数估计的均方误差.

基于 NC-COMET 校正原理, 对未知参量 Θ_1 的估计等价于对未简化的目标函数 (12) 进行关于未知参量 $\Theta = [\Theta_1^T, \Theta_2^T]^T$ 的多维最小值搜索, 假设迭代能够收敛到最优解, 此时有下式成立

$$\left. \frac{\partial V(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\hat{\Theta}} = \hat{\Theta} = \mathbf{0}. \quad (45)$$

由 $\hat{\Theta}_1$ 是 Θ_1 的一致性估计以及 (23) 式可知 $\hat{\Theta}$ 是 Θ 的一致性估计, 因此我们将 $V(\Theta)$ 对 Θ 的偏导数在其真实值上进行一阶泰勒级数展开, 省略高阶项后得到

$$V^{(\alpha)}(\hat{\Theta}) \approx V^{(\alpha)}(\bar{\Theta}) + \sum_{\beta \in \Theta} V^{(\alpha, \beta)}(\bar{\Theta})(\hat{\beta} - \bar{\beta}), \quad (46)$$

式中, $\alpha \in \Theta$, $\bar{\beta}$, $\bar{\Theta}$ 分别表示 β 和 Θ 的真实值, $V^{(\alpha)}(\Theta)$ 表示 $V(\Theta)$ 对 α 的一阶偏导数, $V^{(\alpha, \beta)}(\Theta)$ 表示 $V(\Theta)$ 对 α, β 的二阶偏导数, 相应的偏导表达式为

$$V^{(\alpha)}(\Theta) = (\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^H \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \alpha} + (\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^T \mathbf{W}^* \frac{\partial \mathbf{r}_y^*}{\partial \alpha}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} V^{(\alpha, \beta)}(\Theta) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \beta} \right)^H \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \alpha} + (\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^H \mathbf{W} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_y}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \beta} \right)^T \mathbf{W}^* \frac{\partial \mathbf{r}_y^*}{\partial \alpha} + (\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^T \mathbf{W}^* \frac{\partial^2 \mathbf{r}_y^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ &\approx \left(\frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \beta} \right)^H \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \beta} \right)^T \mathbf{W}^* \frac{\partial \mathbf{r}_y^*}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (48)$$

式中, $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1}$ 为最优加权矩阵, 继而有

$$(\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^H \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \alpha} = (\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^T \mathbf{W}^* \frac{\partial \mathbf{r}_y^*}{\partial \alpha}. \quad (49)$$

将上式代入 (47), (48) 中得到

$$V^{(\alpha)}(\Theta) = 2(\mathbf{r}_y - \mathbf{r}_{y,L})^H \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \alpha}, \quad (50)$$

$$V^{(\alpha, \beta)}(\Theta) \approx 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \beta} \right)^H \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \alpha}. \quad (51)$$

根据式 (45), 再将 (50), (51) 式代入 (46) 式中, 有下式成立

$$(\mathbf{r}_y(\bar{\Theta}) - \mathbf{r}_{y,L})^H \mathbf{W} \mathbf{r}_y^{(\alpha)}(\bar{\Theta}) + \sum_{\beta \in \Theta} \left(\mathbf{r}_y^{(\beta)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{W} \mathbf{r}_y^{(\alpha)}(\bar{\Theta})(\hat{\beta} - \bar{\beta}) = 0, \quad (52)$$

式中, $\mathbf{r}_y^{(\alpha)}(\bar{\Theta})$, $\mathbf{r}_y^{(\beta)}(\bar{\Theta})$ 分别为 $\mathbf{r}_y$ 对 α, β 的一阶偏导数在真实值上的取值. 由上式推出

$$\Delta \Theta = \hat{\Theta} - \bar{\Theta} = - \left(\left(\mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{W} \mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta}) \right)^{-1} \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{W} (\mathbf{r}_y(\bar{\Theta}) - \mathbf{r}_{y,L}), \quad (53)$$

式中, $\mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta})$ 表示 $\frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \Theta^T}$ 在 Θ 真实值上的取值.

根据最优加权矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1}$ 和式 (13), 对上式进行推导简化, 在大快拍点数下 Θ 的估计均方误差表达式 $\mathbf{R}_{\Theta}$ 可以写为

$$\mathbf{R}_{\Theta} = \mathbb{E} \left[\left(\hat{\Theta} - \bar{\Theta} \right) \left(\hat{\Theta} - \bar{\Theta} \right)^H \right] = \frac{1}{L} \left(\left(\mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta}) \right)^{-1}. \quad (54)$$

将 $\mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta})$ 进行分块 $\mathbf{r}_y^{(\Theta)}(\bar{\Theta}) = [\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) | \mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta})]$, 则上式变为

$$\mathbf{R}_{\Theta} = \frac{1}{L} \left(\begin{array}{c} \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}); \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \\ \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}); \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \end{array} \right)^{-1}. \quad (55)$$

进而由 $\mathbf{r}_y = \Psi(\Theta_1)\Theta_2$ 可知 $\mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) = \Psi(\bar{\Theta}_1)$ (信源时域统计特性未知时见 (18), 信源时域统计独立特性先验已知时见 (20)), 再根据矩阵求逆的性质, 我们可以得到对于参量 Θ_1 的估计均方误差 $\mathbf{R}_{\Theta_1}$ 的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Theta_1} &= \frac{1}{L} \left(\left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) - \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \right)^H \right. \\ &\quad \left. \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \right)^{-1} \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_2)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \Big)^{-1} \\ &= \frac{1}{L} \left(\left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) - \left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \right. \\ &\quad \left. \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \Psi(\bar{\Theta}_1) \left(\Psi(\bar{\Theta}_1) \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \Psi(\bar{\Theta}_1) \right)^{-1} \left(\Psi(\bar{\Theta}_1) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{L} \left(\left(\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^H \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1/2} \Pi_{\mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}}^{-1/2} \Psi(\Theta_1) \mathbf{C}_{\mathbf{r}_y}^{-1/2} \mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (56)$$

其中, 将 $\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta})$ 展开为

$$\mathbf{r}_y^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) = \left[\left(\mathbf{r}^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^T, \left(\tilde{\mathbf{r}}'^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^T, \left(\tilde{\mathbf{r}}'^{*}(\Theta_1)(\bar{\Theta}) \right)^T \right]^T, \quad (57)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) &= \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^T}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu_1^T} \cdots \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu_K^T}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \nu_1^T} \cdots \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \nu_K^T} \right], \\ \tilde{\mathbf{r}}'^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) &= \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'^T}{\partial \theta}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \mu_1^T} \cdots \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \mu_K^T}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \nu_1^T} \cdots \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \nu_K^T} \right], \\ \tilde{\mathbf{r}}'^{*}(\Theta_1)(\bar{\Theta}) &= \left(\tilde{\mathbf{r}}'^{(\Theta_1)}(\bar{\Theta}) \right)^*, \end{aligned}$$

它们具体表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = (\mathbf{B}\mathbf{R}_s)^* * \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\theta})} + \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\theta})*} * (\mathbf{B}\mathbf{R}_s), \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = \mathbf{S}((\mathbf{B}\mathbf{R}'_s) * \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\theta})} + \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\theta})} * (\mathbf{B}\mathbf{R}_{bms})), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\mu}_k^T} = (\mathbf{B}\mathbf{R}_s)^* * \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\mu}_k)} + \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\mu}_k)*} * (\mathbf{B}\mathbf{R}_s), \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \boldsymbol{\mu}_k^T} = \mathbf{S}((\mathbf{B}\mathbf{R}'_s) * \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\mu}_k)} + \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\mu}_k)} * (\mathbf{B}\mathbf{R}_s)), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\nu}_k^T} = (\mathbf{B}\mathbf{R}_s)^* * \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\nu}_k)} + \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\nu}_k)*} * (\mathbf{B}\mathbf{R}_s), \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}'}{\partial \boldsymbol{\nu}_k^T} = \mathbf{S}((\mathbf{B}\mathbf{R}'_s) * \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\nu}_k)} + \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\nu}_k)} * (\mathbf{B}\mathbf{R}_s)), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (58)$$

其中, 符号 $*$ 表示矩阵的 Column-wise Kronecker 积,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\theta})} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_1, \boldsymbol{\tau}_1)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_2, \boldsymbol{\tau}_2)}{\partial \theta_2} \dots \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_N, \boldsymbol{\tau}_N)}{\partial \theta_N} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\mu}_k)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_1, \boldsymbol{\tau}_1)}{\partial \text{Re}\{\boldsymbol{\tau}_1^k\}}, \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_2, \boldsymbol{\tau}_2)}{\partial \text{Re}\{\boldsymbol{\tau}_2^k\}} \dots \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_N, \boldsymbol{\tau}_N)}{\partial \text{Re}\{\boldsymbol{\tau}_N^k\}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^{(\boldsymbol{\nu}_k)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_1, \boldsymbol{\tau}_1)}{\partial \text{Im}\{\boldsymbol{\tau}_1^k\}}, \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_2, \boldsymbol{\tau}_2)}{\partial \text{Im}\{\boldsymbol{\tau}_2^k\}} \dots \frac{\partial \mathbf{b}(\theta_N, \boldsymbol{\tau}_N)}{\partial \text{Im}\{\boldsymbol{\tau}_N^k\}} \end{bmatrix} = j\mathbf{B}^{(\boldsymbol{\mu}_k)}. \end{aligned}$$

在有限采样影响下, NC-COMET 算法对参数 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 估计均方误差由 $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\Theta}_1}$ 的对角元素给出, 至此我们得到了有限采样对于该算法校正精度的影响. 需要指出的是, 对于高斯的随机信号源, 最优权值的协方差匹配估计器可看作是最大似然算法的一种实现, 其估计精度能够逼近相应的克拉美罗界^[7], 实验结果也显示了这一点.

5.3 数据利用率

为了定量分析非圆特性 (由于当 $\rho = 0$ 时该算法利用不到非圆特性, 此时与传统算法相当, 这里假设信号含有非圆特性, 即 $\rho \neq 0$)、时域统计特性为算法带来的性能提升, 我们采用“数据利用率”作为衡量指标, 将算法的数据利用率 κ 作如下定义:

$$\kappa \propto \frac{D_f}{D_{\boldsymbol{\Theta}}}, \quad (59)$$

式中, D_f 表示算法构造的独立方程个数 (若 (12) 式中方程式均无线性关系, 该参数等于所利用的数据维数), $D_{\boldsymbol{\Theta}}$ 表示模型中未知参量的维数. 定义式 (59) 说明数据利用率与有效观测数据量成正比, 与未知参数量成反比, 即算法利用的数据量越大, 未知参量维数越小, 数据利用率就越高.

根据 κ 的定义, 下面对本文 NC-COMET 算法的数据利用率进行分析比较, 并假设 (12) 式中方程式均无线性关系 (大多数情况满足此假设). 对于信源时域统计特性未知的情况, NC-COMET 算法通过利用扩展协方差数据 $\mathbf{r}_y \in \mathbf{C}^{(2M^2+M) \times 1}$ 来完成对 $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbf{C}^{(2N^2+(2K+2)N+1) \times 1}$ 的估计, 而未利用非圆特性的 ML 算法^[10,11] 利用协方差数据 $\mathbf{r} \in \mathbf{C}^{M^2 \times 1}$ 来估计的未知参量维数为 $N^2 + (2K+1)N + 1$; 对于信源时域统计独立特性先验已知的情况, NC-COMET 算法 (为区别时域统计特性未知的情况, 在下文称之为 NCI-COMET) 利用扩展协方差数据 $\mathbf{r}_y \in \mathbf{C}^{(2M^2+M) \times 1}$ 来估计 $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbf{C}^{((2K+4)N+1) \times 1}$, 而未利

用非圆特性的 COMET 算法^[10] (利用了先验独立信息) 则是利用协方差数据 $\mathbf{r} \in \mathbf{C}^{M^2 \times 1}$ 来估计维数为 $(2K+2)N+1$ 的未知参量. 由定义式 (59) 可知关于四类算法的数据利用率有下式成立

$$\begin{cases} \kappa_{\text{NC-COMET}} \propto \frac{2M^2 + M}{2N^2 + (2K+2)N + 1}, \kappa_{\text{ML}} \propto \frac{M^2}{N^2 + (2K+1)N + 1}, \\ \kappa_{\text{NCI-COMET}} \propto \frac{2M^2 + M}{(2K+4)N + 1}, \kappa_{\text{COMET}} \propto \frac{M^2}{(2K+2)N + 1}. \end{cases} \quad (60)$$

由 (60) 比较得到它们的数据利用率之间的关系

$$\begin{cases} \kappa_{\text{NCI-COMET}} \geq \kappa_{\text{NC-COMET}} > \kappa_{\text{ML}}, \\ \kappa_{\text{NCI-COMET}} > \kappa_{\text{COMET}} \geq \kappa_{\text{ML}}, \\ (\kappa_{\text{NCI-COMET}}/\kappa_{\text{COMET}}) \geq (\kappa_{\text{NC-COMET}}/\kappa_{\text{ML}}). \end{cases} \quad (61)$$

不等式中的等号成立的条件为 $N=1$, 即当只有一个信源入射时, 统计独立信息失去先验的意义, 因此先验已知和未知情况下的数据利用率相等.

进一步分析本文算法与未利用非圆特性的最大似然类算法在大阵列 ($M \gg 1, K \gg 1$)、多信号源 ($N \gg 1$) 情况下 κ 之间的渐进关系, 不妨假设 (59) 式的正比关系是线性的, 继而得到

$$\begin{cases} \frac{\kappa_{\text{NC-COMET}}}{\kappa_{\text{ML}}} \propto \frac{(1+1/2M)(1+2K/N+1/N+1/N^2)}{1+K/N+1/N+1/2N^2} \approx \left(1 + \frac{K/N}{1+K/N}\right), \\ \frac{\kappa_{\text{NCI-COMET}}}{\kappa_{\text{COMET}}} \propto \frac{(2+1/M)(1+1/K+1/2KN)}{1+2/K+1/2KN} \approx 2. \end{cases} \quad (62)$$

上式说明: 虽然 NC-COMET 算法较 ML 算法使用的数据信息增加了一倍, 但是未知参量的维数也扩大了一倍, 因此数据利用率仅有 1 倍多的提升; 而 NCI-COMET 算法较 COMET 算法的数据利用率提升了 2 倍左右. 事实上, 算法的数据利用率一方面能够反映算法估计精度的高低: 对于同样的入射非圆信号, 数据利用率越高, 表示我们能够利用越多的信息去估计较少的参量, 从而获得更高的估计精度, 本文的实验结果也验证了这一结论; 另一方面它也能够反映算法所需辅助阵元个数的多少 (见附录 C): 数据利用率越高, 要求辅助阵元提供的信息量越少, 继而所需辅助阵元个数也就越少.

6 数值仿真与结果分析

为了验证本文提出的算法在信源时域统计特性未知和统计独立特性先验已知这两种情况下的优越性, 该部分在第一种情况下, 通过数值仿真将传统的 (未利用非圆特性) 基于辅助阵元的 ML 算法^[10] 与本文的 NC-COMET 算法的估计性能进行对比; 并在第二种情况下, 通过数值仿真将传统的基于辅助阵元的 COMET 算法^[10] (利用了先验独立信息) 与本文的 NCICOMET 算法的估计性能进行对比. 同时, 该部分也比较了本文算法在有限采样影响下的估计精度实验值与本文推导的理论值, 从而验证该算法的实际校正效果.

实验采用相邻阵元间隔与波长比 (孔径大小) 为 $0.5(d/\lambda = 0.5)$ 的 9 元均匀直线阵列, 其中存在方位依赖幅相误差的阵元有 6 个 (幅度误差因子范围为 $[0.5, 2]$, 相位误差因子范围为 $[-80^\circ, 80^\circ]$), 辅助阵元 3 个 (满足假设 1 和假设 2), 信号源为两个等功率的远场窄带高斯非圆信号, 分别从 45° (信号 1) 与 75° (信号 2) 方向同时入射 (入射角指与线阵夹角). 每组实验的蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真次

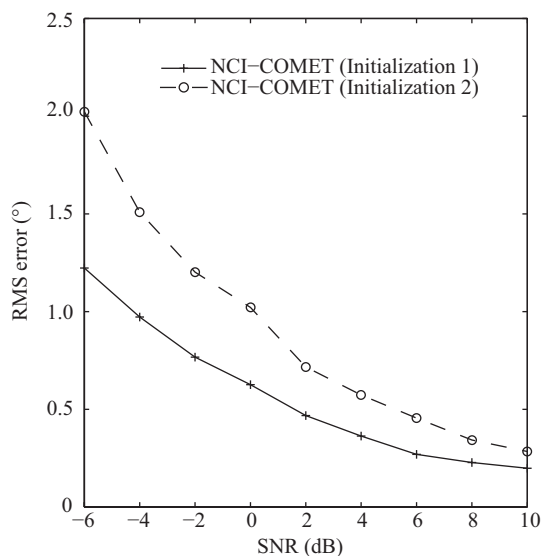


图 1 信号 1 的信源方位估计随信噪比的变化曲线

Figure 1 RMS error of DOA of Source 1 versus the level of SNR

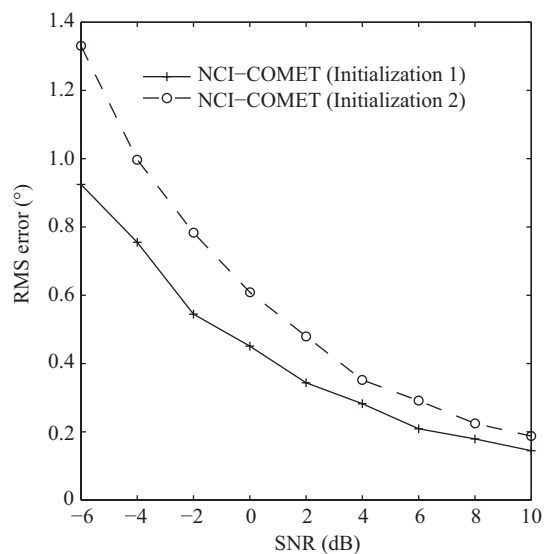


图 2 信号 2 的信源方位估计随信噪比的变化曲线

Figure 2 RMS error of DOA of Source 2 versus the level of SNR

数均为 500 次, 假设噪声为高斯白噪声. 实验中, 对于信源入射角度的估计均方根误差, 以及阵列幅相误差参数估计相对误差的统计, 采取如下方式:

$$\varepsilon_{\theta} = \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} (\theta - \hat{\theta}^{(k)})^2}, \varepsilon_{\tau} = \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} \|\tau - \hat{\tau}^{(k)}\|_2^2 / \|\tau\|_2^2}, \quad (63)$$

式中, $\hat{\theta}^{(k)} \hat{\tau}^{(k)}$ 分别表示第 k 次仿真的入射角度估计值与幅相误差矢量估计值.

6.1 初始值选取与收敛速度

对于迭代类算法, 初始值的选取和收敛速度是共性问题, 因此该组实验将主要对这两个问题进行实验研究, 由于篇幅限制, 这里给出信源统计独立特性先验已知情况下的仿真结果. 假设两个信源为独立的最大非圆率信号 ($\rho = 1$), 快拍点数 $L = 500$, 信噪比变化区间为 -6 dB 到 10 dB.

针对初始值的选取问题, 我们给出两种初始值的获取方式: 基于辅助阵元的秩减估计器^[5] (初始值 1), 没有校正能力的 MUSIC 估计 (初始值 2), 令步长因子 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.5$, 对两个信号的角度估计结果如图 1、图 2 所示. 从这两个图可以看出, 由秩减估计器估计值为初始值进行迭代后的收敛值比选取 MUSIC 算法估计值为初始值得到的结果更优. 因为秩减估计器为次优估计, 而 MUSIC 算法在方位依赖的幅向误差影响下已经基本上失效, 选择后者会导致收敛值离最优解较远, 因此前者为初始值后的校正效果更好.

针对收敛速度问题, 我们将本文的牛顿型交替迭代算法与常规的牛顿型迭代算法进行对比, 与上一部分的实验条件相同, 选择基于辅助阵元的秩减估计器来获得初始值, 在步长因子为 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.2, \gamma = 0.2$ (步长因子 1) 和 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.5, \gamma = 0.5$ (步长因子 2) 的情况下, 统计两种迭代算法达到收敛的迭代次数平均值, 如表 1 所示, 相应的估计结果如图 3、图 4 所示. 从表 1 可以看出, 常规的牛顿型迭代算法较本文的迭代算法收敛速度略慢, 而图 3、图 4 的估计结果显示由本文的迭代算法得到的

表 1 牛顿型交替迭代算法及常规牛顿型迭代算法的迭代次数随信噪比变化

Table 1 Iteration times of our proposed method and Newton method versus the level of SNR

Step size		SNR(dB)								
		-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
Proposed method	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.2$	25. 030	24. 600	24. 280	23. 840	23. 670	23. 350	22. 950	22. 830	23. 040
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.5$	12. 280	12. 100	11. 970	11. 760	11. 720	11. 450	11. 480	11. 320	11. 350
Newton method	$\gamma = 0.2$	28. 014	27. 642	27. 368	27. 088	26. 990	26. 834	26. 850	26. 580	26. 734
	$\gamma = 0.5$	13. 232	13. 230	13. 206	13. 186	13. 096	13. 024	13. 088	13. 106	13. 062

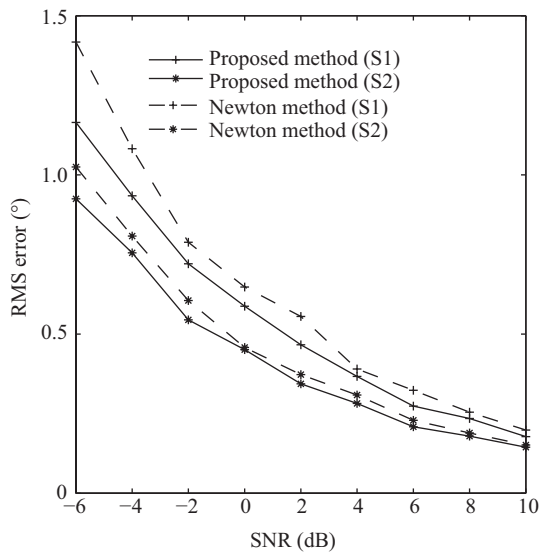


图 3 信源方位估计随信噪比的变化曲线 (步长因子 1)

Figure 3 RMS error of DOAs versus the level of SNR with the use of step size 1 (S1 and S2 are short for Source 1 and Source 2, respectively)

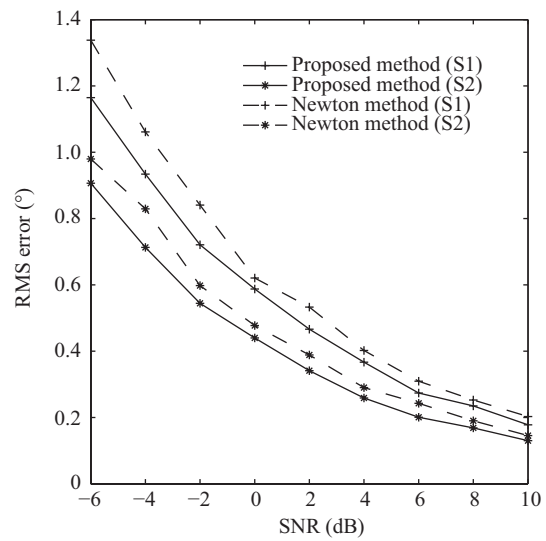


图 4 信源方位估计随信噪比的变化曲线 (步长因子 2)

Figure 4 RMS error of DOAs versus the level of SNR with the use of step size 2

估计值明显比常规牛顿型迭代算法的精度高, 这是由于当同时对信源方位和误差参数进行迭代时, 优化的参数类型较多, 若对所有参数同时迭代处理, 可能带来迭代不稳定, 收敛结果不佳。

6.2 信源时域统计特性未知

根据第一组的实验结果, 在后面的实验中我们将采用基于辅助阵元的秩减估计器来获取初始值, 迭代步长因子为 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.5$. 第二组实验主要研究 NC-COMET 算法在信源时域统计特性未知情况下的估计精度, 假设两个信源为最大非圆率信号. 首先, 固定快拍点数 $L = 500$, 信噪比为 dB, 在信源时域相关系数为到 0.9 的变化区间, 统计 NC-COMET 算法对两个非圆信号的测向均方根误差以及对幅相误差参数的相对估计误差结果, 并与基于辅助阵元的最大似然 (ML) 算法相应的估计结果进行对比, 如图 5、图 6 所示. 从图中可以看出, 本文算法对方位的估计精度较 ML 算法的略高, 对误差参数的估计精度比 ML 算法的提升明显, 而且实验值与理论值基本吻合; 两种算法对信号 1 的方位估计误差都大于对信号 2 的方位估计误差, 这是由均匀线阵本身的性质决定, 入射方向与线阵夹角越大 (与法线越近), 相应的测向精度越高, 两个信号的估计误差差异性较大则和方位依赖的幅相误差有关。

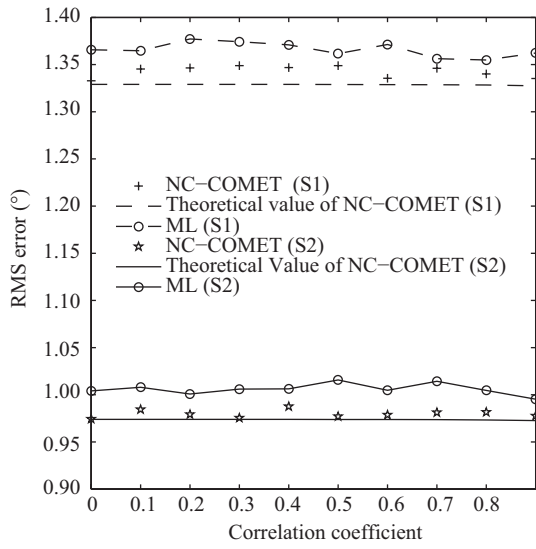


图 5 信源方位估计随相关系数的变化曲线

Figure 5 RMS error of DOAs versus the correlation coefficient

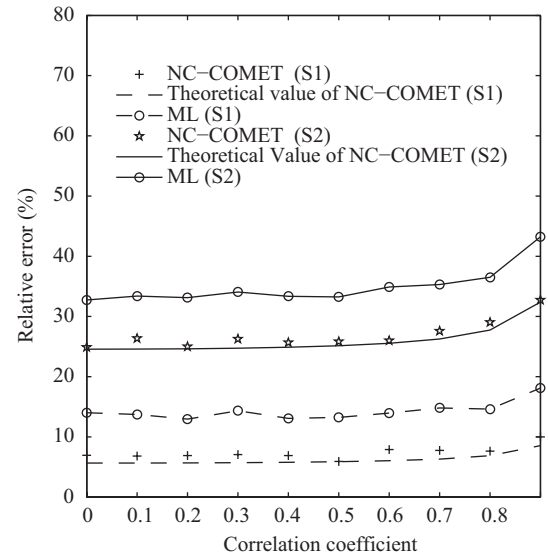
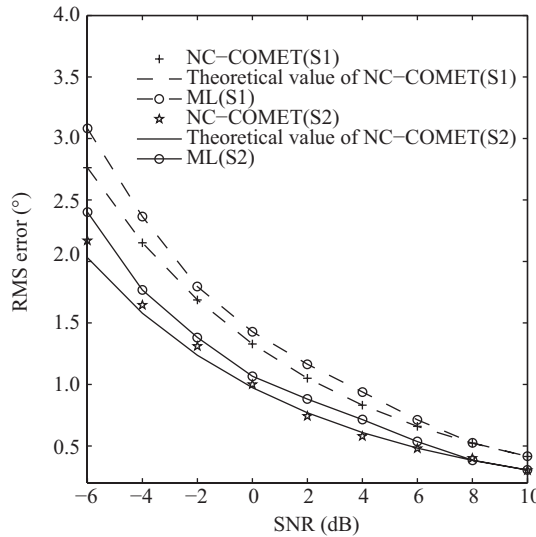
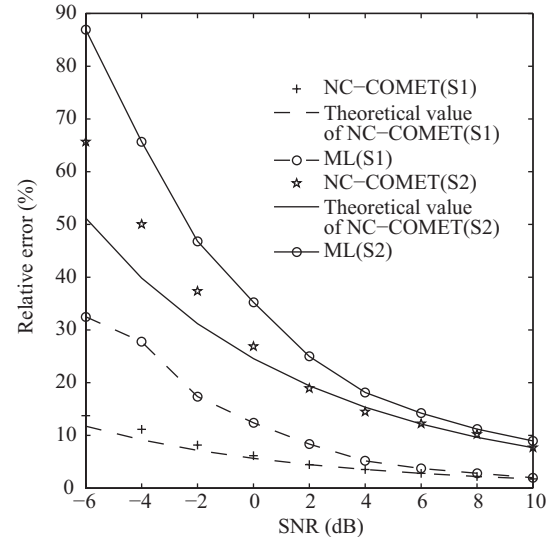


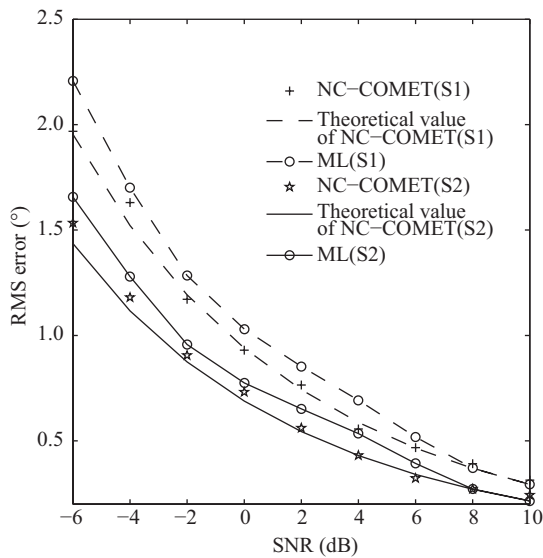
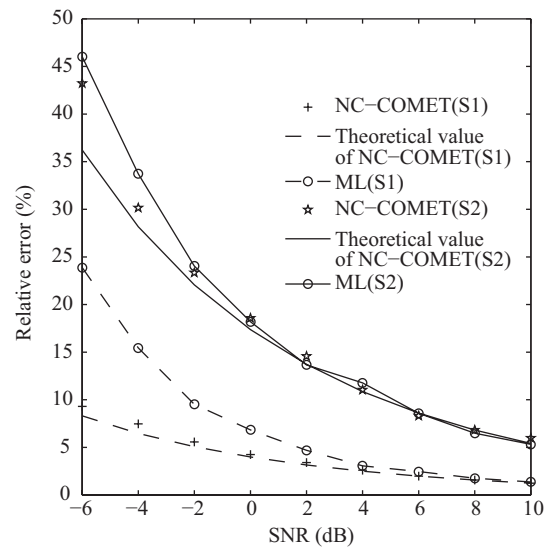
图 6 误差参数估计随相关系数的变化曲线

Figure 6 Relative error of sensor errors versus the correlation coefficient

图 7 信源方位估计随信噪比的变化曲线 ($L = 500$)Figure 7 RMS error of DOAs versus the level of SNR ($L = 500$)图 8 误差参数估计随信噪比的变化曲线 ($L = 500$)Figure 8 Relative error of sensor errors versus the level of SNR ($L = 500$)

接着, 固定两个最大非圆率信号源的相关系数为 0.6, 分别在快拍点数 $L = 500$ 和 $L = 1000$ 下, 令信噪比在 -6 dB 到 10 dB 变化, 对基于辅助阵元的最大似然 (ML) 算法和 NC-COMET 算法进行实验仿真, 并与理论值曲线作对比, 图 7、图 8 分别给出了快拍点数 $L = 500$ 时, 两个信号的信源方位, 幅相误差参数的估计结果. 图 9、图 10 分别给出了快拍点数 $L = 1000$ 时, 两个信号的信源方位, 幅相误差参数的估计结果.

从以上 4 个图可以看出, 无论哪一种算法, 其估计误差都是与信噪比、快拍点数成反比, 这与常

图 9 信源方位估计随信噪比的变化曲线 ($L = 1000$)Figure 9 RMS error of DOAs versus the level of SNR ($L = 1000$)图 10 误差参数估计随信噪比的变化曲线 ($L = 1000$)Figure 10 Relative error of sensor errors versus the level of SNR ($L = 1000$)表 2 信源时域统计特性未知情况下本文算法的方位估计均方误差及非圆 CRB 随信噪比变化 ($L = 1000$)Table 2 The estimation variance of DOAs and the associated CRB for noncircular sources versus the level of SNR in the absence of time-domain statistical information ($L = 1000$)

Variance		SNR(dB)								
		-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
Source 1	R_{θ_1}	3.816	2.315	1.423	0.883	0.551	0.346	0.217	0.137	0.086
	CRB_{θ_1}	3.816	2.315	1.423	0.883	0.551	0.346	0.217	0.137	0.086
Source 2	R_{θ_2}	2.061	1.247	0.765	0.474	0.296	0.185	0.116	0.073	0.046
	CRB_{θ_2}	2.061	1.247	0.765	0.474	0.296	0.185	0.116	0.073	0.046

识以及均方误差表达式 (56) 都是统一的; 信噪比越低, NC-COMET 算法的性能曲线较基于辅助阵元的最大似然 (ML) 算法的性能曲线差异越大, 说明 NC-COMET 算法对于低信噪比有更强的鲁棒性, NC-COMET 算法的估计精度优势与其较高的数据利用率也有着密切的关系 (见不等式 (61)); 此外, 对比图 7 和 9 或者图 8 和 10, 不难发现 NC-COMET 算法的估计误差在高信噪比、大快拍点数下, 与其理论值更加接近, 这是因为一阶误差分析方法在高信噪比和大快拍点数下对精度预测的更加准确。

在上文中提到, 最优权值的协方差匹配估计器可看作是最大似然算法的一种实现, 其估计精度能够逼近相应的克拉美罗界, 因此在信源时域统计特性未知情况下, 我们将本文算法对方位估计的均方误差 (理论值) 和非圆信号的克拉美罗界 (见文献 [25]) 进行对比, 结果如表 2 所示, 将本文算法对幅相误差参数估计的均方误差 (理论值) 和相应的克拉美罗界对比, 结果如表 3 所示。从以下两表中, 可以看出本算法对参数估计的均方误差理论值与克拉美罗界是相等的。

6.3 信源时域统计独立特性先验已知

第三组实验主要研究信源时域统计独立特性先验已知的情况, 迭代的初始值也通过基于辅助阵元的秩减估计器 [5] 获得。本组实验中, 假设两个独立的非圆率信号同时入射, 首先令快拍点数

表 3 信源时域统计特性未知情况下本文算法的幅相误差参数估计均方误差及非圆 CRB 随信噪比变化 ($L = 1000$)

Table 3 The estimation variance of sensor errors and the associated CRB for noncircular sources versus the level of SNR in the absence of time-domain statistical information ($L = 1000$)

Variance		SNR(dB)								
		-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
Source 1	R_{τ_1}	0.0224	0.0136	0.0084	0.0052	0.0032	0.0020	0.0013	0.0008	0.0005
	CRB_{τ_1}	0.0224	0.0136	0.0084	0.0052	0.0032	0.0020	0.0013	0.0008	0.0005
Source 2	R_{τ_2}	0.0392	0.0237	0.0145	0.0090	0.0056	0.0035	0.0022	0.0014	0.0009
	CRB_{τ_2}	0.0392	0.0237	0.0145	0.0090	0.0056	0.0035	0.0022	0.0014	0.0009

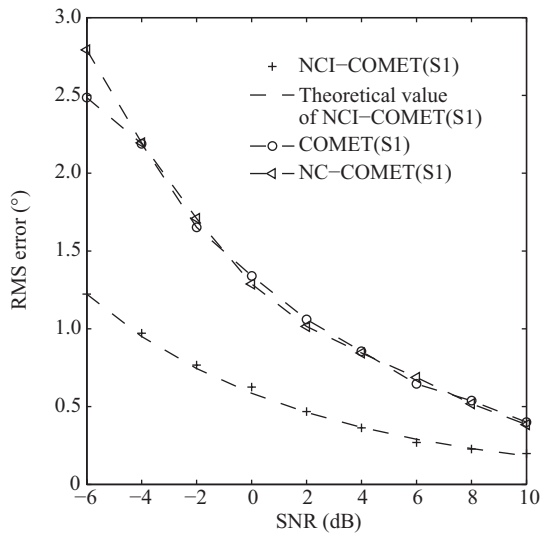


图 11 信号 1 的信源方位估计随信噪比的变化曲线 ($L = 500$)

Figure 11 RMS error of DOA of Source 1 (S1) versus the level of SNR ($L = 500$)

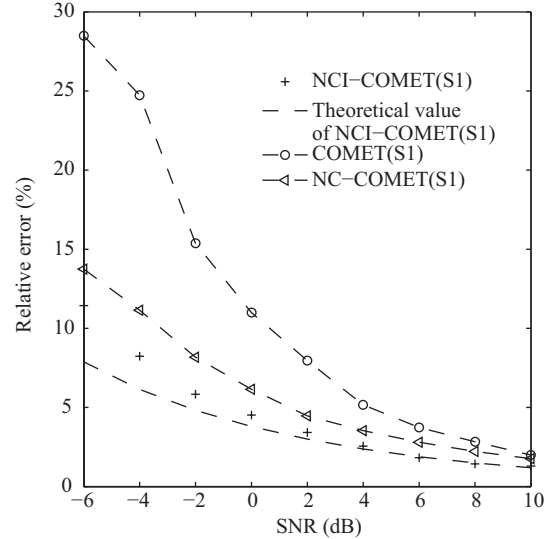


图 12 信号 1 的误差参数估计随信噪比的变化曲线 ($L = 500$)

Figure 12 Relative error of sensor errors of Source 1 (S1) versus the level of SNR ($L = 500$)

$L = 500$, 分别统计本文的 NCI-COMET 算法和 NC-COMET 算法、基于辅助阵元的 COMET 算法的估计性能随信噪比的变化情况, 并与 NCI-COMET 算法的理论性能进行对比. 信号 1 的信源方位、幅相误差参数估计结果分别如图 11、图 12 所示, 信号 2 的估计结果如图 13、图 14 所示.

其次, 令快拍点数 $L = 1000$, 同样对三种算法的估计性能随信噪比的变化进行仿真, 图 15~18 依次给出了对两个信号源的估计误差曲线. 从图 11~18 中我们可以得到以下结论: NCI-COMET 算法的估计误差实验值和理论值的拟合度较高, 同样信噪比越高, 拟合的程度更好, 尤其在 $L = 1000$ 的条件下, 实验值和理论值曲线基本重合; NCI-COMET 算法的方位估计精度、误差参数估计精度均高于 NC-COMET 算法和 COMET 算法, 尤其是在低信噪比的条件下. 由于 NCI-COMET 算法较 NC-COMET 算法更好地利用了时域统计信息, 较 COMET 算法有效利用了信源的非圆特性, 使得其估计性能比另外两种算法有明显的提升, 这与我们对三者数据利用率的比较结果也是相一致的 (见不等式 (61)).

由非圆信号模型的 (3) 式给出了非圆率的定义, 它是非圆信号的一个重要参数, 因此我们也通过实验仿真研究了非圆率对 NCI-COMET 算法的校正精度影响. 固定信噪比为 10 dB, 快拍点数为 $L = 500$, 令两个独立的信号从圆信号过渡为最大非圆率信号 (非圆率从变为 1), 作出 NCI-COMET 算

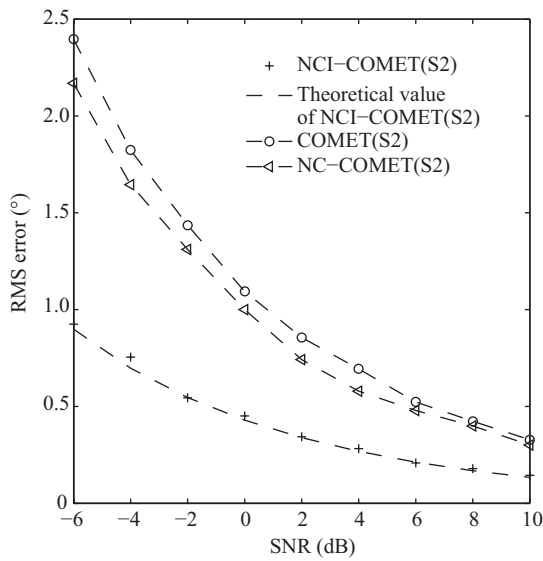


图 13 信号 2 的信源方位估计随信噪比的变化曲线 ($L = 500$)

Figure 13 RMS error of DOA of Source 2 (S2) versus the level of SNR ($L = 500$)

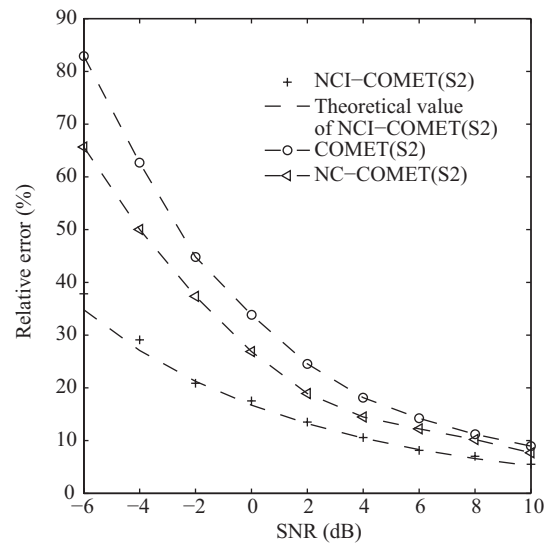


图 14 信号 2 的误差参数估计随信噪比的变化曲线 ($L = 500$)

Figure 14 Relative error of sensor errors of Source 2 (S2) versus the level of SNR ($L = 500$)

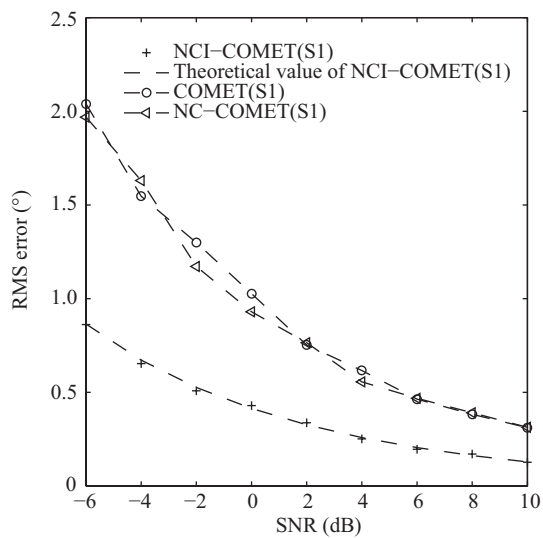


图 15 信号 1 的信源方位估计随信噪比的变化曲线 ($L = 1000$)

Figure 15 RMS error of DOA of Source 1 (S1) versus the level of SNR ($L = 1000$)

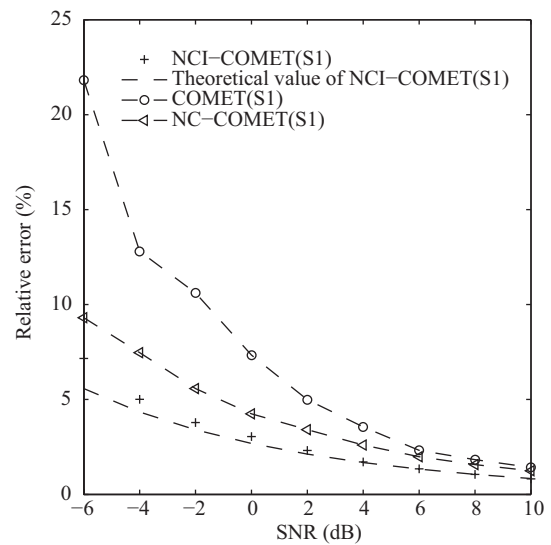


图 16 信号 1 的误差参数估计随信噪比的变化曲线 ($L = 1000$)

Figure 16 Relative error of sensor errors of Source 1 (S1) versus the level of SNR ($L = 1000$)

法和 COMET 算法对两个信源的估计性能曲线. 图 19 为信源方位的估计结果, 图 20 为幅相误差参数的估计结果. 图 19、图 20 都显示在任一非圆率下, NCI-COMET 算法的估计精度均优于 COMET 算法, COMET 算法没有利用非圆特性, 因此其估计误差不受非圆率的影响, 然而 NCI-COMET 算法的校正精度随着非圆率的增大而有所提升, 这是因为非圆率越大, 非圆特性越加突出, 从而更能体现出 NCI-COMET 的性能优势.

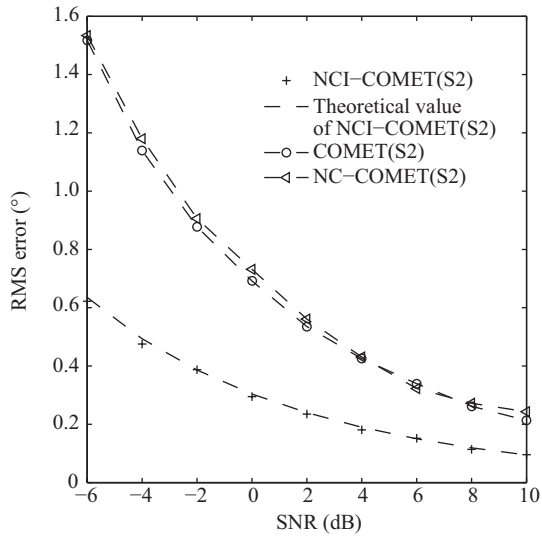


图 17 信号 2 的信源方位估计随信噪比的变化曲线 ($L = 1000$)

Figure 17 RMS error of DOA of Source 2 (S2) versus the level of SNR ($L = 1000$)

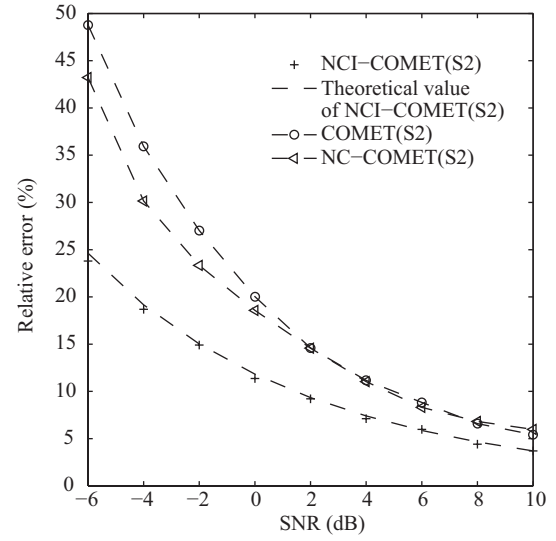


图 18 信号 2 的误差参数估计随信噪比的变化曲线 ($L = 1000$)

Figure 18 Relative error of sensor errors of Source 2 (S2) versus the level of SNR ($L = 1000$)

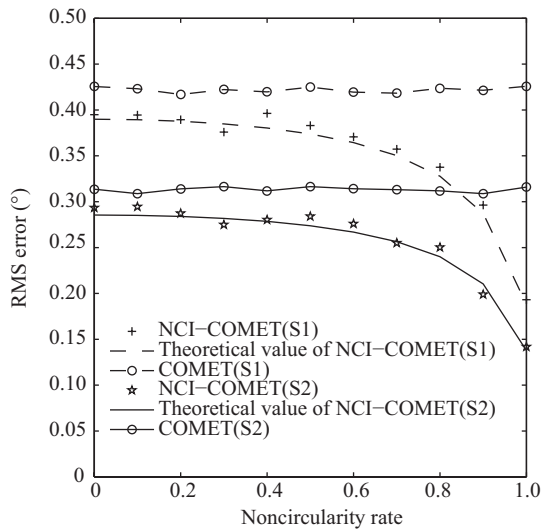


图 19 信源方位估计随信号非圆率的变化曲线

Figure 19 RMS error of DOAs versus noncircularity rate

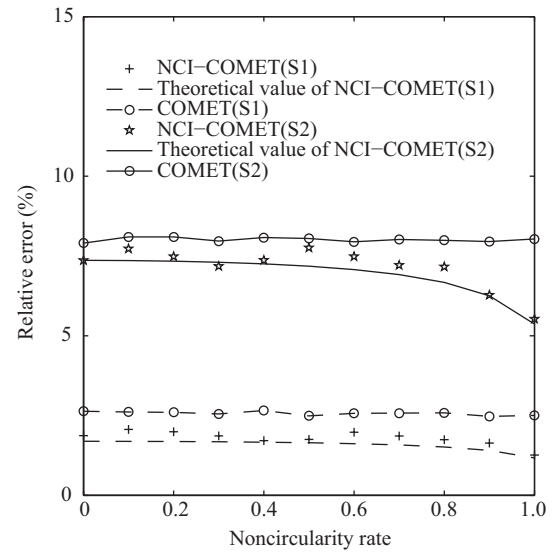


图 20 误差参量估计随信号非圆率的变化曲线

Figure 20 Relative error of sensor errors versus noncircularity rate

此外, 从信源时域统计特性未知和信源时域统计独立特性先验已知这两种情况的实验结果, 我们还能够获知在相同条件下, NCI-COMET 算法较 COMET 算法的性能提升, 比 NC-COMET 算法较 ML 算法的性能提升更为显著. 该实验结果与他们的数据利用率的关系是一致的 (见式 (61) 和式 (62)), 由于 NCI-COMET 算法的数据利用率大约是 COMET 算法的 2 倍, 而 NC-COMET 算法的数据利用率仅比 ML 算法稍高, 故 NCI-COMET 算法数据利用率的明显增大带来了其估计精度的明显提升.

7 结论

本文根据协方差匹配估计器的基本思想, 结合非圆信号具有椭圆协方差矩阵不为零的特征, 针对方位依赖幅相误差的校正问题, 考虑到信源时域统计特性未知和时域统计独立特性先验已知两种情况, 提出了一种改进的 COMET 自校正算法: NC-COMET 算法, 并证明了该算法对参数的估计具有统计一致性. 由于实际中无法避免有限采样的影响, 本文又采用一阶泰勒级数展开的方式, 理论推导了有限采样影响下该算法对参数估计的均方误差表达式. 另外, 本文给出了关于算法“数据利用率”的定义, 分析得到结论: 利用时域统计特性的 NCI-COMET 算法的数据利用率最大, NC-COMET 算法的数据利用率是 ML 算法的一倍多, NCI-COMET 算法的数据利用率是 COMET 算法的两倍左右, 当入射信号个数为 1 时, NCI-COMET 算法与 NC-COMET 算法等价.

通过实验仿真对比了信源时域统计特性未知和时域统计独立特性先验已知条件下, 本文算法与基于辅助阵元的方位依赖幅相误差最大似然自校正方法^[12]在有限采样影响下的估计性能. 大量实验表明: 在时域统计特性未知情况下, NC-COMET 算法较 ML 算法在低信噪比下具有更强的鲁棒性, 在高信噪比和大快拍个数条件下与理论值拟合度较高; 在信源时域统计独立特性先验已知的情况下, NCI-COMET 算法较 COMET 算法的校正精度提升明显, 尤其对于大非圆率信号, 并且信源方位的估计误差以及幅相误差参数的估计误差都与理论值基本重合; 对于独立的非圆信号, 利用时域统计独立特性的 NCI-COMET 算法比 NC-COMET 算法的估计性能更优. 上述研究说明, 若尽可能地利用信源的多域特征, 有利于进一步提高算法对阵列误差的校正精度.

参考文献

- Charge P, Wang Y, Saillard J. A noncircular sources direction finding method using polynomial rooting. *Signal Process*, 2001, 81: 1765–1770
- Harardt M, Romer F. Enhancements of unitary ESPRIT for non-circular sources. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 2004. 101–104
- Chen X, G Song A, M Liu J. Maximum likelihood algorithm for direction-of-arrival estimation of noncircular signals. *Mod Radar*, 2011, 33: 51–54 [陈相国, 宋爱民, 刘剑. 基于非圆信号波达方向估计的最大似然算法. *现代雷达*, 2011, 33: 51–54]
- Charge P, Wang Y D, Saillard J. A direction finding method under sensor gain and phase uncertainties. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Istanbul 2000. 3045–3048
- Wang B H, Wang Y L, Chen H. Array calibration of angularly dependent gain and phase uncertainties with carry-on instrumental sensors. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2004, 47: 777–792
- Wang B, Wang Y L, Guo Y. Mutual coupling calibration with instrumental sensors. *Electron Lett*, 2004, 4: 373–374
- Ottersten B, Stoica P, Roy R. Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications. *Digit Signal Process* 1998, 8: 185–210
- Boonstra A J, van der Veen A J. Gain calibration methods for radio telescope arrays. *IEEE Trans Signal Proces*, 2003, 51: 25–38
- Wijnholds S J, Boonstra A J. A multisource calibration method for phased array radio telescopes. In: *Proceedings of 4th IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-Channel Processing*, Waltham 2006, 200–204
- Wang D. Research on the errors calibration techniques in the array signal processing. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2011 [王鼎. 阵列信号处理中的误差校正技术研究. 郑州: 信息工程大学, 2011]
- Wang D, Pan M, Wu Y. Maximum likelihood self-calibration for direction-dependent gain-phase errors with carry-on instrumental sensors: case of deterministic signal model. *J Commun* 2011, 32: 34–47 [王鼎, 潘苗, 吴瑛. 基于辅助阵元的方位依赖幅相误差最大似然自校正: 针对确定信号模型. *通信学报*, 2011, 32: 34–47]
- Wang B H, Wang Y L, Chen H. Array calibration of angularly dependent gain and phase uncertainties with instrumental sensors. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology* 2003, 182–186

- 13 Liao B, Liao G S. Method for array gain and phase uncertainties calibration based on ISM and ESPRIT J Syst Eng Electron 2009, 20: 223–228
- 14 Zheng C D, Feng D Z, Lei G. DOA estimation algorithm for non-circular sources using real-value algorithm. J Data Acquisi Process, 2009, 24: 193–197 [郑春弟, 冯大政, 雷革. 一种利用非圆信号特点的实值 DOA 估计算法数据采集与处理, 2009, 24: 193–197]
- 15 Liu J, Yu H Q, Huang Z T, et al. Performance analysis of the MUSIC algorithm for noncircular signals with modeling errors Acta Electron Sin 2008, 36: 2280–2284 [刘剑, 于红旗, 黄知涛, 等. 模型误差对非圆信号测向 MUSIC 算法性能的影响. 电子学报, 2008, 36: 2280–2284]
- 16 Zhang X D. Matrix Analysis and Application Beijing: Tsinghua University Press, 2004 [张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004]
- 17 Liu J. DOA estimation algorithms for noncircular signals using sensor arrays. Changsha: National University of Defense Technology, 2007 [刘剑. 非圆信号波达方向估计算法研究长沙: 国防科学技术大学, 2007]
- 18 Picinbono B. On circularity. IEEE Trans Signal Proces 1994, 24: 3473–3482
- 19 Wang Y L, Chen H, Peng Y N, et al. The Theory and Calculation of Spatial Spectrum Estimation. Beijing: Tsinghua University Press, 2005 [王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法. 北京: 清华大学出版社, 2005]
- 20 Delmas J P. Asymptotically minimum variance second-order estimation for noncircular signals with application to DOA estimation IEEE Trans Signal Proces, 2004, 52: 1235–1241
- 21 Liu C, Ye Z F Zhang Y F. Auto-calibration algorithm for mutual coupling of planar array. Signal Process, 2010, 90: 784–794
- 22 Hu X Q, Chen H Wang Y L, et al. A self-calibration algorithm for cross array in the presence of mutual coupling Sci China Inf Sci, 2011, 54: 836–848
- 23 Liang J L, Zeng X J, Wang W Y, et al. L-shaped array-based elevation and azimuth direction finding in the presence of mutual coupling Signal Process, 2011, 91: 1319–1328
- 24 Schmidt R O. Multilinear array manifold interpolation. IEEE Trans Signal Proces, 1992, 40: 857–866
- 25 Delmas J P, Abeida H. Stochastic CramérRao bound for noncircular signals with application to DOA estimation. IEEE Trans Signal Proces 2004, 52: 3192–3199

附录 A 式 (15) 的证明

这里只证明第一个表达式, 其他三个同理可证.

将 $\mathbf{r}$ 依次分为 M 段, 令 $\mathbf{r}_i \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 表示其第 i 个矢量, 则 $\mathbf{r}_{L,i} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t) \mathbf{x}_i^*(t)$, 其中 $\mathbf{x}_i(t)$ 表示 $\mathbf{x}(t)$ 第 i 个元素. 根据四阶累积量的定义, 可作如下展开:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{r}_{L,i} \mathbf{r}_{L,j}^H \right\} &= \frac{1}{L^2} \mathbf{E} \left\{ \sum_{t_1=1}^L \mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}_i^*(t_1) \sum_{t_2=1}^L \mathbf{x}_j(t_2) \mathbf{x}^H(t_2) \right\} \\ &= \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j^H + \frac{1}{L} \left((\mathbf{R}_x^T)_{ij} \mathbf{R}_x + \tilde{\mathbf{r}}_j \tilde{\mathbf{r}}_i^H + \begin{bmatrix} \text{Cum} \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_1^* \} & \cdots & \text{Cum} \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_M^* \} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cum} \{ \mathbf{x}_M, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_1^* \} & \cdots & \text{Cum} \{ \mathbf{x}_M, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_M^* \} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

由于 $[\mathbf{R}_4]_{(k_1-1)M+k_2, (k_3-1)M+k_4} = \text{Cum} \{ \mathbf{x}_{k_1}^*, \mathbf{x}_{k_2}, \mathbf{x}_{k_3}, \mathbf{x}_{k_4}^* \}$, 因此

$$\text{Cum} \{ \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k^* \} = \text{Cum} \{ \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k^* \} = [\mathbf{R}_4]_{(i-1)M+l, (j-1)M+k} \quad l, k = 1, 2, \dots, M, \quad (\text{A2})$$

进一步有

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_r]_{(i-1)M+1:iM, (j-1)M+1:jM} &= \mathbf{E} \left\{ \sqrt{L}(\mathbf{r}_{L,i} - \mathbf{r}_i) \sqrt{L}(\mathbf{r}_{L,j} - \mathbf{r}_j)^H \right\} \\ &= (\mathbf{R}_x^T)_{ij} \mathbf{R}_x + \tilde{\mathbf{r}}_j \tilde{\mathbf{r}}_i^H + [\mathbf{R}_4]_{(i-1)M+1:iM, (j-1)M+1:jM}. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

根据简单的变换推导, 上式就能够推出

$$\mathbf{C}_r = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \sqrt{L}(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}) \sqrt{L}(\mathbf{r}_L - \mathbf{r})^H \right\} = \mathbf{R}_x^T \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{K} (\mathbf{R}'_x \otimes \mathbf{R}'_x^*) + \mathbf{R}_4. \quad (\text{A4})$$

附录 B 式 (18) 的证明

根据矩阵向量化公式^[25] $\text{vec}[\mathbf{ACD}] = (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}[\mathbf{C}]$, 可以将 $\mathbf{r}$ 和 $\tilde{\mathbf{r}}$ 展开为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \text{vec}[\mathbf{R}_x] = \text{vec}[\mathbf{B}\mathbf{R}_s\mathbf{B}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_M] = (\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B})\mathbf{r}_s + \sigma_n^2\text{vec}[\mathbf{I}_M], \\ \tilde{\mathbf{r}} = \text{vec}[\mathbf{R}'_x] = \text{vec}[\mathbf{B}\mathbf{R}'_s\mathbf{B}^T] = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\tilde{\mathbf{r}}_s, \end{cases} \quad (\text{B1})$$

继而有

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{S}\text{vec}[\mathbf{R}'_x] = \mathbf{S}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\tilde{\mathbf{r}}_s = \mathbf{S}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{r}}'_s, \\ \tilde{\mathbf{r}}'^* = \mathbf{S}\text{vec}[\mathbf{R}'^*_x] = \mathbf{S}(\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)\tilde{\mathbf{r}}^*_s = \mathbf{S}(\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{r}}'^*_s. \end{cases} \quad (\text{B2})$$

因而我们得到 $\mathbf{r}_y$ 与 Θ_2 的关系

$$\mathbf{r}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{r}}' \\ \tilde{\mathbf{r}}'^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{vec}[\mathbf{I}_M] \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s \\ \tilde{\mathbf{r}}'_s \\ \tilde{\mathbf{r}}'^*_s \\ \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \Psi(\Theta_1)\Theta_2. \quad (\text{B3})$$

附录 C 关于辅助阵元个数的证明

这里针对一般情况 ($\mathbf{R}_x\mathbf{R}'_x$ 没有特殊矩阵形式, 即观测数据构造的方程独立), 分别讨论信源时域统计特性未知和时域统计独立特性先验已知时本文算法所需辅助阵元个数与基于辅助阵元的最大似然自校正算法^[10]所需的辅助阵元个数的大小关系.

首先, 就信源时域统计特性未知的情况, 对 NC-COMET 算法所需辅助阵元个数 $P_{\text{NC-COMET}}$ 与未利用非圆特性的 ML 算法所需辅助阵元个数 P_{ML} 进行比较. 由假设 2 中式 (26) 经过化简得到保证 NC-COMET 算法校正成功的辅助阵元个数满足

$$2P_{\text{NC-COMET}}N \geq 2N^2 + 2MN - 2M^2 + 2N - M + 1. \quad (\text{C1})$$

此外, 为了保证假设条件 1, 也就是确保 $\mathbf{b}(\theta_n, \tau_n)$ 的唯一可辨识性, 至少需要 2 个辅助阵元, 则 $P_{\text{NC-COMET}}$ 最小取值为 $(P_{\text{NC-COMET}})_{\min} = \max\{\lceil \frac{2N^2+2MN-2M^2+2N-M+1}{2N} \rceil, 2\}$, 符号 $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整数.

同理, 为使 ML 算法的独立方程个数不小于未知参量维数, 我们得到 ML 算法的辅助阵元个数需要满足的条件:

$$2P_{\text{ML}}N \geq N^2 + 2MN - M^2 + 3N + 1, \quad (\text{C2})$$

则 P_{ML} 最小取值为 $(P_{\text{ML}})_{\min} = \max\{\lceil \frac{N^2+2MN-M^2+3N+1}{2N} \rceil, 2\}$.

比较 (C1) 与 (C2) 不等式的右边项, 可知

$$2N^2 + 2MN - 2M^2 + 2N - M - (N^2 + 2MN - M^2 + 3N) = (N - M)(N + M + 1) < 0, \quad (\text{C3})$$

式中, 不等号由 $N < M$ 保证 (若 $N \geq M$, 则无法满足校正成功条件). 上式说明 ML 算法对最小辅助阵元个数的要求高于 NC-COMET 算法, 因此有

$$\text{NC-COMET}. \quad (\text{C4})$$

其次, 比较信源时域统计独立特性先验已知的情况, 对 NCI-COMET 算法所需辅助阵元个数 $P_{\text{NCI-COMET}}$ 与未利用非圆特性的 COMET 算法所需辅助阵元个数 P_{COMET} 进行比较. 由假设 2 中式 (27) 经过化简得到保证 NCI-COMET 算法校正成功的辅助阵元个数满足:

$$2P_{\text{NCI-COMET}}N \geq 4N + 2MN - 2M^2 - M + 1, \quad (\text{C5})$$

则 $P_{\text{NCI-COMET}}$ 最小取值为 $(P_{\text{NCI-COMET}})_{\min} = \max\{\lceil \frac{4N+2MN-2M^2-M+1}{2N} \rceil, 2\}$. 同理, COMET 算法的辅助阵元个数条件为

$$2P_{\text{COMET}}N \geq 2N + 2MN - M^2 + 1. \quad (\text{C6})$$

则 P_{COMET} 最小取值为 $(P_{\text{COMET}})_{\min} = \max\{\lceil \frac{2N+2MN-M^2+1}{2N} \rceil, 2\}$. 比较 (C5), (C6) 两不等式的右边项, 在保证校正成功的条件下, 有

$$4N + 2MN - 2M^2 - M + 1 < 2N + 2MN - M^2 + 1. \quad (\text{C7})$$

将上式代入 $(P_{\text{NCI-COMET}})_{\min}, (P_{\text{COMET}})_{\min}$ 表达式, 得到

$$(P_{\text{NCI-COMET}})_{\min} \leq (P_{\text{COMET}})_{\min}. \quad (\text{C8})$$

综上, 证明了本文算法所需的最小辅助阵元个数是小于同情况下基于辅助阵元的最大似然自校正算法^[10] (ML 算法和 COMET 算法) 所需的最小辅助阵元个数的.

Auto-calibration method based on covariance matching estimation for noncircular sources and its performance analysis

YIN JieXin*, WU Ying & WANG Ding

Institute of Information System Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China

*E-mail: Cindyin0807@163.com

Abstract An improved direction-finding algorithm for noncircular signals was proposed in the presence of angularly dependent gain and phase errors, which is called NC-COMET based on the fundamental principle of covariance matching estimation technique (COMET) by using instrumental sensors for achieving autocalibration. The proposed algorithm is effective in the absence of time-domain statistical information as well as in the presence of statistical independent information of sources. By applying the data of extended covariance matrix of noncircular signals, its calibration accuracy is improved significantly compared with conventional maximum likelihood algorithm which does not take advantage of noncircular feature, and the minimum number of the needed instrumental sensors is decreased. The performance study on NC-COMET proved the statistical consistency of the parameter estimation, and a theoretical derivation for the closed-form expression of the mean square error (MSE) of NC-COMET estimation was presented under the influence of finite samples by the first-order analysis. In addition the definition of "signal utilization rate" was given and the signal utilization rate of NC-COMET algorithm was certified to be higher than that of the conventional maximum likelihood algorithm by quantitative comparison. The simulation results also showed the performance advantages of NC-COMET algorithm over conventional maximum likelihood algorithm. The proposed algorithm is more robust with respect to low signal-to-noise ratio, and its estimation is much more precise in the presence of statistical independent information of sources or when the sources have larger circularity rate.

Keywords angularly dependent gain and phase errors, COMET, noncircular signal, instrumental sensors, finite samples, signal utilization rate



YIN JieXin was born in 1989. She received the Master degree in engineering from the PLA Information Engineering University, Zhengzhou city, in 2014. Currently, She is studying for a doctor's degree. Her research interests include array signal processing and digital signal processing.