

基于角度信息的约束总体最小二乘 无源定位算法

王 鼎* 张 莉 吴 瑛

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

摘要 提出了一种基于角度信息的约束总体最小二乘无源定位算法. 该算法首先将非线性的观测方程转化为线性方程, 并分析了观测噪声对线性方程系数的影响, 从而能够将无源定位问题等价为一个约束总体最小二乘问题, 然后又将该有约束的优化问题变为无约束的优化问题, 并利用 Newton 算法进行迭代求解, 最后分析了约束总体最小二乘算法的定位误差. 计算机仿真结果验证了该算法的可行性和有效性.

关键词 无源定位 约束总体最小二乘算法 Newton 算法

在电子战中, 对辐射源进行定位与跟踪有重要的作用, 而采用无源定位的方法对运动辐射源进行定位则更有意义 [1,2]. 由于测量噪声的存在, 如何在这种情况下进一步提高无源定位的定位精度成为许多学者普遍关心的问题. 目前无源定位系统按照观测站的数目可以分为以下两类: 多站无源定位和单站无源定位 [3], 由于多站无源定位需要多站同步工作和数据传送, 从而使系统的工作较多地依靠站间的通信情况, 所以多站无源定位一直未能引起人们的足够重视. 随着微处理器性能及网络技术的不断提高, 站间通信已不再成为制约多站无源定位技术发展的瓶颈, 并且由于多站测量能够得到比单站测量更多的信息, 有助于提高定位的精度, 因此多站无源定位已成为一个重要的研究方向.

在多站无源定位中, 角度信息是无源定位中最基本的观测量, 许多被动式探测器(如红外、声呐等)只能得到角度信息 [4], 因此研究基于角度信息的多站无源定位算法是具有实际意义的. 多站测向交叉定位 [3]是常用的定位方法, 它实质上是一种解析的方法, 即通过三维空间中的几何关系计算出目标的位置. 该方法虽然

收稿日期: 2005-11-01; 接受日期: 2006-04-25

* E-mail: wang_ding814@yahoo.com.cn

计算简单,但是定位精度并不高.线性化加权最小二乘算法^[5]也是一种常见的定位算法,它首先需要获得目标位置的初始估计值,再通过Taylor展开将非线性的观测方程变为线性方程,进而利用加权最小二乘算法求解.因此该算法的定位精度取决于初始估计值的精度,当初始估计值比较精确时,该算法可以获得近似无偏估计值^[5],而当初始估计值误差较大时,Taylor展开会带来较大的线性化误差,从而影响定位精度.为了提高定位精度可以将算法得到的估计值作为新的初始值,再在该点进行Taylor展开,得到新的估计值,并反复迭代下去直至收敛为止.但是这必然会带来较大的计算量,并且容易陷入局部最小值.本文提出了一种新的基于角度信息的无源定位算法——约束总体最小二乘^[6,7]无源定位算法.该算法将无源定位问题转化为一个约束总体最小二乘问题,并将该有约束的优化问题转化为无约束的优化问题,然后利用Newton算法^[8]进行迭代求解,最后分析了约束总体最小二乘算法的定位误差.计算机仿真结果验证了该算法的可行性和有效性.

本文的内容组织如下,第一部分介绍基于角度信息进行无源定位的数学模型,第二部分给出约束总体最小二乘定位算法,第三部分给出算法的误差分析,第四部分给出仿真结果,结论在第五部分给出.

1 基于角度信息进行无源定位的数学模型

图1为基于角度信息的无源定位示意图,图中共有 N 个观测站,第 i 个站的坐标为 (x_i, y_i, z_i) ,目标的坐标为 (x^*, y^*, z^*) ,并且该站估计出目标的方位角和仰角分别为 θ_i 和 ψ_i ,目标相对于该站的真实方位角和仰角分别为 θ_i^* 和 ψ_i^* ,则可以得到如下非线性方程组:

$$\begin{cases} \theta_i^* = \arctan \frac{y^* - y_i}{x^* - x_i}, \\ \psi_i^* = \arctan \frac{z^* - z_i}{\sqrt{(y^* - y_i)^2 + (x^* - x_i)^2}}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

不难证明方程组(1)等价于如下线性方程组:

$$\begin{cases} \sin \theta_i^* x_i^* - \cos \theta_i^* y_i^* = \sin \theta_i^* x_i - \cos \theta_i^* y_i, \\ \cos \theta_i^* \sin \psi_i^* x_i^* + \sin \theta_i^* \sin \psi_i^* y_i^* - \cos \psi_i^* z_i^* = \cos \theta_i^* \sin \psi_i^* x_i + \sin \theta_i^* \sin \psi_i^* y_i - \cos \psi_i^* z_i, \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (2)$$

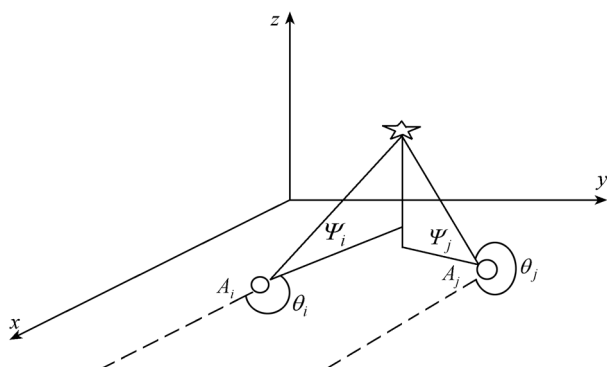


图 1 基于角度信息的无源定位示意图

该线性方程组可以写成矩阵的形式如下:

$$\mathbf{H}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{Y}^*, \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} \sin \theta_1^* & -\cos \theta_1^* & 0 \\ \cos \theta_1^* \sin \psi_1^* & \sin \theta_1^* \sin \psi_1^* & -\cos \psi_1^* \\ \sin \theta_2^* & -\cos \theta_2^* & 0 \\ \cos \theta_2^* \sin \psi_2^* & \sin \theta_2^* \sin \psi_2^* & -\cos \psi_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \theta_N^* & -\cos \theta_N^* & 0 \\ \cos \theta_N^* \sin \psi_N^* & \sin \theta_N^* \sin \psi_N^* & -\cos \psi_N^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \sin \theta_1^* x_1 - \cos \theta_1^* y_1 \\ \cos \theta_1^* \sin \psi_1^* x_1 + \sin \theta_1^* \sin \psi_1^* y_1 - \cos \psi_1^* z_1 \\ \sin \theta_2^* x_2 - \cos \theta_2^* y_2 \\ \cos \theta_2^* \sin \psi_2^* x_2 + \sin \theta_2^* \sin \psi_2^* y_2 - \cos \psi_2^* z_2 \\ \vdots \\ \sin \theta_N^* x_N - \cos \theta_N^* y_N \\ \cos \theta_N^* \sin \psi_N^* x_N + \sin \theta_N^* \sin \psi_N^* y_N - \cos \psi_N^* z_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^* = [x^*, y^*, z^*]^T.$$

由于实际角度的估计值与真实值总是存在误差的, 因此无法得到 $\mathbf{H}^*$ 和 $\mathbf{Y}^*$, 只能得到受噪声干扰的矩阵 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{Y}$ (即用估计值 θ_i 和 ψ_i 代替矩阵 $\mathbf{H}^*$ 和 $\mathbf{Y}^*$ 中的 θ_i^* 和 ψ_i^*), 若只考虑向量 $\mathbf{Y}$ 的噪声干扰, 则可以得到最小二乘意义下的解为

$$\mathbf{X}_{LS} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}. \quad (4)$$

若同时考虑 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的噪声干扰, 并且假设噪声的各分量统计独立, 则可以得到总体最小二乘意义下的解为

$$\mathbf{X}_{\text{TLS}} = [\mathbf{v}_4(2)/\mathbf{v}_4(1), \mathbf{v}_4(3)/\mathbf{v}_4(1), \mathbf{v}_4(4)/\mathbf{v}_4(1)]^T, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{v}_4$ 为矩阵 $[-\mathbf{YH}]$ 进行奇异值分解后, 最小的奇异值所对应的右奇异向量, $\mathbf{v}_4(i)$ 为向量 $\mathbf{v}_4$ 的第 i 个元素.

仔细观察不难发现, $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的噪声分量并不统计独立, 为了得到它们之间的关系, 不妨令

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_i^* + n_i, \\ \psi_i = \psi_i^* + m_i. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_i^* = \theta_i - n_i, \\ \psi_i^* = \psi_i - m_i. \end{cases} \quad (6)$$

其中 n_i 和 m_i 分别是方位角和仰角的测量误差.

考虑如下的 Taylor 展开:

$$\begin{cases} \sin(\theta_i - n_i) = \sin \theta_i - n_i \cos \theta_i + o(n_i), \\ \cos(\theta_i - n_i) = \cos \theta_i + n_i \sin \theta_i + o(n_i). \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sin(\psi_i - m_i) = \sin \psi_i - m_i \cos \psi_i + o(m_i), \\ \cos(\psi_i - m_i) = \cos \psi_i + m_i \sin \psi_i + o(m_i). \end{cases} \quad (8)$$

因此在忽略噪声高阶项的基础上可以得到如下两个等式:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + [\mathbf{F}_1 \mathbf{E} \quad \mathbf{F}_2 \mathbf{E} \quad \mathbf{F}_3 \mathbf{E}], \quad \mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} + \mathbf{F}_4 \mathbf{E}. \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{F}_1 = \text{diag}[\mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_{12}, \dots, \mathbf{f}_{1N}], \quad \mathbf{F}_2 = \text{diag}[\mathbf{f}_{21}, \mathbf{f}_{22}, \dots, \mathbf{f}_{2N}], \quad \mathbf{F}_3 = \text{diag}[\mathbf{f}_{31}, \mathbf{f}_{32}, \dots, \mathbf{f}_{3N}],$$

$$\mathbf{F}_4 = \text{diag}[\mathbf{f}_{41}, \mathbf{f}_{42}, \dots, \mathbf{f}_{4N}]; \quad \mathbf{f}_{1i} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i \sin \psi_i & -\cos \theta_i \cos \psi_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{2i} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & 0 \\ -\cos \theta_i \sin \psi_i & -\sin \theta_i \cos \psi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{3i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin \psi_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{4i} = \begin{bmatrix} -(\cos \theta_i x_i + \sin \theta_i y_i) & 0 \\ \sin \theta_i \sin \psi_i x_i - \cos \theta_i \sin \psi_i y_i & -(\cos \theta_i \cos \psi_i x_i + \sin \theta_i \cos \psi_i y_i + \sin \psi_i z_i) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} = [n_1, m_1, \dots, n_N, m_N]^T.$$

从(9)式中可以看出, 矩阵 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{Y}$ 所受到的噪声干扰均来源于噪声向量 $\mathbf{E}$, 因此可以将无源定位问题转化为如下的一个约束总体最小二乘问题:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{X}, \mathbf{E}} \|\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{E} & \mathbf{F}_2 \mathbf{E} & \mathbf{F}_3 \mathbf{E} & \mathbf{F}_4 \mathbf{E} \end{bmatrix}\|_F^2, \\ \text{s.t. } \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{E} & \mathbf{F}_2 \mathbf{E} & \mathbf{F}_3 \mathbf{E} & \mathbf{F}_4 \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

2 基于角度信息的约束总体最小二乘算法

在第一节中我们已经将无源定位问题转化为一个约束总体最小二乘问题(见(10)式). 在复数域内, 该有约束的优化问题已经被文献[6]转化为无约束的优化问题, 但是无源定位问题中的变量均为实数, 而在实数域内我们可以得到类似的结论. 不失一般性, 不妨令向量 $\mathbf{X}$ 的长度为 L (对于无源定位问题而言, $L=3$), a_j 为向量 $\mathbf{X}$ 的第 j 个分量, 则有如下结论:

定理 1 若令 $\mathbf{H}_X = \sum_{j=1}^L a_j \mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{L+1}$, $\mathbf{G} = \sum_{j=1}^{L+1} \mathbf{F}_j^T \mathbf{F}_j$, $\mathbf{C} = [\mathbf{H} \ \mathbf{Y}]$, 则(10)式可以转化为如下无约束的优化问题:

$$\min_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}^T \mathbf{C}^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

证 首先将目标函数(10)式转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \|\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{E} & \mathbf{F}_2 \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} \end{bmatrix}\|_F^2 &= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{E} & \mathbf{F}_2 \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{E} & \mathbf{F}_2 \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (12)$$

采用 Lagrange 乘子法, 得到目标函数如下:

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{E} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{C} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{E} & \mathbf{F}_2 \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

令 $\frac{\partial L(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{0}$, 得到

$$2\mathbf{G}\mathbf{E} + \mathbf{H}_X^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

从而有

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (15)$$

由(10)式可得

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_X \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

将(15)式代入(16)式得到

$$\lambda = 2 \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \right)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

再将(17)式代入(15)式得到

$$\mathbf{E} = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \right)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

最后将(18)式代入(12)式中得到

$$\left\| [\mathbf{F}_1 \mathbf{E} \quad \mathbf{F}_2 \mathbf{E} \quad \cdots \quad \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E}] \right\|_F^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \right)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

因此约束总体最小二乘问题等价于无约束的优化问题(11), 定理 1 得到证明.

显然(11)式是关于 $\mathbf{X}$ 各分量的实非线性函数, 无法直接求解, 因此我们利用 Newton 算法进行迭代求解, 其迭代公式如下:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mu_n \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{T}_n, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n &= 2 \left(\mathbf{U}^T \mathbf{H} - \mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 \right)^T \text{ 为梯度向量, } \mathbf{H}_n = 2 \left(\mathbf{H} - \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 \right)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \right)^{-1} \left(\mathbf{H} - \right. \\ &\left. \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 \right) - 2 \mathbf{B}_3^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}_3 \text{ 为 Hess 矩阵(推导过程见附录), } \mathbf{U} = \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \right)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n \\ -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 &= [\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} \quad \cdots \quad \mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_L^T \mathbf{U}], \mathbf{B}_2 = [\mathbf{F}_1 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \mathbf{U} \quad \cdots \quad \mathbf{F}_L \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \mathbf{U}], \mathbf{B}_3 = [\mathbf{F}_1^T \mathbf{U} \\ &\cdots \mathbf{F}_L^T \mathbf{U}], \mu_n = \mu^n (\mu < 1) \text{ 为步长因子.} \end{aligned}$$

至此我们已经给出了基于角度信息的约束总体最小二乘算法, 为了加快算法的收敛速度, 可以利用(4)式得到的最小二乘意义下的解 $\mathbf{X}_{LS}$ 作为算法迭代的初始解向量.

3 基于约束总体最小二乘算法的定位误差分析

在本节中我们将分析基于约束总体最小二乘算法的定位误差, 设目标的真实位置矢量为 $\mathbf{X}^*$, 由(3)式可以得到如下等式:

$$\mathbf{C}^* \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix} = 0, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{C}^* = [\mathbf{H}^* \quad \mathbf{Y}^*]$.

令目标位置矢量的估计值为 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \Delta \mathbf{X}$, 若 $\mathbf{X}$ 是(11)式的最优解, 则(11)式在 $\mathbf{X}$ 处的梯度向量为零, 因此有

$$\mathbf{U}^T \mathbf{H} = \mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 = [\mathbf{U}^T \mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} \quad \cdots \quad \mathbf{U}^T \mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_L^T \mathbf{U}], \quad (22)$$

令

$$\Delta \mathbf{C} = [\mathbf{F}_1 \mathbf{E} \quad \mathbf{F}_2 \mathbf{E} \quad \cdots \quad \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E}], \quad (23)$$

则有

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^* + \Delta\mathbf{C}, \quad (24)$$

因此忽略误差的高阶项可以得到

$$\mathbf{U} = \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{C}^* \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \Delta\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

将(9)和(25)式代入(22)式, 并忽略误差的高阶项可以得到

$$(\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{H}^* \Delta\mathbf{X} + (\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \Delta\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix} = 0, \quad (26)$$

进一步得到

$$\Delta\mathbf{X} = - \left[(\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{H}^* \right]^{-1} (\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \Delta\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

再由(23)式可以得到

$$\Delta\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_X \mathbf{E}, \quad (28)$$

从而有

$$E \left\{ \Delta\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \\ -1 \end{bmatrix}^T \Delta\mathbf{C}^T \right\} = \mathbf{H}_X \mathbf{P}_E \mathbf{H}_X^T, \quad (29)$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\Delta\mathbf{X}} &= E \{ \Delta\mathbf{X} \Delta\mathbf{X}^T \} = \left[(\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{H}^* \right]^{-1} (\mathbf{H}^*)^T \\ &\quad \cdot (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{H}_X \mathbf{P}_E \mathbf{H}_X^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{H}^* \left[(\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{H}^* \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

若角度估计误差的各个分量统计独立, 并且均值为 0, 方差为 σ^2 , 即 $\mathbf{P}_E = \sigma^2 \mathbf{I}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\Delta\mathbf{X}} &= \sigma^2 \left[(\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{H}^* \right]^{-1} (\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \\ &\quad \cdot \mathbf{H}_X \mathbf{H}_X^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{H}^* \left[(\mathbf{H}^*)^T \left(\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T\right)^{-1} \mathbf{H}^* \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (31)$$

因此定位误差 ε 可以描述为

$$\varepsilon = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}_{\Delta\mathbf{X}})}. \quad (32)$$

4 计算机仿真

假设共有 3 个观测站, 每个观测站的坐标分别为(30, -10, 0.1), (30, 20, 0.2)和 (-30, 5, 0.15) km, 各个站的角度估计误差服从相同方差的正态分布, 并且统计独立. 图 2(a)和(b)是约束总体最小二乘算法在方差为 1.5 mrad, 高度为 5 和 15 km 时的 GDOP 分布图, 图 2(c)和(d)是算法在方差为 4.5 mrad, 高度为 5 和 15 km 时的 GDOP 分布图.

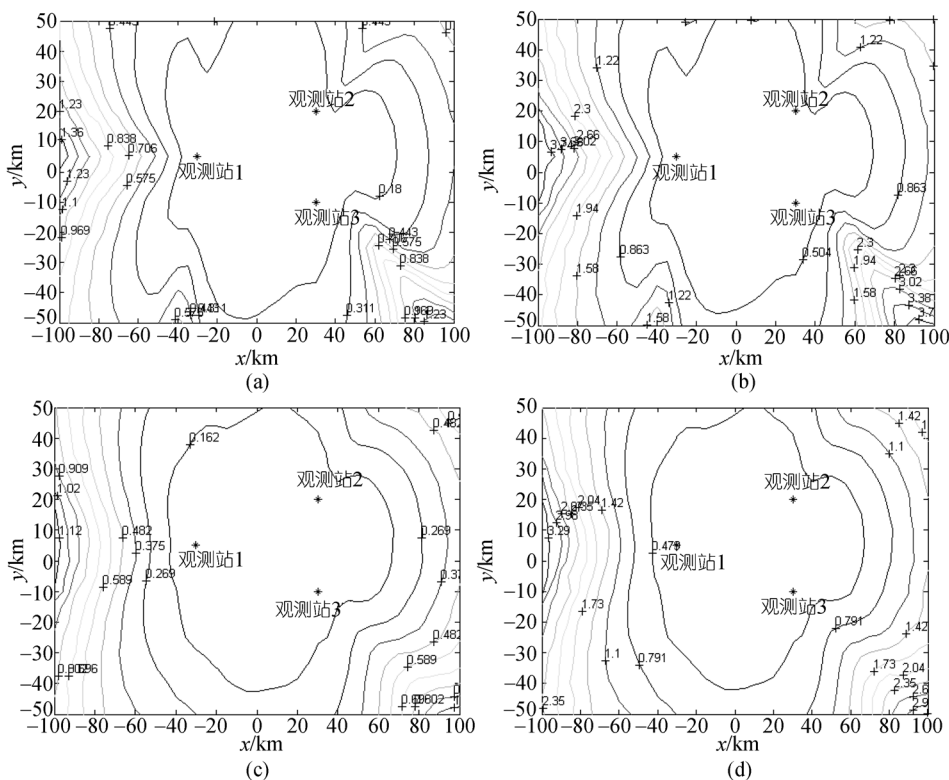


图 2 GDOP 分布图

高度为 5 km (a)和高度为 15 km(b), 方差为 1.5 mrad 的 GDOP 分布; 高度为 5 km(c)和高度为 15 km(d), 方差为 4.5 mrad 的 GDOP 分布

表 1 给出了以上 4 幅图中相同位置的定位误差.

表 1 定位误差比较				
坐标/km	图 2(a)	图 2(b)	图 2(c)	图 2(d)
(5.0, 55)	0.169	0.160	0.540	0.491
(-25, 50)	0.290	0.265	0.935	0.816
(-70, -25)	0.410	0.371	1.440	1.140
(-75, 8.0)	0.652	0.581	2.120	1.790

从图 2 和表 1 中可以看出, 角度估计误差的方差越小, 定位精度越高, 并且对高空目标的定位精度要高于低空目标的定位精度. 对于同一高度而言, 每个站附近有一个狭长区域, 在该区域内, 定位精度随着目标与站间的距离增大而急剧下降. 在其他区域, 目标离站越远定位精度越低.

为了体现约束总体最小二乘算法的定位精度, 我们利用该算法对匀速运动的目标进行定位跟踪, 并与最小二乘算法和总体最小二乘算法进行比较. 仍然假设共有 3 个观测站, 其坐标同上, 目标的起始坐标为(58.5, 27.75)km, 速度矢量为(−150, −1000)m/s, 观测周期为 2 s, 跟踪时间为 100 s, 角度估计的方差为 3 mrad, 对目标进行定位跟踪, 并作 200 次 Monte-Carlo 仿真. 假设第 j 次实验估计出目标在 k 时刻坐标为 $(x_k^{(j)}, y_k^{(j)}, z_k^{(j)})$, 真实坐标为 (x_k^*, y_k^*, z_k^*) , 定义距离的相对误差如下:

$$\delta_{r_k} = \frac{\sqrt{\frac{1}{200} \sum_{j=1}^{200} (x_k^{(j)} - x_k^*)^2 + (y_k^{(j)} - y_k^*)^2 + (z_k^{(j)} - z_k^*)^2}}{\sqrt{x_k^{*2} + y_k^{*2} + z_k^{*2}}}.$$

图 3 给出了 3 种算法的距离相对误差.

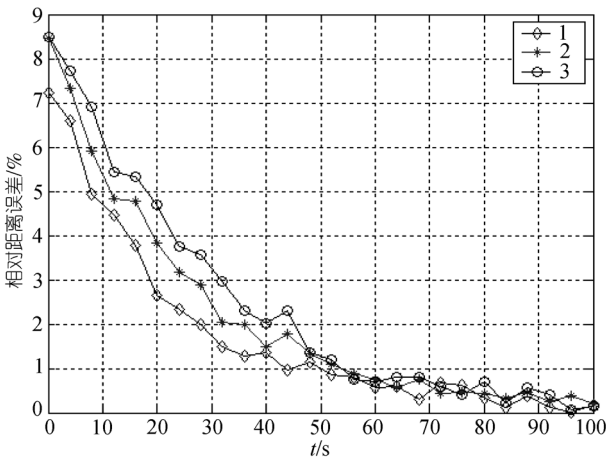


图 3 三种定位算法的相对距离误差

1, 约束总体最小二乘算法; 2, 总体最小二乘算法; 3, 最小二乘算法

从图中可以看出, 当运动目标越来越接近观测站时, 定位误差越来越小, 并且约束总体最小二乘算法的定位误差要小于其他两种算法, 因此本文的算法提高了定位精度, 该方法是有效的.

5 结论

在电子战中, 对辐射源进行定位与跟踪有重要的作用, 而采用无源定位的方

法对运动辐射源进行定位则更有意义. 角度信息是无源定位中最基本的观测量, 许多被动式探测器(如红外、声呐等)只能得到角度信息, 因此研究基于角度信息的无源定位是具有实际意义的. 本文提出了一种基于角度信息的约束总体最小二乘无源定位算法. 该算法将无源定位问题转化为一个约束总体最小二乘问题, 并将该有约束的优化问题转化为无约束的优化问题, 然后利用 Newton 算法进行迭代求解, 最后分析了约束总体最小二乘算法的定位误差. 计算机仿真结果表明角度估计误差的方差越小, 定位精度越高, 并且对高空目标的定位精度要高于低空目标的定位精度, 对于同一高度而言, 每个站附近有一个狭长区域, 在该区域内, 定位精度随着目标与站间的距离增大而急剧下降, 在其他区域, 目标离站越远定位精度渐渐降低.

然而文中尚未讨论如何确定 Newton 算法的收敛区间和步长因子, 但它们对于保证算法的收敛和加快算法的收敛速度是非常重要的, 因此仍然需要进一步研究.

参 考 文 献

- 1 孙仲康, 周一宇, 何黎星. 单多基地有源无源定位技术. 北京: 国防工业出版社, 1996
- 2 胡来招. 无源定位. 北京: 国防工业出版社, 2004
- 3 何 友, 修建娟. 无源定位方法综述. 第八届全国雷达学术年会报告, 2002, 71—75
- 4 邱 玲, 沈振康. 三维纯角度被动跟踪定位的最小二乘——卡尔曼滤波算法. 红外与激动工程, 2001, 30(2): 83—87
- 5 Foy W H. Position-location solutions by Taylor series estimation. IEEE Trans on Aerosp Electron Syst, 1976, AES-12(3): 187—194
- 6 Abatzoglou T J, Mendel J M. Constrained total least squares. In: Proc 1987 IEEE ICASSP. TX: Dallas, 1987, 1485—1488
- 7 Abatzoglou T J, Mendel J M, Harada G A. The constrained total least squares technique and its applications to harmonic superresolution. IEEE Trans on Signal Processing, 1991, SP-39: 1070—1087[DOI]
- 8 赵瑞安, 吴 方. 非线性最优化理论和方法. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1992
- 9 张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004

附录 A

下面我们推导(11)式的梯度向量和 Hess 矩阵.

令 $f(X) = \begin{bmatrix} X^T \\ -1 \end{bmatrix} C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix}$, 向量 X 的长度为 L , a_j 为向量 X 的第 j 个分量, 则有

$$\frac{\partial f(X)}{\partial a_i} = 2e_i^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} X^T \\ -1 \end{bmatrix} C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} F_i G^{-1} H_X^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix},$$

其中 e_i 为 $L+1$ 维向量, 其第 i 个元素为 1, 其余元素为 0.

因此 $f(X)$ 在 X_n 处的梯度向量为

$$T_n = \left[\frac{\partial f(X_n)}{\partial a_1} \frac{\partial f(X_n)}{\partial a_2} \dots \frac{\partial f(X_n)}{\partial a_L} \right]^T = 2(U^T C I_{L+1,L} - U^T B_1)^T = (U^T H - U^T B_1)^T,$$

其中 $U = (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X_n \\ -1 \end{bmatrix}$, $B_1 = [H_X G^{-1} F_1^T U \dots H_X G^{-1} F_L^T U]$, $I_{L+1,L}$ 为 $(L+1) \times L$ 维矩阵,

其对角元素为 1, 其余元素为 0.

同时我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial a_i \partial a_j} = & -2e_i^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (F_j G^{-1} H_X^T + H_X G^{-1} F_j^T)^{-1} (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} \\ & + 2e_i^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C e_j - 2e_j^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} F_i G^{-1} H_X^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix}^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (F_j G^{-1} H_X^T + H_X G^{-1} F_j^T)^{-1} (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} F_i G^{-1} H_X^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} \\ & - 2 \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix}^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} F_i G^{-1} F_j (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix}^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} F_i G^{-1} H_X^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (F_j G^{-1} H_X^T + H_X G^{-1} F_j^T)^{-1} (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} \\ & - 2 \begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix}^T C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} F_i G^{-1} H_X^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C e_j. \end{aligned}$$

因此 $f(X)$ 在 X_n 处的 Hess 矩阵为

$$\begin{aligned} H_n = & \left[\frac{\partial^2 f(X_n)}{\partial a_i \partial a_j} \right]_{L \times L} \\ = & -2I_{L,L+1} C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (B_1 + B_2) + 2I_{L,L+1} C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C I_{L+1,L} - 2B_2 (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} C I_{L+1,L} \\ & + 2B_2^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (B_1 + B_2) - 2B_3^T G^{-1} B_3 + 2B_1^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (B_1 + B_2) - 2I_{L,L+1} C^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} B_1 \\ = & 2(C I_{L+1,L} - B_1 - B_2)^T (H_X G^{-1} H_X^T)^{-1} (C I_{L+1,L} - B_1 - B_2) - 2B_3^T G^{-1} B_3, \end{aligned}$$

其中 $B_2 = [F_1 G^{-1} H_X^T U \dots F_L G^{-1} H_X^T U]$, $B_3 = [F_1^T U \dots F_L^T U]$.