



非球头刀宽行五轴数控加工自由曲面的 三阶切触法(I): 刀具包络曲面的局部重建原理

朱利民^{①*}, 丁汉^②, 熊有伦^②

① 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240;

② 华中科技大学数字制造装备与技术国家重点实验室, 武汉 430074

* E-mail: zhulm@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2009-9-23; 接受日期: 2009-12-24

国家重点基础研究发展计划(“973”计划) (批准号: 2005CB724103)和国家自然科学基金(批准号: 50835004, 50775147)资助项目

摘要 研究了两线接触曲面间的几何学特性, 由刀具包络曲面分别沿刀触点轨迹线和特征线与设计曲面和刀具曲面线接触这一基本条件, 提出了回转刀具扫掠包络面的局部重建原理. 建立了由单个刀位重建刀具包络面局部三阶近似曲面的数学模型, 刻画了刀具曲面、刀具包络面与设计曲面在刀触点领域内的三阶微分关系, 为提出自由曲面三阶切触加工新方法奠定了几何学基础.

关键词

五轴数控加工
回转刀具
刀具包络面
诱导曲率
三阶切触

五轴数控加工至今仍广泛采用球头刀. 球头刀加工适应性强、刀位规划简单, 可以加工任意复杂曲面, 但是加工性能较差, 加工精度和效率比较低. 非球头刀加工不仅能改善切削性能, 而且可以在刀具运动过程中通过调整其位置和姿态, 使得在刀触点轨迹线附近的带状区域内刀具包络曲面充分逼近理论设计曲面, 从而显著提高给定精度下的加工带宽, 在加工平坦、敞口类曲面时能充分发挥五轴联动机床的潜力, 因而成为近些年来研究的热点, 研究工作主要集中在平底刀和圆环刀的端铣加工, 以及圆柱刀和圆锥刀的侧铣加工.

五轴数控加工的成形原理为单参数面族包络原理, 真实的加工误差为刀具包络面相对于工件曲面的法向误差. 由于只有在所有刀位都确定之后才能计算刀具包络面^[1,2], 因此如何在单个刀位规划的时候考虑刀具包络面与工件曲面之间的偏差是个非常

关键的问题, 它直接关系到刀位计算的精度. 由于操作上的难度及复杂性, 多数文献都采用了近似的简化处理, 将刀位规划转化为单个刀位下, 刀具曲面与工件曲面间的优化逼近问题, 给出的各种刀位优化模型并不能真实地反映实际加工过程. 如, Deng 等人^[3]将刀具的曲率半径表示为刀具倾角的函数, 通过曲率匹配来确定平底刀加工自由曲面的刀具姿态. Kruth 等^[4]将切触点处的设计曲面和环形刀具曲面分别用二次方程和球面来近似, 由球面和二次近似曲面的交线来确定最小刀具倾角. Rao 和 Bedi 等人^[5,6]提出了主曲率法, 刀具的倾斜方向与曲面的最大主曲率方向一致, 进给方向为最小主曲率方向, 通过调整倾斜角使刀具的有效切削半径等于曲面最小曲率半径. Watkentin 等人^[7]提出了多点接触的刀位优化方法, 刀具在每一个位置与被加工曲面有两个接触点, 确定第一个接触点后, 围绕两个独立轴旋转, 寻找第

二个优化的接触点来确定刀具的方向. Chiou 等人^[8]提出了圆环刀加工自由曲面的潜在域局部优化方法, 利用对刀具的“有效切削形状”分析来确定加工带宽, 通过迭代的方法构造出优化的刀具路径. Yoon 等人^[9]提出了局部无干涉刀位优化方法, 要求刀具曲面的杜潘标形包容在设计曲面的杜潘标形内, 以保证在二阶邻域内刀具曲面和设计曲面不发生曲率干涉, 同时采用迭代方法进行刀位优化. 倪炎榕等人^[10]探讨了用圆环刀加工复杂曲面的优化算法, 将曲面离散为点, 从宏观范围考察瞬时刀位下刀具和型面的接触误差分布, 并按宏观曲率吻合原则对刀位进行优化调整. 曹利新等人^[11]分析了圆柱刀与工件曲面的二阶密切条件, 提出了柱刀侧铣加工的刀位规划新方法—二阶密切法. 上述刀位规划方法未能系统而完整地从事具包络面向设计曲面逼近的角度考虑问题.

王小椿等人^[12]提出了中凹盘形铣刀的密切曲率法, 在垂直于进给方向的法截面中, 由刀尖轨迹圆形成的包络面与理论曲面的法截线具有相同的 1~3 阶导数, 从而在保持精度的情况下, 加大了每次走刀的加工带宽. Rao 等人^[13]通过讨论设计曲面与刀具包络面的曲率匹配, 给出了消除平底刀五轴加工自由曲面的局部干涉的方法. 上述两种方法均是基于刀具包络面的局部近似模型进行刀位优化, 但仅适用于盘形铣刀或平头刀, 而不能扩展到其他类型的刀具. 宫虎等人^[14]建立了描述刀具曲面、刀具包络面和设计曲面之间关系的模型, 提出了带状密切意义下刀具包络面逼近设计曲面的原理与方法. 该方法适用于一般的回转刀具, 但它是建立在刀具包络面的二阶局部重建的基础上的, 仅能做到刀具包络面与工件曲面的二阶切触. 对于五轴加工而言, 理论上可以实现两者的三阶切触, 因此二阶模型未能充分发挥五轴联动加工的潜力.

综上所述, 当前非球头刀五轴加工的绝大多数研究仅仅针对于特定类型的刀具, 其刀位优化方法缺少通用性. 并且由于采用刀具曲面近似替代刀具包络曲面, 或者未考虑刀具包络曲面的高阶近似模型, 影响了加工精度的提高. 要处理好这些问题必须发展新的理论和方法. 本文将建立单个刀位下刀具包络曲面的三阶局部重建原理, 为提出自由曲面三阶切触加工新方法奠定几何学基础.

1 几何学基础

1.1 曲线上的曲线

如图 1 所示, 在刀触点 r_0 处建立一坐标系, 其 x , y 轴位于刀具曲面、刀具包络曲面和设计曲面的公切平面内, z 轴沿公切平面的法方向. 三张曲面以高度函数表示为 $z^{(i)}(x, y)$, $i=0, 1, 2$, 或以参数方程表示为

$$\mathbf{r}^{(i)}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z^{(i)}(x, y) \end{bmatrix} \quad (i=0, 1, 2). \quad (1)$$

此时有

$$z_x^{(i)}(0, 0) = z_y^{(i)}(0, 0) = 0 \quad (i=0, 1, 2). \quad (2)$$

考虑曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 上过 r_0 点的一条曲线 $\mathbf{r}^{(i)}(s)$, s 为弧长参数, $\mathbf{r}^{(i)}(0)=r_0$, 我们有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^2} \cdot \mathbf{n}^{(i)} = \kappa_n^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z_x^{(i)})^2 + (z_y^{(i)})^2}} \times [z_{xx}^{(i)}(x_s)^2 + 2z_{xy}^{(i)}x_s y_s + z_{yy}^{(i)}(y_s)^2], \quad (3)$$

$$\frac{d^3 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^3} \cdot \mathbf{n}^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z_x^{(i)})^2 + (z_y^{(i)})^2}} \times [z_{xxx}^{(i)}(x_s)^3 + 3z_{xxy}^{(i)}(x_s)^2 y_s + 3z_{xyy}^{(i)}x_s (y_s)^2 + z_{yyy}^{(i)}(y_s)^3 + 3z_{xx}^{(i)}x_s x_{ss} + 3z_{xy}^{(i)}x_{ss} y_s + 3z_{xy}^{(i)}x_s y_{ss} + 3z_{yy}^{(i)}y_s y_{ss}], \quad (4)$$

其中 $\mathbf{n}^{(i)}$ 表示曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 的单位法向量. 若 $\mathbf{r}^{(i)}(s)$ 为 r_0 点处的法截线, 有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^2} \cdot \frac{d\mathbf{n}^{(i)}}{ds} \Big|_{s=0} = 0, \quad (5)$$

因此得

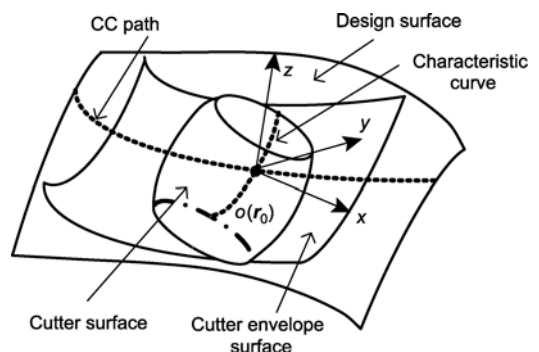


图 1 刀具曲面、刀具包络曲面与设计曲面之间的点切触关系

$$\dot{\kappa}_n^{(i)}|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^2} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \right) \Big|_{s=0} = \frac{d^3 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^3} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \Big|_{s=0}, \quad (6)$$

$$\dot{\kappa}^{(i)}|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^2} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_{s=0} = \frac{d^3 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^3} \cdot \mathbf{N}^{(i)} \Big|_{s=0}, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{N}^{(i)}$ 表示法截线 $\mathbf{r}^{(i)}(s)$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点处的主法向量. $\mathbf{N}^{(i)} = \pm \mathbf{n}^{(i)}$, 正负号取决于 $\mathbf{n}^{(i)}$ 是指向 $\mathbf{r}^{(i)}(s)$ 弯曲的一侧还是相反的一侧. 因此, 对于法截线 $\mathbf{r}^{(i)}(s)$, $\kappa_n^{(i)}|_{s=0}$ 与 $\kappa^{(i)}|_{s=0}$ 以及 $\dot{\kappa}_n^{(i)}|_{s=0}$ 与 $\dot{\kappa}^{(i)}|_{s=0}$ 之间最多相差一个正负号. 经进一步简化, 可得在 $\mathbf{r}_0$ 点处有

$$\kappa_n^{(i)}|_{\alpha} = z_{xx}^{(i)} \cos^2 \alpha + 2z_{xy}^{(i)} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy}^{(i)} \sin^2 \alpha \Big|_{x=0, y=0}, \quad (8)$$

$$\dot{\kappa}_n^{(i)}|_{\alpha} = z_{xxx}^{(i)} \cos^3 \alpha + 3z_{xxy}^{(i)} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3z_{xyy}^{(i)} \cos \alpha \sin^2 \alpha + z_{yyy}^{(i)} \sin^3 \alpha \Big|_{x=0, y=0}, \quad (9)$$

其中 α 为法截线在 $\mathbf{r}_0$ 点处的切方向与 x 轴的夹角. 显然, $z_{xxx}^{(i)}|_{x=0, y=0}$ 和 $z_{yyy}^{(i)}|_{x=0, y=0}$ 分别为 x - z 和 y - z 平面截曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 所得的两条法截线的法曲率对其弧长参数的导数在 $\mathbf{r}_0$ 点处的取值.

1.2 两曲面的切触阶

微分几何中采用切触阶描述两相切曲线在切点附近的贴近程度.

定义 1. 设相切于 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}^{(i)}(s_0) = \mathbf{r}^{(j)}(s_0)$ 点的两条曲线 $\mathbf{r}^{(i)}(s)$ 和 $\mathbf{r}^{(j)}(s)$ 同时以 s 为弧长参数, 若

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\mathbf{r}^{(i)}(s) - \mathbf{r}^{(j)}(s)\|}{(s - s_0)^n} = 0, \\ \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\mathbf{r}^{(i)}(s) - \mathbf{r}^{(j)}(s)\|}{(s - s_0)^{n+1}} \neq 0,$$

则称两条曲线在 $\mathbf{r}_0$ 点 n 阶切触.

为了比较两相切曲面在切点附近的贴近程度, 文献[12]中进一步定义了两曲面间的切触阶.

定义 2. 两相切曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 和 $\mathbf{r}^{(j)}$ 在切点 $\mathbf{r}_0$ 处的切触阶定义为所有通过 $\mathbf{r}_0$ 点的法截面与两曲面相交所得的两法截线的切触阶中最低的阶数.

由平面曲线在一点附近的 Taylor 展开式, 以及 $\kappa_n^{(i)}$ 与 $\kappa^{(i)}$ 、 $\dot{\kappa}_n^{(i)}$ 与 $\dot{\kappa}^{(i)}$ 之间的关系式, 我们有下述命题.

命题 1. 设两曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 和 $\mathbf{r}^{(j)}$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点相切. 在 $\mathbf{r}_0$ 点处, 取定公共的单位法向量 $\mathbf{n}_0$, 若沿任意切方向, 均有 $\kappa_n^{(i)} = \kappa_n^{(j)}$, 则两曲面间至少二阶切触. 若沿任意

切方向, 均有 $\kappa_n^{(i)} = \kappa_n^{(j)}$ 和 $\dot{\kappa}_n^{(i)} = \dot{\kappa}_n^{(j)}$, 则两曲面间至少三阶切触.

1.3 两线切触曲面的性质

记 $\mathbf{r}^{(1)}(s) = \mathbf{r}^{(i)}(s)$, $i=0$ 或 2 为刀具包络曲面与刀具曲面或设计曲面的切触线, $\mathbf{r}^{(1)}(0) = \mathbf{r}^{(i)}(0) = \mathbf{r}_0$. 在两曲面上点 $\mathbf{r}^{(1)}(s) = \mathbf{r}^{(i)}(s)$ 处的切向量可分别表示为

$$d\mathbf{r}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x^{(1)}(s) \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y^{(1)}(s) \end{bmatrix} dy, \quad (10)$$

$$d\mathbf{r}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x^{(i)}(s) \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y^{(i)}(s) \end{bmatrix} dy. \quad (11)$$

两曲面在点 $\mathbf{r}^{(1)}(s) = \mathbf{r}^{(i)}(s)$ 处相切, 具有公共的切平面, 因而有

$$\begin{cases} z_x^{(1)}(s) = z_x^{(i)}(s), \\ z_y^{(1)}(s) = z_y^{(i)}(s). \end{cases} \quad (12)$$

将(12)式代入恒等式 $\frac{d^2 \mathbf{r}^{(1)}}{ds^2} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = \frac{d^2 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^2} \cdot \mathbf{n}^{(i)}$ 得

$$z_{xx}^{(1)}(x_s)^2 + 2z_{xy}^{(1)}x_s y_s + z_{yy}^{(1)}(y_s)^2 = z_{xx}^{(i)}(x_s)^2 + 2z_{xy}^{(i)}x_s y_s + z_{yy}^{(i)}(y_s)^2. \quad (13)$$

令 $s=0$, 并考虑(8)式得

$$\kappa_n^{(1)}|_{\beta} = z_{xx}^{(1)} \cos^2 \beta + 2z_{xy}^{(1)} \cos \beta \sin \beta + z_{yy}^{(1)} \sin^2 \beta \Big|_{x=0, y=0} \\ = \kappa_n^{(i)}|_{\beta} = z_{xx}^{(i)} \cos^2 \beta + 2z_{xy}^{(i)} \cos \beta \sin \beta + z_{yy}^{(i)} \sin^2 \beta \Big|_{x=0, y=0}, \quad (14)$$

其中 β 为切触线在 $\mathbf{r}_0$ 点处的切方向与 x 轴的夹角, $\kappa_n^{(i)}|_{\beta}$ 为曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点处沿切触线切方向的法曲率.

将(12)式对 s 求导数得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)}x_s + z_{xy}^{(1)}y_s = z_{xx}^{(i)}x_s + z_{xy}^{(i)}y_s, \\ z_{yx}^{(1)}x_s + z_{yy}^{(1)}y_s = z_{yx}^{(i)}x_s + z_{yy}^{(i)}y_s. \end{cases} \quad (15)$$

令 $s=0$, 得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)} \cos \beta + z_{xy}^{(1)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0} = z_{xx}^{(i)} \cos \beta + z_{xy}^{(i)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0}, \\ z_{yx}^{(1)} \cos \beta + z_{yy}^{(1)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0} = z_{yx}^{(i)} \cos \beta + z_{yy}^{(i)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0}. \end{cases} \quad (16)$$

由(15)式可进一步得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)}x_s x_{ss} + z_{xy}^{(1)}y_s x_{ss} = z_{xx}^{(i)}x_s x_{ss} + z_{xy}^{(i)}y_s x_{ss}, \\ z_{yx}^{(1)}x_s y_{ss} + z_{yy}^{(1)}y_s y_{ss} = z_{yx}^{(i)}x_s y_{ss} + z_{yy}^{(i)}y_s y_{ss}. \end{cases} \quad (17)$$

将(12)和(17)式代入恒等式 $\frac{d^3 \mathbf{r}^{(1)}}{ds^3} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = \frac{d^3 \mathbf{r}^{(i)}}{ds^3} \cdot \mathbf{n}^{(i)}$ 得

$$\begin{aligned} & \left[z_{xxx}^{(1)}(x_s)^3 + 3z_{xxy}^{(1)}(x_s)^2 y_s + 3z_{xyy}^{(1)}x_s (y_s)^2 + z_{yyy}^{(1)}(y_s)^3 \right] \\ &= \left[z_{xxx}^{(i)}(x_s)^3 + 3z_{xxy}^{(i)}(x_s)^2 y_s + 3z_{xyy}^{(i)}x_s (y_s)^2 + z_{yyy}^{(i)}(y_s)^3 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

令 $s=0$, 并考虑(9)式得

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_n^{(1)} \Big|_{\beta} &= z_{xxx}^{(1)} \cos^3 \beta + 3z_{xxy}^{(1)} \cos^2 \beta \sin \beta \\ &\quad + 3z_{xyy}^{(1)} \cos \beta \sin^2 \beta + z_{yyy}^{(1)} \sin^3 \beta \Big|_{x=0, y=0} \\ &= \dot{\kappa}_n^{(i)} \Big|_{\beta} \\ &= z_{xxx}^{(i)} \cos^3 \beta + 3z_{xxy}^{(i)} \cos^2 \beta \sin \beta \\ &\quad + 3z_{xyy}^{(i)} \cos \beta \sin^2 \beta + z_{yyy}^{(i)} \sin^3 \beta \Big|_{x=0, y=0}. \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\dot{\kappa}_n^{(i)} \Big|_{\beta}$ 表示曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点处沿切触线切方向的法截线的法曲率对其弧长参数的导数在 $\mathbf{r}_0$ 点处的取值. 由(14)和(19)两式可以得出以下结论.

命题 2. 若两曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 和 $\mathbf{r}^{(j)}$ 线切触, 则在切触线上的任意一点 $\mathbf{r}_0$ 处, 由切触线的切方向确定的两条法截线的法曲率和法曲率对弧长参数的导数均相等.

1.4 两二阶线切触曲面的性质

若刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹线 $\mathbf{r}^{(1)}(s) = \mathbf{r}^{(2)}(s)$ 二阶切触, 则有

$$\begin{cases} \frac{z_{xx}^{(1)}(s)}{\sqrt{1+(z_x^{(1)})^2+(z_y^{(1)})^2}} = \frac{z_{xx}^{(2)}(s)}{\sqrt{1+(z_x^{(2)})^2+(z_y^{(2)})^2}}, \\ \frac{z_{xy}^{(1)}(s)}{\sqrt{1+(z_x^{(1)})^2+(z_y^{(1)})^2}} = \frac{z_{xy}^{(2)}(s)}{\sqrt{1+(z_x^{(2)})^2+(z_y^{(2)})^2}}, \\ \frac{z_{yy}^{(1)}(s)}{\sqrt{1+(z_x^{(1)})^2+(z_y^{(1)})^2}} = \frac{z_{yy}^{(2)}(s)}{\sqrt{1+(z_x^{(2)})^2+(z_y^{(2)})^2}}. \end{cases} \quad (20)$$

由(12)和(20)式得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)}(s) = z_{xx}^{(2)}(s), \\ z_{xy}^{(1)}(s) = z_{xy}^{(2)}(s), \\ z_{yy}^{(1)}(s) = z_{yy}^{(2)}(s). \end{cases} \quad (21)$$

上式对 s 求导数得

$$\begin{cases} z_{xxx}^{(1)}x_s + z_{xxy}^{(1)}y_s = z_{xxx}^{(2)}x_s + z_{xxy}^{(2)}y_s, \\ z_{xyx}^{(1)}x_s + z_{xyy}^{(1)}y_s = z_{xyx}^{(2)}x_s + z_{xyy}^{(2)}y_s, \\ z_{yyx}^{(1)}x_s + z_{yyy}^{(1)}y_s = z_{yyx}^{(2)}x_s + z_{yyy}^{(2)}y_s. \end{cases} \quad (22)$$

令 $s=0$, 得

$$\begin{cases} z_{xxx}^{(1)} \cos \beta + z_{xxy}^{(1)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0} = z_{xxx}^{(2)} \cos \beta + z_{xxy}^{(2)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0}, \\ z_{xyx}^{(1)} \cos \beta + z_{xyy}^{(1)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0} = z_{xyx}^{(2)} \cos \beta + z_{xyy}^{(2)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0}, \\ z_{yyx}^{(1)} \cos \beta + z_{yyy}^{(1)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0} = z_{yyx}^{(2)} \cos \beta + z_{yyy}^{(2)} \sin \beta \Big|_{x=0, y=0}. \end{cases} \quad (23)$$

2 刀具包络曲面的局部重建

2.1 刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹线切触时的二阶局部重建

如图 2 所示, 记 $\mathbf{r}^{(1)}(s) = \mathbf{r}^{(2)}(s)$ 为刀触点轨迹线, $\mathbf{r}^{(1)}(0) = \mathbf{r}^{(2)}(0) = \mathbf{r}_0$, 由(16)式得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)} \cos \alpha + z_{xy}^{(1)} \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0} = z_{xx}^{(2)} \cos \alpha + z_{xy}^{(2)} \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0}, \\ z_{yx}^{(1)} \cos \alpha + z_{yy}^{(1)} \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0} = z_{yx}^{(2)} \cos \alpha + z_{yy}^{(2)} \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0}, \end{cases} \quad (24)$$

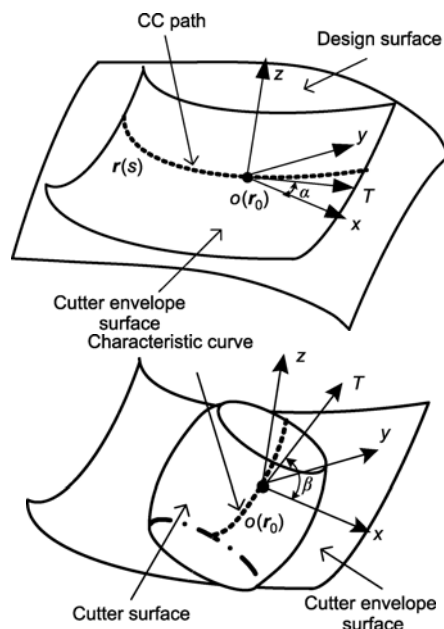


图 2 刀具包络曲面与设计曲面和刀具曲面之间的线切触关系

(a) 刀具包络曲面沿刀触点轨迹线与设计曲面线接触; (b) 刀具包络曲面沿特征线与刀具曲面线接触

其中 α 为刀触点轨迹线在 r_0 点处的切方向(即刀具进给方向)与 x 轴的夹角. 又刀具包络曲面与当前刀位下的刀具曲面沿特征线相切, 由命题2和(14)式得

$$\kappa_n^{(0)}|_{\beta} = z_{xx}^{(1)} \cos^2 \beta + 2z_{xy}^{(1)} \cos \beta \sin \beta + z_{yy}^{(1)} \sin^2 \beta \Big|_{x=0, y=0}, \quad (25)$$

其中 β 为特征线在 r_0 点处的切方向与 x 轴的夹角.

联立(24)与(25)两式得

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{xx}^{(1)} \\ z_{xy}^{(1)} \\ z_{yy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xx}^{(2)} \cos \alpha + z_{xy}^{(2)} \sin \alpha \\ z_{yx}^{(2)} \cos \alpha + z_{yy}^{(2)} \sin \alpha \\ \kappa_n^{(0)}|_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

若 x 轴与刀具进给方向重合, 则 $\alpha=0$, 上式变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos^2 \beta & 2 \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{xx}^{(1)} \\ z_{xy}^{(1)} \\ z_{yy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xx}^{(2)} \\ z_{xy}^{(2)} \\ \kappa_n^{(0)}|_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

解方程组(27), 并考虑(14)式得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)} - z_{xx}^{(2)} = 0, \\ z_{xy}^{(1)} - z_{xy}^{(2)} = 0, \\ z_{yy}^{(1)} - z_{yy}^{(2)} = (\kappa_n^{(0)} - \kappa_n^{(2)})|_{\beta} / \sin^2 \beta. \end{cases} \quad (28)$$

由(8)式得

$$(\kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)})|_{\gamma} = \frac{(\kappa_n^{(0)} - \kappa_n^{(2)})|_{\beta} \sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta}, \quad (29)$$

其中 γ 表示在刀触点 r_0 处选定的一切方向与 x 轴(刀具进给方向)的夹角. 因此, 我们有以下结论.

命题 3. 刀具包络曲面 $r^{(1)}$ 与设计曲面 $r^{(2)}$ 在 r_0 点处的诱导法曲率 $\kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)}$ 在与刀具进给方向垂直的方向上取得极大值, 两曲面在 r_0 点处二阶切触当且仅当刀具曲面 $r^{(0)}$ 与设计曲面 $r^{(2)}$ 在 r_0 点处沿特征线切方向具有相同的法曲率.

2.2 刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹线二阶切触时的三阶局部重建

与2.1节的推导类似, 若刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹线二阶切触, 由(23)式得

$$\begin{cases} (z_{xxx}^{(1)} - z_{xxx}^{(2)}) \cos \alpha + (z_{xxy}^{(1)} - z_{xxy}^{(2)}) \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0} = 0, \\ (z_{xyx}^{(1)} - z_{xyx}^{(2)}) \cos \alpha + (z_{xyy}^{(1)} - z_{xyy}^{(2)}) \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0} = 0, \\ (z_{yyx}^{(1)} - z_{yyx}^{(2)}) \cos \alpha + (z_{yyy}^{(1)} - z_{yyy}^{(2)}) \sin \alpha \Big|_{x=0, y=0} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

由命题2和(19)式得

$$\dot{\kappa}_n^{(0)}|_{\beta} = z_{xxx}^{(1)} \cos^3 \beta + 3z_{xxy}^{(1)} \cos^2 \beta \sin \beta + 3z_{xyy}^{(1)} \cos \beta \sin^2 \beta + z_{yyy}^{(1)} \sin^3 \beta \Big|_{x=0, y=0}. \quad (31)$$

联立(30)与(31)两式得

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos^3 \beta & 3 \cos^2 \beta \sin \beta & 3 \cos \beta \sin^2 \beta & \sin^3 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{xxx}^{(1)} \\ z_{xxy}^{(1)} \\ z_{xyy}^{(1)} \\ z_{yyy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xxx}^{(2)} \cos \alpha + z_{xxy}^{(2)} \sin \alpha \\ z_{xxy}^{(2)} \cos \alpha + z_{xyy}^{(2)} \sin \alpha \\ z_{xyy}^{(2)} \cos \alpha + z_{yyy}^{(2)} \sin \alpha \\ \dot{\kappa}_n^{(0)}|_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

同理, 若 x 轴与刀具进给方向重合, 则上式变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos^3 \beta & 3 \cos^2 \beta \sin \beta & 3 \cos \beta \sin^2 \beta & \sin^3 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{xxx}^{(1)} \\ z_{xxy}^{(1)} \\ z_{xyy}^{(1)} \\ z_{yyy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xxx}^{(2)} \\ z_{xxy}^{(2)} \\ z_{xyy}^{(2)} \\ \dot{\kappa}_n^{(0)}|_{\beta} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

解方程组(33), 并考虑(19)式得

$$\begin{cases} z_{xxx}^{(1)} - z_{xxx}^{(2)} = 0, \\ z_{xxy}^{(1)} - z_{xxy}^{(2)} = 0, \\ z_{xyy}^{(1)} - z_{xyy}^{(2)} = 0, \\ z_{yyy}^{(1)} - z_{yyy}^{(2)} = \frac{(\dot{\kappa}_n^{(0)} - \dot{\kappa}_n^{(2)})|_{\beta}}{\sin^3 \beta}. \end{cases} \quad (34)$$

由(9)式得

$$(\dot{\kappa}_n^{(1)} - \dot{\kappa}_n^{(2)})|_{\gamma} = \frac{(\dot{\kappa}_n^{(0)} - \dot{\kappa}_n^{(2)})|_{\beta} \sin^3 \gamma}{\sin^3 \beta}. \quad (35)$$

因此, 我们有以下结论.

命题 4. 刀具包络曲面 $\mathbf{r}^{(1)}$ 与设计曲面 $\mathbf{r}^{(2)}$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点处的两法截线的法曲率导数的差 $\dot{\kappa}_n^{(1)} - \dot{\kappa}_n^{(2)}$ 在与刀具进给方向垂直的方向上取得极大值, 两曲面在 $\mathbf{r}_0$ 点处三阶切触当且仅当刀具曲面 $\mathbf{r}^{(0)}$ 与设计曲面 $\mathbf{r}^{(2)}$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点处由特征线切方向确定的两法截线具有相同的法曲率和法曲率导数.

(29)和(35)式刻画了刀具曲面、刀具包络曲面与设计曲面在刀触点领域内的微分关系, 它们表明仅给出单个刀位时, 虽然无法精确重建刀具包络曲面, 但可以计算刀具包络曲面与设计曲面之间的三阶偏差. 刀位规划时希望调整刀具的位置和姿态使得在满足 $\kappa_n^{(0)}|_\beta = \kappa_n^{(2)}|_\beta$ (即保证二阶切触)的前提下目标函数 $|(\kappa_n^{(0)} - \kappa_n^{(2)})|_\beta / \sin^3 \beta$ 达到极小. 至此已建立了非球头刀宽行五轴数控加工自由曲面的三阶密切法的基本原理, 但还有以下问题需要解答: ① 如何计算 $\dot{\kappa}_n^{(i)}|_\theta$? 文献[15]中给出了 $\dot{\kappa}^{(i)}|_\theta$ 的解析计算式; ② 如何确定 β ? 这将在下一节讨论; ③ 如何调整刀具的位置和姿态? 这将在论文的第二部分详细介绍.

3 刀具包络曲面特征线在刀触点处的切方向

记曲面 $\mathbf{r}^{(i)}$ 在公切点 $\mathbf{r}_0$ 处沿 x 轴方向的法曲率为 $\kappa_{nx}^{(i)}$, 测地挠率为 $\tau_{gx}^{(i)}$, 沿 y 轴方向的法曲率为 $\kappa_{ny}^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$. 由广义的欧拉公式和贝特朗公式知, 在与 x 轴夹角为 γ 的方向有

$$\begin{cases} \kappa_n^{(i)} = \kappa_{nx}^{(i)} \cos^2 \gamma + \kappa_{ny}^{(i)} \sin^2 \gamma + \tau_{gx}^{(i)} \sin 2\gamma, \\ \tau_g^{(i)} = \frac{\kappa_{ny}^{(i)} - \kappa_{nx}^{(i)}}{2} \sin 2\gamma + \tau_{gx}^{(i)} \cos 2\gamma, \end{cases} \quad (36)$$

刀具包络曲面 $\mathbf{r}^{(1)}$ 分别沿刀触点轨迹线和特征线与设计曲面 $\mathbf{r}^{(2)}$ 和当前刀位下的刀具曲面 $\mathbf{r}^{(0)}$ 相切. 刀触点轨迹线和特征线在 $\mathbf{r}_0$ 点处的切方向与 x 轴的夹角分别为 α 和 β , 由于两线接触曲面沿切触线的切方向具有相同的法曲率和测地挠率, 因此有

$$\begin{cases} \kappa_{nx}^{(1)} \cos^2 \alpha + \kappa_{ny}^{(1)} \sin^2 \alpha + \tau_{gx}^{(1)} \sin 2\alpha \\ = \kappa_{nx}^{(2)} \cos^2 \alpha + \kappa_{ny}^{(2)} \sin^2 \alpha + \tau_{gx}^{(2)} \sin 2\alpha, \\ \frac{\kappa_{ny}^{(1)} - \kappa_{nx}^{(1)}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{gx}^{(1)} \cos 2\alpha \\ = \frac{\kappa_{ny}^{(2)} - \kappa_{nx}^{(2)}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{gx}^{(2)} \cos 2\alpha, \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \kappa_{nx}^{(1)} \cos^2 \beta + \kappa_{ny}^{(1)} \sin^2 \beta + \tau_{gx}^{(1)} \sin 2\beta \\ = \kappa_{nx}^{(0)} \cos^2 \beta + \kappa_{ny}^{(0)} \sin^2 \beta + \tau_{gx}^{(0)} \sin 2\beta, \\ \frac{\kappa_{ny}^{(1)} - \kappa_{nx}^{(1)}}{2} \sin 2\beta + \tau_{gx}^{(1)} \cos 2\beta \\ = \frac{\kappa_{ny}^{(0)} - \kappa_{nx}^{(0)}}{2} \sin 2\beta + \tau_{gx}^{(0)} \cos 2\beta. \end{cases} \quad (38)$$

若 x 轴与刀触点轨迹线在 $\mathbf{r}_0$ 点处的切线重合, 即 $\alpha=0$, 则(37)式变为

$$\begin{cases} \kappa_{nx}^{(1)} = \kappa_{nx}^{(2)}, \\ \tau_{gx}^{(1)} = \tau_{gx}^{(2)}. \end{cases} \quad (39)$$

将其代入(38)式得

$$\begin{cases} \kappa_{nx}^{(2)} \cos^2 \beta + \kappa_{ny}^{(1)} \sin^2 \beta + \tau_{gx}^{(2)} \sin 2\beta \\ = \kappa_{nx}^{(0)} \cos^2 \beta + \kappa_{ny}^{(0)} \sin^2 \beta + \tau_{gx}^{(0)} \sin 2\beta, \\ \frac{\kappa_{ny}^{(1)} - \kappa_{nx}^{(2)}}{2} \sin 2\beta + \tau_{gx}^{(2)} \cos 2\beta \\ = \frac{\kappa_{ny}^{(0)} - \kappa_{nx}^{(0)}}{2} \sin 2\beta + \tau_{gx}^{(0)} \cos 2\beta. \end{cases} \quad (40)$$

令 $\kappa_{nx}^{(20)} = \kappa_{nx}^{(2)} - \kappa_{nx}^{(0)}$, $\kappa_{ny}^{(10)} = \kappa_{ny}^{(1)} - \kappa_{ny}^{(0)}$, $\tau_{gx}^{(20)} = \tau_{gx}^{(2)} - \tau_{gx}^{(0)}$, 分别表示曲面之间沿给定方向的诱导法曲率和诱导测地挠率, (40)式变为

$$\begin{cases} \kappa_{nx}^{(20)} \cos^2 \beta + \kappa_{ny}^{(10)} \sin^2 \beta + \tau_{gx}^{(20)} \sin 2\beta = 0, \\ \frac{\kappa_{ny}^{(10)} - \kappa_{nx}^{(20)}}{2} \sin 2\beta + \tau_{gx}^{(20)} \cos 2\beta = 0. \end{cases} \quad (41)$$

从中可以求出

$$\begin{cases} \tan \beta = -\frac{\kappa_{nx}^{(20)}}{\tau_{gx}^{(20)}}, \\ \kappa_{ny}^{(10)} = \frac{(\tau_{gx}^{(20)})^2}{\kappa_{nx}^{(20)}}. \end{cases} \quad (42)$$

由(36)和(39)式得

$$(\kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)})|_\gamma = (\kappa_{ny}^{(1)} - \kappa_{ny}^{(2)}) \sin^2 \gamma \quad (43)$$

将(42)式中 $\kappa_{ny}^{(10)}$ 的表达式代入上式得

$$(\kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)})|_\gamma = \frac{\kappa_{nx}^{(02)} \kappa_{ny}^{(02)} - (\tau_{gx}^{(20)})^2}{\kappa_{nx}^{(02)}} \sin^2 \gamma = \frac{K^{(02)}}{\kappa_{nx}^{(02)}} \sin^2 \gamma \quad (44)$$

其中 $K^{(02)} = \kappa_{nx}^{(02)} \kappa_{ny}^{(02)} - (\tau_{gx}^{(20)})^2$ 称为两曲面间的诱导高斯曲率^[16]. 由两曲面在切触点领域内的几何学理

论知^[16]: 若 $K^{(02)} = 0$, 则至少有一个诱导主曲率为 0, 两个诱导主曲率同时为 0 时两曲面二阶切触, 若仅有一个诱导主曲率为 0, 称两曲面线性切触. 因此命题 3 可以等价表示为下述命题.

命题 5. 刀具包络曲面 $r^{(1)}$ 与设计曲面 $r^{(2)}$ 在 r_0 点处二阶切触当且仅当刀具曲面 $r^{(0)}$ 与设计曲面 $r^{(2)}$ 在 r_0 点线性切触.

这表明刀具包络曲面与设计曲面在刀触点处二阶切触的条件比刀具曲面与设计曲面在在刀触点处二阶切触的条件要弱得多. 本节的主要结论与文献[14]给出的相同, 但推导过程更加简洁.

4 刀具曲面退化为刀尖圆曲线时刀具包络曲面的局部重建

当采用柱刀或盘刀的端圆立铣加工时, 刀具曲面退化为刀尖圆曲线, 刀具包络面退化为刀尖轨迹圆的空间运动生成的圆纹面, (29)和(35)式不再适用, 需要发展一套新的公式. 为简化公式推导, 本节中假定在刀触点 r_0 处建立的坐标系的 x 轴与刀触点轨迹线在该点处的切线重合. 刀尖圆曲线与设计曲面之间的切触关系如图 3 所示.

4.1 刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹线切触时的二阶局部重建

由(16)式得

$$\begin{cases} z_{xx}^{(1)} = z_{xx}^{(2)}, \\ z_{xy}^{(1)} = z_{xy}^{(2)}. \end{cases} \quad (45)$$

由(8)式得

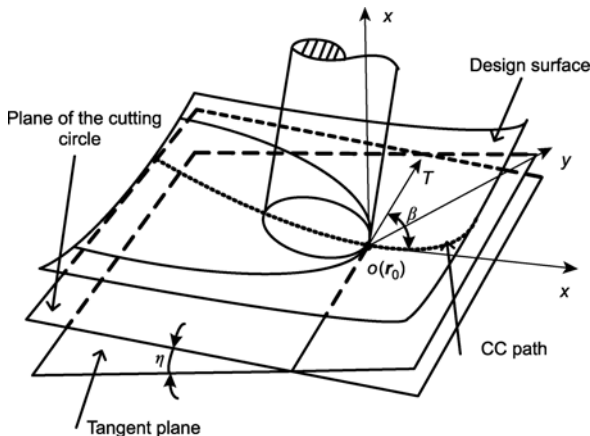


图 3 刀尖圆曲线与设计曲面之间的切触关系

$$(\kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)}) \Big|_\gamma = (z_{yy}^{(1)} - z_{yy}^{(2)}) \sin^2 \gamma = \frac{(\kappa_n^{(1)} - \kappa_n^{(2)}) \Big|_\beta \sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta}, \quad (46)$$

其中 β 为当前刀位下的刀尖圆曲线在 r_0 点处的切方向与 x 轴的夹角. 若刀尖轨迹圆平面与 x - y 平面的夹角为 η , 则由 Meusnier 定理得

$$\kappa_n^{(1)} \Big|_\beta = \frac{\sin \eta}{R}, \quad (47)$$

其中 R 为刀尖轨迹圆的半径. $\kappa_n^{(2)} \Big|_\beta$ 是可以精确求出的, 因此可由(46)式计算出刀具包络曲面 $r^{(1)}$ 与设计曲面 $r^{(2)}$ 在 r_0 点处沿任意方向的诱导法曲率.

4.2 刀具包络曲面与设计曲面沿刀触点轨迹线二阶切触时的三阶局部重建

由(23)式得

$$z_{xxx}^{(1)} = z_{xxx}^{(2)}, \quad z_{xyx}^{(1)} = z_{xyx}^{(2)}, \quad z_{yyy}^{(1)} = z_{yyy}^{(2)}. \quad (48)$$

由(9)式得

$$(\dot{\kappa}_n^{(1)} - \dot{\kappa}_n^{(2)}) \Big|_\gamma = (z_{yyy}^{(1)} - z_{yyy}^{(2)}) \sin^3 \gamma = \frac{(\dot{\kappa}_n^{(1)} - \dot{\kappa}_n^{(2)}) \Big|_\beta \sin^3 \gamma}{\sin^3 \beta}. \quad (49)$$

现在问题的关键是求 $\dot{\kappa}_n^{(1)} \Big|_\beta$, 下面先求刀尖轨迹圆平面 $z = \tan \eta (y \cos \beta - x \sin \beta)$ 与刀具包络面 $r^{(1)}$ 的交线的曲率对其弧长的导数

$$\begin{aligned} \kappa_s = & \frac{z_{xxx}^{(1)} \cos^3 \beta + 3z_{xxy}^{(1)} \cos^2 \beta \sin \beta + 3z_{xyy}^{(1)} \cos \beta \sin^2 \beta + z_{yyy}^{(1)} \sin^3 \beta}{\sin \eta} \\ & + \frac{3(z_{xx}^{(1)} \cos^2 \beta + 2z_{xy}^{(1)} \cos \beta \sin \beta + z_{yy}^{(1)} \sin^2 \beta) \tau_{g\beta}^{(1)} \cos \eta}{\sin^2 \eta}, \end{aligned} \quad (50)$$

其中 $\tau_{g\beta}^{(1)}$ 表示刀具包络曲面在 r_0 点处沿刀尖圆曲线切方向的测地挠率. 文献[16]中证明了两曲面呈二阶线切触时在切触线上两者具有相同的主方向和主曲率, 因此有 $\tau_{g\beta}^{(1)} = \tau_{g\beta}^{(2)}$, 由(8)和(9)式, (50)式可写为

$$\begin{aligned} \kappa_s = & \frac{\dot{\kappa}_n^{(1)} \Big|_\beta}{\sin \eta} + \frac{3 \kappa_n^{(1)} \Big|_\beta \tau_{g\beta}^{(2)} \cos \eta}{\sin^2 \eta} \\ = & \frac{\dot{\kappa}_n^{(1)} \Big|_\beta}{\sin \eta} + \frac{3 \tau_{g\beta}^{(2)} \cos \eta}{R \sin \eta}. \end{aligned} \quad (51)$$

刀尖轨迹圆平面与刀具包络面的交线就是刀尖圆曲

线, 其曲率对弧长参数的导数 $\kappa_s=0$, 因此得

$$\dot{\kappa}_n^{(1)} \Big|_{\beta} = -\frac{3\tau_{s\beta}^{(2)} \cos \eta}{R}. \quad (52)$$

$\dot{\kappa}_n^{(2)} \Big|_{\beta}$ 是可以精确求出的, 因此可由(49)式计算出刀具包络曲面 $\mathbf{r}^{(1)}$ 与设计曲面 $\mathbf{r}^{(2)}$ 在 $\mathbf{r}_0$ 点处沿任意方向的两法截线的法曲率导数的差值.

5 结论

本文研究了两线接触曲面间的几何学特性, 由

刀具包络曲面分别沿刀触点轨迹线和特征线与设计曲面和刀具曲面线接触这一基本条件, 建立了由单个刀位重建刀具包络面局部三阶近似曲面的数学模型, 刻画了刀具曲面、刀具包络面与设计曲面在刀触点领域内的三阶微分关系, 指出刀具包络曲面与设计曲面在刀触点处三阶切触当且仅当刀具曲面与设计曲面在刀触点处沿特征线切方向具有相同的法曲率和法曲率导数. 有关原理和模型适用于任意回转面刀具、任意设计曲面及各种加工方式, 为发展自由曲面三阶切触加工新方法奠定了几何学基础.

参考文献

- 1 Zhu L M, Zheng G, Ding H. Formulating the swept envelope of rotary cutter undergoing general spatial motion for multi-axis NC machining. *Int J Mach Tool Manuf*, 2009, 49(2): 199—202
- 2 Zhu L M, Zhang X M, Zheng G, et al. Analytical expression of the swept surface of a rotary cutter using the envelope theory of sphere congruence. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2009, 131(4): 041017-1—041017-7
- 3 Deng Z, Leu M C, Wang L, et al. Determination of flat-end cutter orientation in 5-axis machining. *ASME Med*, 1996, 4: 73—80
- 4 Kruth J-P, Klewais P. Optimization and dynamic adaptation of the cutter inclination during five-axis milling of sculptured surfaces. *CIRP Ann-Manuf Tech*, 1994, 43(1): 443—448
- 5 Rao N, Bedi S, Buchal R. Implementation of the principal-axis method for machining of complex surfaces. *Int J Adv Manuf Tech*, 1996, 11(4): 249—257
- 6 Bedi S, Gravelle S, Chen Y H. Principal curvature alignment technique for machining complex surface. *J Manuf Sci E-T ASME*, 1997, 119(4B): 756—765
- 7 Warkentin A, Ismail F, Bedi S. Multi-point tool positioning strategy for 5-axis machining of sculptured surfaces. *Comput Aided Geom D*, 2000, 17(1): 83—100
- 8 Chiou C J, Lee Y S. A machining potential field approach to tool path generation for multi-axis sculptured surface machining. *Comput Aided Design*, 2002, 34(5): 357—371
- 9 Yoon J H, Pottmann H, Lee Y S. Locally optimal cutting positions for 5-axis sculptured surface machining. *Comput Aided Design*, 2003, 35(1): 69—81
- 10 倪炎榕, 马登哲, 张洪, 等. 圆环面刀具五坐标数控加工复杂曲面优化刀位算法. *机械工程学报*, 2001, 37(2): 87—91
- 11 曹利新, 吴宏基, 刘健. 基于五坐标数控圆柱形刀具线接触加工自由曲面的几何学原理. *机械工程学报*, 2003, 39(7): 134—137
- 12 王小椿, 吴序堂, 李艳斌. 密切曲率法——一种自由曲面加工的新概念. *西安交通大学学报*, 1992, 26(5): 51—58, 109—110
- 13 Rao A, Sarma R. On local gouging in five-axis sculptured surface machining using flat-end tools. *Comput Aided Design*, 2000, 32(7): 409—420
- 14 Gong H, Cao L X, Liu J. Second order approximation of tool envelope surface for 5-axis machining with single point contact. *Comput Aided Design*, 2008, 40 (5): 604—615
- 15 何乃翔, 李世铎. 共轭曲面的曲率张量与曲率导数张量. *机械工程学报*, 1979, 15(3-4): 93—108
- 16 曹利新, 宫虎, 刘健. 曲面接触问题及其等距面接触特性研究. *大连理工大学学报*, 2007, 47(1): 39—44