一种高速铁路无砟轨道混凝土结构疲劳损伤模型

朱胜阳, 蔡成标*

西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031

* E-mail: cbcai@home.swjtu.edu.cn

收稿日期: 2014-03-27; 接受日期: 2014-04-24

国家重点基础研究发展计划(批准号: 2013CB036202, 2013CB036206)、国家高技术研究发展计划(批准号: 2011AA11A103-3)、中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 2682013CX029)和 2013 西南交通大学优秀博士学位论文培育项目资助

摘要 基于连续损伤力学理论和边界面概念, 建立了高速铁路无砟轨道混凝土结构在循环荷载作用下的疲劳损伤模型. 模型在主坐标系中采用了拉压两个边界面, 根据加载面与极限断裂面、边界面之间的位置关系来计算高速铁路无砟轨道混凝土结构在复杂应力状态下的损伤, 并由累积损伤与应变能释放率之间的关系确定循环加载中极限断裂面的变化规律. 通过将该理论模型嵌入有限元软件 ABAQUS 的用户材料子程序 UMAT, 与同类模型进行比较验证了模型的可行性. 最后对高速铁路双块式无砟轨道支承层进行了循环动荷载作用下的疲劳累积损伤分析. 结果表明该模型不仅能够较好地反映支承层在循环荷载作用下疲劳损伤非线性演变规律, 还可以展现其疲劳损伤分布形态的全过程, 为研究高速铁路无砟轨道混凝土结构的疲劳损伤与寿命预测, 提供了可行的理论分析方法.

关键词无砟轨道
疲劳损伤
边界面
循环荷载
用户子程序

1 引言

高速铁路无砟轨道结构在循环重复的列车动荷载作用下可能会导致结构的疲劳破坏, 这将不仅直接影响高速列车运行舒适性与安全性, 而且由此带来的维修费用和维修难度都是空前的, 是高速铁路无砟轨道发展亟待解决的关键问题之一.

在列车动荷载作用下高速铁路无砟轨道混凝土结构应力幅一般较低, 但是荷载的循环次数很高, 属于复杂应力状态下的高周疲劳问题. 针对混凝土结构疲劳损伤问题, 文献[1]利用损伤因子张量在能量释放率空间建立了各向异性弹性损伤模型, 用于预测混凝土承受单轴受压疲劳荷载作用下的疲劳寿命; 文献[2]基于连续损伤力学理论, 提出了混凝土单轴

拉-压疲劳损伤模型, 模拟了混凝土在单轴循环荷载作用下的刚度退化过程; 文献[3]建立了定侧压混凝土双轴压各向异性损伤模型, 较好地揭示了混凝土在循环荷载作用下的疲劳损伤过程. 而高速铁路无砟轨道混凝土结构在列车荷载作用下应力状态比较复杂, 以上建立在特定应力状态下的疲劳损伤模型难以反映其累积损伤过程. 文献[4]采用混凝土塑性损伤模型对双块式无砟轨道在温度与列车动荷载作用下的损伤特性进行了研究; 文献[5]采用内聚力模型来模拟轨道板与砂浆充填层之间的界面损伤破坏, 研究了变温和列车动荷载共同作用下界面损伤的变化规律及界面损伤对轨道板振动特性的影响. 文献[6]基于车辆-轨道耦合动力学理论和 Miner 线性累积损伤准则对 CRTS I 型板式轨道进行了寿命预测. 但目

引用格式: 朱胜阳, 蔡成标. 一种高速铁路无砟轨道混凝土结构疲劳损伤模型. 中国科学: 技术科学, 2014, 44: 714-721

Zhu S Y, Cai C B. A fatigue damage model of concrete structure for ballastless track in high-speed railway (in Chinese). Sci Sin Tech, 2014, 44: 714-721, doi: 10.1360/N092014-00089

前针对高速铁路无砟轨道结构在复杂应力状态下的非线性疲劳损伤模型却鲜见相关文献报道. 为此, 本文基于连续损伤力学理论和边界面概念, 建立了高速铁路无砟轨道结构在重复荷载作用下的疲劳损伤分析模型, 并将该理论模型嵌入有限元软件 ABAQUS 的用户材料子程序 UMAT, 对高速铁路双块式无砟轨道支承层进行了循环动荷载作用下的疲劳累积损伤分析. 本文的研究可为高速铁路无砟轨道混凝土结构的疲劳损伤问题提供可行的理论分析方法.

2 疲劳损伤模型

2.1 边界面模型

为了建立一个计算损伤演变的合理模型, 参考 Dafalia 与 Popov^[7]提出的边界面模型, 并借用文献[8]在应变能释放率空间提出的加载面、边界面、极限断裂面概念, 其具体形式如下:

$$f = (R_i R_i)^{1/2} - R_c / b = 0, \quad (1)$$

$$F = (\bar{R}_i \bar{R}_i)^{1/2} - R_c = 0, \quad (2)$$

$$f_o = (R_i R_i)^{1/2} - R_o = 0, \quad (3)$$

$$R_i = -\rho \frac{\partial W}{\partial \omega_i}(\varepsilon_i, \omega_i), \quad (4)$$

$$\bar{R}_i = b R_i, \quad (5)$$

$$b = R_c / (R_i R_i)^{1/2}, \quad (6)$$

式中 f, F, f_o 分别为加载面、边界面、极限断裂面, 其中 R_i 为应变能释放率, $\bar{R}_i$ 为加载面上一点 R_i 在边界面上的投影点, R_c 为拉压边界面极限能量释放率, 可由混凝土单轴强度试验确定, R_o 为极限断裂面的大小, 在疲劳加载过程中随着损伤的增加而增大, ρ 为材料质量密度, W 为应变能, ε_i 为应变张量, ω_i 为损伤变量分量.

2.2 损伤演化准则

根据加载面 $f=0$ 与极限断裂面、边界面之间的位置关系来计算, 并假定损伤增量矢量与 f 的梯度同轴, 各主轴方向的损伤分量可表示为

$$d\omega_i = d\lambda \frac{\partial f}{\partial R_i} = d\lambda n_i. \quad (7)$$

令 $k=R_c/b$, 由(1)式, 加载面可表示为

$$f(R_i, k) = (R_i R_i)^{1/2} - k(\bar{\omega}_p) = 0, \quad (8)$$

式中, $\bar{\omega}_p$ 为累积损伤平均值, 其增量定义为

$$d\bar{\omega}_p = (d\omega_i d\omega_i)^{1/2}. \quad (9)$$

将(7)代入(9)式得

$$d\bar{\omega}_p = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} \frac{\partial f}{\partial R_i} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

由(1)式易知 $\frac{\partial f}{\partial R_i} \frac{\partial f}{\partial R_i} = 1$, 所以

$$d\bar{\omega}_p = d\lambda, \quad (11)$$

由一致性条件 $df=0$, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial R_i} dR_i + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0. \quad (12)$$

由(8)式得 k 的增量可表示为

$$dk = \frac{\partial k}{\partial \bar{\omega}_p} d\bar{\omega}_p = \frac{\partial k}{\partial \bar{\omega}_p} d\lambda. \quad (13)$$

对损伤材料, 应变能密度为

$$\rho W(\varepsilon_i, \omega_k) = \frac{1}{2} \sigma^T(\varepsilon_i, \omega_k) : \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T : \bar{D} : \varepsilon, \quad (14)$$

式中, $\bar{D}$ 为有效弹性矩阵.

将(4)式的增量形式代入(12)式可得

$$\frac{\partial f}{\partial R_i} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \varepsilon_k} d\varepsilon_k + \frac{\partial R_i}{\partial \omega_j} d\omega_j \right) + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \bar{\omega}_p} d\lambda = 0. \quad (15)$$

由(7), (8), (11), (15)式可得

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial \varepsilon_k} d\varepsilon_k}{H - \frac{\partial f}{\partial R_n} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_m} \frac{\partial f}{\partial R_m}}. \quad (16)$$

令 $H = \partial k / \partial \bar{\omega}_p$, 为损伤模量, 可表示为加载面与边界面之间的距离的函数

$$H = \frac{D\delta}{\langle \delta_m - \delta \rangle}, \quad (17)$$

式中, D 为材料参数, 与混凝土强度有关. $\langle \rangle$ 为克罗尼克符号, 即小于 0 的数取 0, δ 为标准化的加载面与边界面之间的距离:

$$\delta = \frac{(\bar{R}_i \bar{R}_i)^{1/2} - (R_i R_i)^{1/2}}{(\bar{R}_i \bar{R}_i)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{b}. \quad (18)$$

当加载面首次与极限断裂面相交时, $\delta = \delta_m$.

最后由(7)式得到损伤增长的表达式为

$$d\omega_i = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial \varepsilon_k} d\varepsilon_k}{H - \frac{\partial f}{\partial R_n} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_m} \frac{\partial f}{\partial R_m}} \right) \frac{\partial f}{\partial R_i}. \quad (19)$$

当不考虑极限断裂面的大小的变化时, 模型可用于计算混凝土结构在单调加载时的损伤演化. 而在疲劳加载过程中, 极限断裂面是随着疲劳荷载循环次数的增加而变化的, 是积累损伤值的函数, 符合椭圆形式的关系曲线^[1]:

$$\frac{(R_o - R_o^i)^2}{(R_o^b - R_o^i)^2} + \frac{(\bar{\omega} - \bar{\omega}_b)^2}{(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_b)^2} = 1, \quad (20)$$

式中, R_o^i 和 $\bar{\omega}_i$ 为极限断裂面的大小和相应的损伤; R_o^b 和 $\bar{\omega}_b$ 分别边界面的大小和相应损伤.

2.3 增量形式的应力-应变关系

在进行结构有限元分析时, 需将载荷分成若干个增量, 因此需要获得材料增量形式的本构关系及一致切线刚度矩阵^[9,10]. 损伤材料的有效柔度矩阵为^[11]

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\bar{C}_{11} = \frac{(1 - \beta\omega_1)^2}{E(1 - \alpha\omega_1)^2(1 - \beta\omega_2)^2(1 - \beta\omega_3)^2},$$

$$\bar{C}_{22} = \frac{(1 - \beta\omega_2)^2}{E(1 - \alpha\omega_2)^2(1 - \beta\omega_3)^2(1 - \beta\omega_1)^2},$$

$$\bar{C}_{33} = \frac{(1 - \beta\omega_3)^2}{E(1 - \alpha\omega_3)^2(1 - \beta\omega_1)^2(1 - \beta\omega_2)^2},$$

$$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} = \frac{-\nu}{E(1 - \alpha\omega_1)(1 - \alpha\omega_2)(1 - \beta\omega_3)^2},$$

$$\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31} = \frac{-\nu}{E(1 - \alpha\omega_1)(1 - \alpha\omega_3)(1 - \beta\omega_2)^2},$$

$$\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32} = \frac{-\nu}{E(1 - \alpha\omega_2)(1 - \alpha\omega_3)(1 - \beta\omega_1)^2}, \quad (22)$$

其中, ω_i ($i=1, 2, 3$) 为主应力方向上损伤分量, α, β 为拉压试验常数, E 为弹性模量, ν 为泊松比.

增量形式的应力-应变关系可表示为

$$\sigma_i = \bar{D}_{ij} \varepsilon_j, \quad (23)$$

式中 $\bar{D}_{ij}$ 为有效弹性矩阵, 是有效柔度矩阵的逆矩阵, 即 $\bar{D} = [\bar{C}]^{-1}$.

将上式对 ε_j 求导得

$$d\sigma_i = \bar{D}_{ij} d\varepsilon_j + \varepsilon_l \frac{\partial \bar{D}_{ij}}{\partial \omega_k} d\omega_k. \quad (24)$$

将应变控制的损伤演化方程式(19)代入上式得增量形式的应力应变关系

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_j} = \bar{D}_{ij} + \varepsilon_l \frac{\partial \bar{D}_{ij}}{\partial \omega_k} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial R_k}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_j}}{H - \frac{\partial f}{\partial R_n} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_m} \frac{\partial f}{\partial R_m}} \right), \quad (25)$$

其中, 等式右边即为一致切线刚度矩阵.

3 疲劳损伤模型在 ABAQUS 中的实现

在 ABAQUS/Standard 中, 每一个增量加载步开始时, 主程序在单元的积分点上调用 UMAT 子程序, 并传入已知状态的应力、应变、应变增量、荷载增量、时间步长以及求解过程相关的变量; UMAT 子程序根据本构方程更新应力及其他相关的量, 提供雅可比矩阵给 ABAQUS 主程序以形成整体刚度矩阵; 主程序结合当前荷载增量求解位移增量, 继而进行平衡校核, 然后进行下一增量步的求解^[12,13]. 根据上述思路, 本文的 UMAT 子程序编程思路与步骤如下.

1) 由 ABAQUS 主程序传到用户子程序中的各

积分点应变增量, 计算当前各积分点在总体坐标系下的应变.

2) 根据总体坐标系下的当前应变计算主应变, 并形成主坐标系与总体坐标系之间的旋转矩阵.

3) 根据(4)式, 由主应变计算各主轴方向上的拉伸和压缩能量释放率, 再由(8)式确定加载面、极限断裂面和界面之间的位置关系.

4) 若加载面处于极限断裂面与界面之间, 则根据损伤演化方程(19)式计算各积分点的损伤增量, 得到当前各积分点的损伤值.

5) 由当前各积分点的损伤值, 根据(20)式分别确定拉伸和压缩极限断裂面大小的变化.

6) 形成主坐标系下的单元有效弹性矩阵, 并利用旋转矩阵建立总体坐标系下的有效弹性矩阵.

7) 由总体坐标系下的当前应变和有效弹性矩阵更新当前应力.

8) 根据(25)式更新雅可比矩阵(一致切线刚度矩阵), 以进行下一增量步的迭代.

9) 更新并保存状态变量, 作为下一增量步的初始条件, 并用于后处理显示.

4 模型验证

从上面推导可以看出, 本文模型适用于结构在各种应力状态下的单调加载和疲劳加载损伤演变分析, 因此本文可通过与文献[14]中对混凝土单轴受压加载的理论计算与实验结果进行对比, 以验证模型的有效性. 文献中所用混凝土的轴心抗压强度 $f_c = 35.6$ MPa, 弹性模量 $E = 3.18 \times 10^4$ MPa, 与抗压强度有关的 $\beta = 0.1$, 受压极限能量释放率 $R_c = 8.35 \times 10^{-2}$ MPa. 在 ABAQUS 中采用 8 节点实体单元 C3D8, 调用编写的 UMAT 子程序进行模拟, 计算结果如图 1 所示.

由图看出, 本文模型计算得到的应力应变关系曲线和文献[14]的计算结果与实验相比, 均在上升段吻合很好, 而下降软化阶段两者略有误差, 但总体来说具有较好的一致性, 可见本文模型是正确有效的.

5 算例分析

5.1 有限元模型

以路基不均匀沉降区段高速铁路双块式无砟轨道为例, 分析支承层在重复余弦荷载作用下的疲劳

图 1 单轴压应力-应变关系对比

(a) 本文模型计算得到的应力-应变关系; (b) 文献[14]中理论计算与试验得到的应力-应变关系

累积损伤演变规律. 基于 ABAQUS 有限元软件, 建立了在路基不均匀沉降区段上双块式无砟轨道结构模型, 如图 2(a)所示. 考虑到结构对称, 可取模型的一半, 并在对称面上施加对称约束进行分析. 模型纵向长度取为 20 m, 中间 10 m 为不均沉降区段, 路基不均匀沉降根据文献[15]将 15 mm/20 m 的半波余弦沉降等效为 1.875 mm/10 m 的全波余弦沉降, 如图 2(b)所示, 并在支承层与路基上表面建立合适的接触关系. 支承层采用 C3D8 单元进行模拟, 道床板、路基采用 C3D8R 单元模拟, 钢轨采用 B31 单元模拟. 最后在钢轨上施加双轴循环荷载(模拟一个转向架的荷载位置), 每轴载的频率为 10 Hz, 幅值为 200 kN.

5.2 计算参数

有限元模型中钢轨、道床板、路基采用线弹性本构, 不考虑其疲劳损伤, 力学参数见表 1. 支承层采用上文提出的疲劳损伤模型, 按混凝土 C15 强度标准, 选取与抗拉强度有关的 $\alpha = 0.12$, 与抗压强度有关的 $\beta = 0.22$; 初始受拉极限断裂面的大小 R_t^0 取为 10.5 Pa, 初始受压极限断裂面大小 R_c^0 取为 66.6 Pa, 加载面与受拉界面重合时 $R_t = 15.2$ Pa, 加载面与受压边

图2 (网络版彩图)双块式无砟轨道模型
(a) 有限元模型; (b) 模型纵向布置

表1 结构弹性参数

结构	钢轨	道床板	基床表层	基床底层
弹性模量(MPa)	2.1×10^5	3.4×10^4	200	100
泊松比	0.3	0.2	0.25	0.25
密度(kg m^{-3})	7840	2400	1950	1950

界面重合时 $R_c = 5.52 \times 10^{-3}$ MPa. 支承层弹性模量取为 5000 MPa.

5.3 计算结果及分析

图 3 给出了双块式无砟轨道支承层在疲劳加载过程中, 疲劳损伤最大位置处最大主拉应力与最大主应变之间的关系. 随着荷载循环次数的增加, 可以看出:

1) 应力-应变关系曲线的斜率逐渐减小, 表明支承层局部刚度随着损伤的累积逐渐减小.

表2 支承层疲劳累积损伤过程

循环次数(万次)	10	20	30	40	50	60	70	80
损伤值	0.30	0.50	0.63	0.73	0.80	0.88	0.94	0.98

图3 循环加载中最大主应力与主应变的变化关系

2) 支承层局部刚度退化导致其底部最大主应变逐渐增大, 但由于路基的约束作用, 其幅值变化不大.

3) 由于支承层最大主应变的减小和局部刚度的减小, 最大主拉应力的大小和幅值均在逐渐减小.

图 4 和表 2 给出了双块式无砟轨道支承层在疲劳荷载作用下的疲劳累积损伤演变规律, 可以看出

1) 由于极限断裂面的大小随着循环次数的增加逐渐增大, 在循环加载前期, 疲劳损伤增长较快, 后期趋于缓慢.

2) 当循环次数达到 80 万次时, 支承层的最大疲劳累积损伤值约为 0.98, 支承层局部发生疲劳开裂.

3) 在循环荷载的作用下, 支承层的疲劳累积损伤过程为一非线性过程, 疲劳累积损伤与应力应变场有着明显的相互耦合作用.

图 5 给出了支承层疲劳损伤发展的过程及分布

图4 支承层疲劳累积损伤演变

图 5 (网络版彩图)支承层疲劳累积损伤发展过程及分布形态

(a) 循环加载 10 万次后损伤云图($\bar{\omega}_{\max}=0.30$); (b) 循环加载 50 万次后损伤云图($\bar{\omega}_{\max}=0.80$); (c) 循环加载 80 万次后损伤云图($\bar{\omega}_{\max}=0.98$)

形态,可以看出在整个过程中支承层损伤主要集中在加载点下方路基不均匀沉降幅值处附近,损伤非线性增大,且没有向周围扩散。

6 结论

基于连续损伤力学理论界面概念,将高速铁路无砟轨道混凝土看作各向异性损伤材料,充分考虑无砟轨道混凝土结构在服役过程中承受的复杂应

力状态,在主坐标系下引入拉压两个界面和大小变化的极限断裂面,建立了高速铁路无砟轨道混凝土结构疲劳损伤模型;通过将该理论模型嵌入有限元软件 ABAQUS 的用户材料子程序 UMAT,模拟分析了双块式无砟轨道支承层在循环荷载作用下刚度退化过程。结果表明该模型能够较好地反映支承层在疲劳加载中的累积损伤非线性演变规律、损伤程度和分布形态,为解决高速铁路无砟轨道结构的疲劳损伤分析与寿命预测,提供了可行的理论分析方法。

参考文献

- 1 AL-Gadhib A H, Baluch M H, Shaalan A, et al. Damage model for monotonic and fatigue response of high strength concrete. *Int J Damage Mech*, 2000, 9: 57-78
- 2 吕培印, 李庆斌, 张立翔. 混凝土拉-压疲劳损伤模型及其验证. *工程力学*, 2004, 21: 162-167
- 3 吕培印, 李庆斌, 张立翔. 定侧压混凝土双压疲劳损伤模型. *工程力学*, 2004, 21: 77-82
- 4 朱胜阳, 蔡成标. 温度和列车动荷载作用下双块式无砟轨道道床板损伤特性研究. *中国铁道科学*, 2012, 33: 6-12
- 5 Zhu S Y, Cai C B. Interface damage and its effect on vibrations of slab track under temperature and vehicle dynamic loads. *Int J Nonlin Mech*, 2014, 58: 222-232
- 6 Zhu S Y, Cai C B. Fatigue life prediction of CRTS I ballastless slab track. In: *International Conference on Transportation Engineering*. Chengdu, 2011. 1714-1719
- 7 Dafaia Y F, Popov E P. Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region. *Nucl Eng Des*, 1975, 21: 173-192
- 8 Suaris W, Ouyang C, Fernando V. Damage model for cyclic loading of concrete. *J Eng Mech-ASCE*, 1990, 116: 1020-1035
- 9 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2009
- 10 Simo J C, Hughes T J R. *Computational Inelasticity*. New York: Springer, 1998
- 11 Khan A R, AL-Gadhib A H, Baluch, M H. An elasto-damage constitutive model for high strength concrete. In: *Proceedings of the EURO-C 1998 Conference on Computational Modeling of Concrete Structures*. Austria, 1998. 133-142
- 12 庄茁. 基于 ABAQUS 的有限元分析和应用. 北京: 清华大学出版社, 2009
- 13 Hibbit, Karlson, Sorenson. *ABAQUS User's Manual*. Rhode Island: Pawtucket R I, 2002
- 14 李庆斌, 吕培印, 张立翔. 混凝土受压疲劳特性及损伤本构模型. *水利学报*, 2004, 4: 21-26
- 15 刘学毅, 赵坪锐, 杨荣山, 等. 客运专线无砟轨道设计理论与方法. 成都: 西南交通大学出版社, 2010

A fatigue damage model of concrete structure for ballastless track in high-speed railway

ZHU ShengYang & CAI ChengBiao

State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

A fatigue damage model is established for predicting the response of concrete structure of ballastless track in high-speed railway subjected to cyclic loading using continuum damage mechanics and the concept of bounding surface. The tension and compression bounding surfaces in principal coordinate system are employed in the theoretical model, the damage level under the complex stress state is calculated according the position of the loading surface between the limit fracture surface and the bounding surface, and the varying size of the limit fracture surface is determined through the relation between the accumulative damage and the strain energy release. The fatigue damage model is implemented in the finite software ABAQUS by using the user material subroutine UMAT. It is proven to be reasonable and feasible by the comparison with existing similar models. The fatigue damage evolution of the supporting layer of double-block ballastless track in high-speed railway under cyclic loading is simulated. Results show that the proposed model can not only well reflect the nonlinear evolution law of the supporting layer fatigue damage, but also describe the damage state in its degeneration process. This provide a feasible theoretical method for the fatigue damage analysis of ballastless track in high-speed railway.

ballastless track, fatigue damage, bounding surface, cyclic loading, user material subroutine

doi: 10.1360/N092014-00089