

中國古代數學的偉大成就

錢寶琮

(浙江大學)

因為九章算術集中國古代數學之大成，他的內容非常豐富，而三國末年劉徽注解的九章算術是一部流傳到現在的最古的數學專門著作，所以今天講中國古代數學的發展，就講到三國時代為止。

數學是一連串的抽象理論與計算方法，它從實踐中獲得數量與形象的概念，由感性認識提升到理性認識，再把它應用到實踐中去。我國古代在黃河流域一帶開化極早，在農業生產方面有測量田地面積，推算倉廩容量的經驗，商業方面有物資交易的經驗，因為日常生活上的實際需要，勞動人民對於數學一定有很多的認識。後來到初期封建社會裏，統治階級爲了要收納賦稅，必須建立一個會計制度。要防止黃河氾濫，必須知道堤防土方的計算。要修訂一個適用的曆法。必須知道天象循環週期的統計。要製造各種器具，必須知道圓規方矩的應用。各方面都需要一些數學理論與計算方法，當時的數學家必定很早就有了偉大的成就。我國春秋(722—481B.C.)戰國(480—221B.C.)時代各家哲學與其他人文學科都已普遍發展，那種轟轟烈烈的研究風氣決不在同時代希臘學者之下。但是希臘數學從泰利斯(約600B.C.)開始，到彼塔哥拉斯、伯拉圖、歐基里特等大家，在整數論與幾何學等學科有很多的研究成績流傳到現在。而中國在秦以前的諸子百家中竟沒有一個肯化費工夫去討論數學，著述一些傳給後世。這是一個很難解釋的問題，要請大家指教的。一本漢朝人寫的韓詩外傳裏記載一個故事，說“齊桓公設庭燎，爲士之欲見者。期年而士不至。於是東野鄙人有以九九見者。桓公使戲之曰：‘九九足以見乎？’鄙人曰：‘夫九九薄能耳，而君猶禮之，況賢於九九者乎？’九九二字原來是乘法表‘九九八十一’等歌訣的簡稱，這裏應當解釋作乘除算法。從這個故事，我們可以

知道，在一方面，春秋時期淺近的數學知識已經是家喻戶曉，不足爲奇的常識。而在另一方面，當時爲封建統治階級服務的知識分子以爲數學的研究沒有意義，只有生產勞動的“鄙人”纔肯重視他。

秦以前的中國數學家儘管早已有很多的收穫，而數學的專門著作到漢朝纔有記錄。漢書律曆志裏說明記數方法與計算用的算籌，並說到“其法在算術，宣於天下，小學是則。”藝文志裏著錄數學書籍有“杜忠算術十六卷。許商算術二十六卷。”兩種。“算”是計算用的算籌，“算術”應當是運用算籌的法則。古人用算籌記數，並且搬運算籌做加、減、乘、除、開方等工作。後來的珠算就是從籌算演變而來的。因爲一切的計算都要用籌，所以算術二字包含當時數學的全部知識，與現在算術的含義是不相同的。最初的算術書是勞動人民積累的研究記錄，未必保留作者的名字。藝文志所錄的兩種算術都早已失傳，他們的內容無可查考。我們只知道許尚在漢成帝初年(32B.C.)做過博士，後來做將作大匠、河堤都尉、大司農等官職，對於土木建築，糧食租稅等事，都應該有實踐的經驗。傳到後世的算術書叫九章算術。所有的算法，分別隸屬於方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股、九章。這部九章算術一定是東漢時代的書籍，理由是：一、章字的意義與西漢初年不同。秦以前詩歌以一解爲一章，論語以一節爲一章，法律以一條爲一章，字數皆極簡短。按照九章算術的豐富內容，在西漢時應該稱算術九篇，不應叫做“九章”。二、均輸是漢武帝所定的徵收實糧的制度。均輸章裏最初幾個問題就是實行均輸法的例題。三、根據後漢章帝時鄭衆所作周官“九數”的注解，勾股算法並不在九數之內。九章算術內成立勾股一章，應當在章帝以後。過分尊崇古代文化，說九章算術是周朝初年的著作是沒有根據的。但是秦以

前的數學知識以及西漢時代各家算術書的菁華一定保存在後出的九章算術之內。

現在讓我們來討論九章算術的內容，表揚古代數學的偉大成就。

一、古代的算籌記數是用地位制(Principal of local value)的，整數加減乘除在中國古代很早就有了完整的法則。九章算術裏雖然沒有詳細的說明，但是在晉朝的孫子算經與別種算書裏我們可以明瞭古代的籌算法則。中國的籌算乘除法傳到印度演變爲土盤算法(dust abacus)，傳到亞拉伯，演變爲筆算的削去法(scratch method)，傳到歐洲逐漸改進到現在的算法。演變的經過都有可靠的史料可以考證明白。

二、籌算除法，列實數(被除數)於中間，法數(除數)於下邊，除得的數(商數)列於上邊。除到最後，中間實數或者還有餘數，就拿餘數作分子，法數作分母，連同商數變成一個帶分數。後來印度人的土盤算法亦寫分子在上，分母在下，表示一個分數。亞拉伯人在分子分母之間添上一橫劃，就是現在分數的寫法。九章算術方田章裏的分數算法有通法、約分、分數的加減法，乘法。粟米章與別章裏有分數的除法，都與現在的算法相同。後來印度，亞拉伯人的分數算法，亦是從中國傳過去的。

三、在粟米章與均輸章裏解決的問題大都是從“所有率”“所求率”“所有數”推求“所求數”。用所求率，所有數相乘爲實，所有率爲法，除得的商數即是所求數。這種算法傳到印度稱爲三率法(rule of three)再由印度傳到亞拉伯，由亞拉伯傳入歐洲，寫成現在的形式稱爲比例。並且有黃金法則(Golden rule)的稱謂。又衰分章解決配分問題，均輸章裏的均輸法例題是複比例問題。

四、盈不足章所講的算法是解決算術難題，或代數應用問題的一種方法，用盈不足術解決一個難題，我們先假想兩個答數，分別依照題目的意思驗算出來的數目或是比題目裏的所有數多，或比所有數少，然後用兩次假想的數與有餘，不足的差數，依術算出真的答數來。用這種算法來解決一次方程式問題是準確的，解決其他問題可以得到近似的答數。後來的中國數學家遇到這一類問題有了直捷了當的解法，九章算術的盈不足術就不必借重了。可是盈不足術流傳到亞拉伯，亞拉伯人十分重視，編入他們的代數書內，有契丹算法(hisab

al Khataayn)的稱謂。由亞拉伯傳到歐洲，在十六、七世紀中代數學書亦普遍採用，改稱“雙假借法”(rule of double false position)。

五、方程章解決聯立一次方程式應用問題，所立算式，未知數不用符號表示，只用算籌自上而下臚列各項係數，列常數項於最下，完成一行。二元者列二行，三元者列三行，排列算籌好像一個方陣，所以叫做方程。解“方程”的時候，消去任何一元的步驟與現在教科書裏的加減消去法大同小異，因爲各行各項的係數有正有負，相消時必須熟悉正負數的加減法則，在方程章裏已有詳盡的說明。這種聯立一次方程式算法傳到印度，印度人把各項籌式改爲橫寫，並添補未知數名色，就是現在代數寫法的遠源，印度人認識負數，說他有欠債的意義大約亦是從中國數學學習到的。

六、少廣章講開平方與開立方的原則，與現在教科書裏的開方法，開立方方法略有不同，開平方時，用算籌布置實(被開方數)，法(一次項係數)，與借算(平方的係數，1)三層，開立方時，用算籌布置實法中行(二次項係數)與借算(立方係數1)四層。逐步推算，改換各層所列的數目。這種算法很容易推廣到求一般的二次方程式與三次方程式的正根，勾股章裏有一個問題，就是這樣求二次方程式的一正根解決的，後來宋朝的數學家另有解高次方程式的“增乘開方法”(與現在教科書內的所謂霍納方法步驟相同)，大概亦是從少廣章開平方，開立方方法發展來的。

七、方田章講田地面積的計算。長方形、三角形、梯形與圓面積公式都是準確的。商功章各種體積的計算，凡柱體、錐體、台體等體積，應有盡有，亦都是準確的。因爲圓周率取用約數了，圓面積與圓體，圓錐等體積，所得的近似值，誤差甚大。

八、中國勾股定理的發現，不曉得是在什麼時代。到西漢末年的天文書籍周易裏見到這個定理的應用，大約在東漢時代，許多有關勾股弦與他們的和，差的定理，從勾股定理發展出來。九章算術的勾股章就是應用這許多定理解決實際問題的。勾股章裏又有勾股形內切圓問題，知道內切圓徑是以勾、股、弦三數的和除二倍勾、股相乘積，所得的商數。

九、三國時代的劉徽撰九章算術註，自序作於魏元帝景元四年(263 A.D.)除了把九章算術裏各

種算法解釋理由，各個定理補充證明外，他在方田章圓田術下寫出他的圓周率的研究成績，他從圓半徑與內接正 n 邊形邊長，用勾股定理計算內接正 $2n$ 邊形的邊長，因而算出內接正 $4n$ 邊形的面積。從內接正六邊形起算，算到正192邊形面積後，得着

$\pi = \frac{157}{50}$ 的比率。又算到正3072邊形面積後，得着

$\pi = \frac{3927}{1250}$ 的比率，比希臘多祿某（約150A.D.）

所用的周率 $3^{\circ}8'30''$ 還要精密。

十、重差術是東漢時代人測量高遠的一種方法。應用相似直角三角形相當邊成比例的知識，從兩次觀測可以推算任何目標的高與遠。劉徽推廣此術的應用，寫成專章，並自作註解，附於九章算術的後面。因為第一題是一個測量海島的問題，所以有“海島算經”的名稱。

把中國古代數學與希臘數學對比一下，我們可以說中國古代數學有下列三個優點：1. 用算籌記數，一切數字記算相當便利。繁複的分數四則與

開平方，開立方等運算，都沒有困難。2. 能够掌握一元與多元的代數式的運算規律，做好化繁為簡的工作。3. 數與量得到充分的聯繫。但是亦有他的缺點，例如：1. 所有名詞，不立定義。2. 一切知識的獲得單從實際出發，沒有經過謹嚴的證明。

3. 講公約數時沒有說到質數。4. 計算面積體積時，沒有提到可通約量與不可通約量。所謂優點是勝過希臘的地方，所謂缺點亦是不如希臘的地方。第五世紀以後，大部分印度數學是中國式的，第九世紀以後，大部分亞利伯數學是希臘式的，到第十世紀中這兩派數學合流，通過非洲北部與西班牙的回教徒，傳到歐洲各地。於是歐洲人一方面恢復已經失去的希臘數學，一方面吸收有生力量的中國數學。近代數學纔得開始辯證的發展。

我們學習數學，應當尊重祖國數學家的偉大成就。

[1951年5月26日在杭州市中等學校自然
科教學研究會數學組演講]

英科學家擁護和平

十八位著名英國科學家於8月24日在“泰晤士報”上發表了一封公開信，呼籲社會人士支持新成立的“科學界和平委員會”。這封信開頭說：“我們正處在第三次世界大戰的危機中，作為科學家與公民，我們決心盡我們的能力防止它的發生。”該信指出現代戰爭武器是科學技術的產品，它們日漸增加的破壞力“正在迫使科學家認識到他們的道德上的責任”。這些科學家寫道：“我們的職責是請求人民與政府以談判方式求得持久的解決，這種解決要能够防止那些殺人工具的使用。我們的職責是使公眾了解現代戰爭的破壞性與災難，建設性科學可以帶來的幸福。”他們宣稱：作為科學家，“我們的職責是為消除一切限制妨礙全世界科學家自由交往的障礙而努力”。該信結語時請求其他科學家予以支持。在這封信上署名的有：科學博士、皇家工程師學會會員狄沃斯，皇家學會會員、勃貝克學院物理學教授，英國和平委員會會員貝爾納，皇家科學學會會員葛瑞格里教授，皇家學會會員最近訪蘇的公證會代表團團員朗斯達爾教授，皇家學會會員鮑威爾教授，羅森非德教授和伍德—瓊斯教授等人。（新華社稿 9月4日）