科學講座

蘇聯數學家對數學上著名問題的貢獻

華羅庚

數學是一門深入困難、淺出更不易的學問，所以它不適宜於作通俗演講的材料。因爲它的積累性，表面上的已被發掘了不少，而現代數學很多是深入的部分。因爲它有廣泛應用，它所佔的領域也十分廣大。所以無論就縱深說也好，廣泛說也好，數學是一門極不適宜作簡單介紹的科學。換一句話說，在數小時內，如要了解數學的輪廓是不可能的！如果一定要如此做，那就祇有騙人——把一鱗一爪來騙大家說這就是全體！

所以我今天不能介紹數學底全貌，而僅僅乎來談談若干最高標誌。好比，我今天不談整個的喜馬拉雅山系，而僅僅乎談談它的高峯，如額菲爾士峯等。數學中的高峯是什麼？是若干年來數學家不斷努力、不斷解決的難題。這種難題的研究成積，有如道路上的計程碑。由計程碑可以看出道路底遠近。可是請注意，計程碑不是道路底本身。所以希望聽衆們，不要誤會了研究數學就是解難題。

在過去的三十年中，蘇聯在世界數壇上以最新的姿態出現。由於社會主義國家對數學的提倡，新環境適宜科學底繁榮滋長，數學在蘇聯就突飛猛進地發展着，不斷地解決着世界上公認的困難問題。使世界其他國家，難以望其項背，這光榮的一頁，値得我們向它學習。因爲數學是科學之母，它的發展可以刺激其他科學底發展。換言之，它是有帶頭作用的科學。國民黨政府遲遲地成立數學研究機構，是不了解科學底本質的！

1900年，Hilbert 在巴黎的數學會舉出了二十三個有名難題。在那次演講中曾經提到若干個太難而不能期望不久可以解決的難題，如'古特拔黑問題'不在其列。換言之，他把這問題算入太難問題之列。現在讓我們先來解釋一下，何謂'古特拔黑問題'？在說明這問題之前，先讓我解釋一下何謂素數：

凡僅有兩個整數可除盡的整數謂之素數，例如：

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,
41,43,……

在1742年，古特拔黑猜測偶數大於2的一定是二素數之和，奇數大於5的一定是三個素數之和，現在讓我們做些實驗：

$$4=2+2\quad 6=3+3\quad 8=3+5$$
$$10=5+5\quad 12=5+7\quad 14=7+7$$
$$16=11+5\quad 18=11+7\quad 20=13+7$$
$$22=11+11\quad \text{等等}$$

我們現在先說明：古特拔黑的第二句話可由第一句得來；因爲如果我們已經知道前一句，則對任一奇數 n，$n-3$ 一定是二素數之和．命之爲 P_1+P_2 則 $n=3+P_1+P_2$ 是三個素數的和。

古特拔黑所說的也可以引伸做：凡正整數必爲不超過三素數的和！這問題懸掛了一百七十年。在1912年，德國數學家藍陶(Landau)氏退而求其次說：古特拔黑問題太難了，實在連證明下列的結果也非易事：

'有一整數 c 存在，任一正整數，是不超過 c 個素數的和。'

到了1930年，蘇聯的特出數學家希尼萊爾曼(Schuirelmann)引入了密率的觀念，把藍陶的推測解決了。

何謂密率？希氏說：一列A正整數(無重複)其中不大於x的個數以A(x)表之。若對所有的正整數

，恒有

$$\frac{A(n)}{n} \geqq \alpha > 0$$

且無比 α 更大之數有此性質則謂之 A 列有正密率 α。然後他導入和列的觀念：若有二列A及B，則形如

$$a+b \quad (a屬於A, b屬於B)$$

之正整數所成之列謂之A，B二列之和列。希氏證明如A列及B列之正密率名爲 α 及 β，則其和列之密率爲 $\alpha+\beta-\alpha\beta$。希氏再證明二素數之和之形式之整數列有正密率。由此二理希氏證明了藍陶猜測。

希氏的供獻，震驚了當時的數壇。但事隔不久，到 1937 年，蘇聯的數學英雄維諾格拉得夫(Vinogradav)氏證明了'凡相當大的奇數必爲三個素數的和。'

'相當大'，到底多麼大，波羅慈特金曾經算出要大到

$$e^{e^{e^{41.96}}}$$

才行，所以維氏偉大的貢獻，還不能算成最後一步，但這貢獻，可算是二十世紀驚人貢獻之一。

講到素數，就不會不聯想到蘇聯過去的一位數學大家契比雪夫(Tchebyshev)。他曾經證明了如下的定理，而這定理是素數分佈論的奠基石：

命 $\pi(x)$ 表不大於x的素數之個數，則有二正常數 c_1 及 c_2 存在使

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}.$$

後來法國數學家哈達瑪(Hadamard)氏及布賽(de la Valleé Poussin)證明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

或換作 $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dt}{\log t}} = 1$$

關於 $$\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

的無窮大之階，最好的結果也是屬於維氏及其弟子朱達可夫(Tchudakoff)氏的。

凡有理係數的代數方程式的根，名爲代數數。非代數數之數名爲超越數(Transcendental number)。在1873年，法國的數學家愛爾彌(Hermite)證明自然對數的底e是超越數。德國數學家林德曼(Lindemann)，在1882年，證明圓周率 π 是超越數，在1900年，希爾白脫(Hilbert)的數學問題集中，曾把下面的問題列爲第七，那問題是：'若 α 及 β 都是代數數，而 α 非0非1，β 非有理數，則 α^β 是超越數否？' 最簡單的例是：$2^{\sqrt{2}}$ 是否是超越數？$i^i = e^{\frac{1}{2}\pi}$ 是否是超越數？

這難題成爲超越數論中的一個中心款項。一直到1934年，才由蘇聯的特出數學家蓋爾方(Gelfond)氏予以解決；他證明了：若 α，β 都是代數數，而 α 非0非1，β 非有理數，則 α^β 一定是超越數。

他還證明了，很多更複雜的結果，這裏爲篇幅所限不一一列舉。

再說蘇聯的另一個特出的數學家契波他列夫(Tchebotaraf)氏，在1934年，他輕而易舉地證明了一個結果。在1937年，歐美數學家得出若干結果比他相差太遠；然後他們才發現他這一了不起的貢獻。問題是叫做'明枯斯基(Minkouski)問題'：

在1904年左右，明枯斯基提出了如下的推測：

命 $$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

是n個有實係數的一次齊次式，其行列式 $|\alpha_{ij}|$ 以△表示之；命 $\rho_1 \cdots\cdots \rho_n$ 爲n個實數，必有一組整數 $x_1 \cdots\cdots x_n$ 使

$$|(\xi_1-\rho_1)(\xi_2-\rho_2)\cdots\cdots(\xi_n-\rho_n)| \leqq 2^{-n}|\triangle|$$

明氏自己僅證明了 $n=2$ 的情形。列馬克(Remak)證明了 $n=3$ 的情形。但證明佔有六十一頁。而契氏在1934年一頁的文章證明了，必有一組整數 $x_1 \cdots\cdots x_n$ 使

$$|(\xi_1-\rho_1)\cdots\cdots(\xi_n-\rho_n)| \leqq 2^{-\frac{1}{2}n}|\triangle|$$

與明氏推測很爲接近。

至於證實明氏推測，還有待數學家的堅持和努力。

契氏對代數數論也有基本上極端重要的貢獻：他所引入素理想數的密率的觀念，開了類域(Class-field)研究的一個新局面，因之而能解決了類域的基本問題。要敘述這問題是異常困難的，不得不從略了。

現在讓我來介紹另一位蘇聯大數學家彭垂耶金(Pontriagin)。他是一位失明的人，他不能看。如果不是生在社會主義的蘇聯，恐怕早已遭受了淘汰。因爲在蘇聯任何人都能充分地發展，這位瞎先生成了世界第一流的數學家。他主要的貢獻是短時間內說不盡的。我們現在檢一個來談談。

這也是希爾白脫問題之一，這是第五問題：

如一個連續羣之單位元素導有一隣區與n度歐幾里得空間拓撲等值，則名爲可用襄變數表出的羣。猜測：凡可用有限個襄變數表出的羣必爲李羣。

何謂連續羣?何謂李羣?抱歉得很，我不能在短短時間內解釋得淸楚。無已，現在祇能做一個近似的說明：

命 $x_i'=f_i(x_1\cdots\cdots x_n;a_1\cdots\cdots a_n)$，

$$i=1,\cdots\cdots n,$$

是一個n度空間的變換；此處 $a_1,\cdots\cdots a_n$ 是實變數。如果連續實施兩個如上形式的變換，而仍爲如上之形式，則名爲一變換羣。最簡單的例是：

$$x'=x+a \quad (a\text{是實數})$$

更淸楚些；如由

$$x_i'=f_i(x_1,\cdots\cdots x_n;a_1\cdots\cdots a_n)$$
$$i=1,\cdots\cdots n;$$
$$x_i''=f_i(x_1'\cdots\cdots x'_n;b_1,\cdots\cdots b_n)$$
$$i=1,\cdots\cdots n;$$

而得

$$x_i''=f_i(x_1,\cdots\cdots x_n;c_1,\cdots\cdots c_n)$$

則此種變換謂之成一羣。c_i 當然是a及b的函數 $c_i=\Phi_i(a_1\cdots\cdots a_n;b_1\cdots\cdots b_n)$。如果c是a,b的連續函數，則這羣叫連續羣。如c是a,b的有則函數，這羣叫做李羣。問題是，是否任一連續羣可以經改換坐標的手續而變形一個李羣?

這是連續羣的一個基本問題。這是一個等待數學家努力解決的問題！龐氏所解決的是：如果假定得多一些，該羣是可交換的，則該猜測眞實。所謂可交換云者就是

$$\psi_i(a_1,\cdots\cdots a_n;b_1,\cdots\cdots b_n)$$
$$=\psi_i(b_1,\cdots\cdots b_n;a_1,\cdots\cdots a_n)$$

龐氏並且順帶地解決了柯爾模哥洛夫(Kolmogoroff)問題：他證明了，凡可導入連續觀念的域(當然還有些其他條件)僅有三種：實數域、複虛數域及四元數域。順帶提一下，柯氏是蘇聯國家科學院會員，爲近代幾率論的開山祖之一。

在1944年，蘇聯數學家馬哲夫(Malcev)更進一步，把龐氏的結果推展到可解羣。提到馬哲夫就想到他一有趣的結果。普通的有理數是由整數得來：換一句術語，由一整數所成的無零因子的環，然後造出一域。問題是：是否由任一無零因子的環，都可以如此地造出一域。這原來是一個懸而未決的問題。在1937年，馬哲夫找到了一個例說明這是不可能的!

講到連續羣我們不能忘掉阿獨(Ado)對於羣之表示的工作。他證明了任一有限度的連續羣一定有一一次變形羣和他一一對應。這也是一久懸未決的問題。

現在讓我再介紹一位蘇聯科學院的會員——特出的數學家——貝恩斯坦(Bernstein)氏。他對函數論等方面有獨特的貢獻，姑且不提。現在讓我來把他在偏微分方程式上所解決的一個著名問題介紹一番。

凡適合偏微分方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

的函數，乃數學中有名的位函數。這函數在幾何，在力學，在數學物理方面都極重要。它的特出的性質是這種函數，是所謂分析函數。貝恩斯坦證明了如次的定理：

命 $F(r,s,t;p,q,z;x,y)$

爲一分析函數，且

$$4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2>0$$

若微分方程式

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y};z,x,y\right)=0$$

有一解z具三級連續偏微分，則z必爲一解析函數。這解決了希氏第十九題。

在平面上我們誰都知道二點之間以直線爲最短。在球面上二點之間最短的曲線可由次法得之。經此二點作一大圓，二點之間大圓有二個弧，其較短的就是二點間最短的距離。所以在球面上大圓與平面上的直線有同樣作用。數學家替它起一個名稱，叫它做短程線(Geodesics)。球上的短程線是封閉的。現在進一步發問：在橢球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

有多少條封閉短程線？

若a, b, c 各不相等，則僅有三條；

若a, b, c有二者相等，而另一不等，則有一條，及有一個褒變數的一系列。

若 a=b=c，則有兩個褒變數的一系列。

布恩加賚(Poincaré)曾經發問：一個封閉曲面與球面有拓撲對應者，其上有多少封閉曲線？他猜測祇三種情況如上所列舉者。這問題爲蘇聯數學家希尼萊爾曼（Schurielmann）及露斯太爾尼克（Lusternik）所解決。講到這兒聯帶想到他們的合作的另一問題。該問題可以淸淺的叙述出來：

如分圓爲兩部分，必有一部分包有二點與圓心同在一直線上；

分球爲三部，必有一部包有二點與球心同在一直線上；

分n度空間之超球爲 n 部，必有一部包有二點與球心同在一直線上。

短短的二小時過去了！深愧沒有能够把蘇聯數學進步的全貌說出。問題也提得不詳盡，希望諸位多多指敎。

附記：以上是科學院主辦的科學演講的講稿。由於個人知識的有限，及聽衆客觀的標準，並未能把蘇聯數學家對著名問題的貢獻搜羅詳盡。同時現在時間也不允許我作詳盡的補充。無已，暫時發表如上，以後有機會時再作補充，並希望海內嚐人，提供補充及指正。

（編者按：此文係華羅庚教授，五月六日在中法大學大禮堂的第一次科學講座演講辭。這個講座是中國科學院所主持的，每週舉行一次或兩次。）

蘇聯新遺傳學的參攷文獻零星短文（續第一期二十九頁）

19. 生物科學中的論戰		山西新教育 1 卷 2 期
20. 米邱林學說的原理和方法	譚其猛譯	復旦農學院通訊 2 期
21. 談談生物的遺傳和進化的學說	羅可禮	自然科學通訊 1 期（湖南）
22. 李森科院士	天方	科學時代 4 卷 2 期
23. 米邱林和限度學說	之洋	科學時代 4 卷 3 期
24. 新遺傳講話	榮天宇	科學大衆 7 卷 1、2 期
25. 米邱林李森科學說學習提綱	林赫	科學大衆 7 卷 2 期
26. 米邱林學說與摩爾根學說	座談會記錄	科學32卷 3 期
27. 習得性是否可以遺傳	范福仁	大衆農業 3 卷 2 期
28. 植物如何才能馴化	米邱林	華北農業科學研究所 蘇聯農業科學參考第 3 集
29. 變異和基因的問題	努日金	同 上
30. 土壤科學的生物學	布辛斯基	同 上
31. 關於米邱林李森科的學說	何康	華東區第一次農業展覽會彙刊
32. 米邱林李森科和蘇聯唯物生物學	陳英	華東區第一次農業展覽會彙刊
33. 米邱林學說武裝了動物飼養家	葛謙	農訊第三十一期
34. 努日金博士演講集初譯		農業大學
35. 米邱林生物學的哲學基礎	盧德華譯	新中華十三卷十一期

前北京研究院上海結晶學研究室最近動態

前北京研究院結晶學研究室，自上海解放後，爲配合建設的實際需要，除結晶學的研究工作外，就從事氧化銅整流器的製造、改良和理論的研究。在該室全體員工的高度合作下，得到了極大的發展。到現在爲止，他們所試製氧化銅整流器的品質，經過多次改進，已經超出了有廿多年研究改良歷史的英美製品的水準。目前，該室因配合本院調整計劃，爲了將來更容易工作起見，不得不將一切研究工作暫時停頓一下。現在正展開加緊拆卸儀器和裝箱的熱潮，所以大規模製造的設計和理論的研究，將待遷至北京後繼續進行。（陸學善）