规范场的向量丛理论

郭 汉 英

（中国科学院高能物理研究所）

1. 规范场与纤维丛的内在联系，已有许多作者论及[1]．不过，一般只强调规范场与主丛的关系，然而，这是不够的．

例如，在通常的破缺规范理论中，Higgs 场属于规范群 G 作用的某一向量空间（例如同位旋空间等等）．显然，应该考虑物理时空 M 上每一点 x 所对应的向量空间 V_x 的总合 $E=\bigcup\limits_{x\in M}V_x$．根据纤维丛理论[2]，这是以 M 为底，V 为纤维，G 为结构群的向量丛 $E(M, V, G, P)$，它与主丛 $P(M, G)$ 相伴，而 Higgs 场就是 E 的截面 $\varphi: M\to E$．

本文概述规范场向量丛理论的要点，并以破缺 SO_n 规范场为例，给出其 Riemann 向量丛的结构，对 $n=3$ 的情形，自动导出 $'t$ Hooft 电磁场的定义[3]．

2. 首先给出向量丛及其联络的要点[2]．

设 F 是实数域 R 或复数域 C．F^n 是 n 维 F 值向量空间．M 是 m 维微分流形．

向量丛 $E(M, F^n, G, P)$ 是 M 为底，F^n 为纤维的伴丛，结构群 G 通过它在一般线性群 $GL(n, F)$ 中的表示 ρ 作用于 F^n，相应的主丛为 $P(M, G)$．视 F 为实（或复），E 为**实**（或**复**）向量丛．

令 X 与 Y 是 M 上的向量场，φ 与 χ 是 E 中的截面，λ 是 M 上 F 值函数，向量丛 E 中截面 φ 沿 X 的协变导数 $\nabla_X\varphi$ 满足下列条件

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_{X+Y}\varphi=\nabla_X\varphi+\nabla_Y\varphi,\\&\nabla_X(\varphi+\chi)=\nabla_X\varphi+\nabla_X\chi,\\&\nabla_{\lambda X}\varphi=\lambda\nabla_X\varphi,\\&\nabla_X(\lambda\varphi)=(X\lambda)\varphi+\lambda\nabla_X\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

在 M 与 F^n 中分别引入基底 $\left\{\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ $(j=1-m)$ 与 $\{\varepsilon_\alpha\}$ $(\alpha=1-n)$，x^j 是点 $x\in M$ 的局部坐标．可定义

$$\nabla_{\partial_j}\varepsilon_\alpha\equiv\omega_\alpha^\beta(\partial_j)\varepsilon_\beta,\tag{2.2}$$

ω_β^α 是主丛中的联络，

$$\omega_\beta^\alpha=\omega_{\beta j}^\alpha dx^j\in G\text{ 的李代数 }\mathfrak{g}.\tag{2.3}$$

特别，若将截面 φ 按 $\{\varepsilon_\alpha\}$ 展开 $\varphi=\varphi^\alpha\varepsilon_\alpha$，则有

$$\begin{aligned}&\nabla_{\partial_j}\varphi\equiv(D_j\varphi^\alpha)\varepsilon_\alpha,\\&D_j\varphi^\alpha=\partial_j\varphi^\alpha+\omega_{\beta j}^\alpha\varphi^\beta\equiv\varphi_{;j}^\alpha.\end{aligned}\tag{2.4}$$

可以证明，E 上的曲率可以表为

$$\begin{aligned}&\Omega_\beta^\alpha=d\omega_\beta^\alpha+\omega_{\gamma}^\alpha\wedge\omega_\beta^\gamma=\frac{1}{2}F_{\beta jk}^\alpha dx^j\wedge dx^k\in\mathfrak{g},\\&F_{\beta jk}^\alpha=\partial_j\omega_{\beta k}^\alpha-\partial_k\omega_{\beta j}^\alpha+\omega_{\gamma j}^\alpha\omega_{\beta k}^\gamma-\omega_{\gamma k}^\alpha\omega_{\beta j}^\gamma,\end{aligned}\tag{2.5}$$

并满足 Bianchi 恒等式

$$\begin{aligned}&d\Omega_\beta^\alpha=\Omega_\gamma^\alpha\wedge\omega_\beta^\gamma-\omega_\gamma^\alpha\wedge\Omega_\beta^\gamma,\\&F_{\beta jk;l}^\alpha+F_{\beta lj;k}^\alpha+F_{\beta kl;j}^\alpha=0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

若基 $\{\varepsilon_\alpha\}$ 在群 G 的作用下

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\alpha\to\tilde\varepsilon_\alpha=S_\alpha^{-1\beta}\varepsilon_\beta,\\&S^{-1}=(S_\alpha^{-1\beta})_{\alpha\beta=1-n}\in G,\end{aligned}\tag{2.7}$$

则 ω_β^α、Ω_β^α 之变换性质为

$$\left.\begin{aligned}&\omega_\beta^\alpha\to\tilde\omega_\beta^\alpha=(S^{-1}\omega S-S^{-1}dS)_\beta^\alpha,\\&\omega=(\omega_\beta^\alpha)_{\alpha\beta=1-n}\in\mathfrak{g},\\&\Omega_\beta^\alpha\to\tilde\Omega_\beta^\alpha=(S^{-1}\Omega S)_\beta^\alpha,\\&\Omega=(\Omega_\beta^\alpha)_{\alpha\beta=1-n}\in\mathfrak{g}.\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

在向量丛中可定义纤维度规．向量丛 E 中的**纤维度规** g，是在纤维 $\pi_E^{-1}(x)\simeq F^n$ 中，$x\in M$，由截面定义的内积 $g_x(\varphi(x),\chi(x))$．对于复向量丛，g_x 是厄米的．可以证明

本文 1977 年 6 月 9 日收到．

定理 若M仿紧，则M上每一向量丛E允许一纤维度规g.

给定纤维度规g的实向量丛E（或复向量丛），称为 Riemann 向量丛 E_g（或 Hermite 向量丛）.

根据丛的约化理论，E上纤维度规g与主丛 $P(M, GL(n, F))$ 约化为子丛 $Q(M, O(n, F))$ 一一对应. 若E可定向,则约化为 $Q(M, SO(n, F))$.

若在由主丛 $P(M, G)$ 的联络定义的E中纤维的平行移动下,保持纤维度规g不变,则P中的联络称为度规联络. 有

定理 若g是E中的纤维度规,$Q(M, H)$是$P(M, G)$由g定义的约化子丛，则P中联络ω可约化为Q中联络ω'之充要条件为ω是度规联络.

显然,与可定向 Riemann 向量丛 E_g 相伴的主丛$P(M, GL(n, F))$中的联络是度规联络，且定可约化为$Q(M, SO(n, F))$中的联络.

我们知道，物理上所考虑的对称群G所作用的向量空间,一般是可以定义内积的,同时,物理时空M也满足仿紧的要求,因此，当群G作为规范群时，相应的规范理论由具有纤维度规的向量丛描述.

当具有 Higgs 场的情形，纤维需进一步赋予结构. 下面将以具体的模型说明这一问题.

3. 考查具有 Higgs 场的 SO_n 规范场，剩余对称性为 SO_{n-1} 的模型，给出 Riemann 向量丛结构.

将规范群SO_n的作用空间记为R^n,考虑以物理时空M为底，R^n 为纤维的可定向 Riemann 向量丛 E_g^{4+n}. 在纤维 $R_x^n(x\in M)$ 中引入基底 $\{\varepsilon_\alpha\}(\alpha=1-n)$. Higgs 场 $\varphi(x)$: $M\to E_g^{4+n}$, 作为该向量丛的截面，可以表为 $\varphi(x)=\varphi^\alpha(x)\varepsilon_\alpha$. 其内积定义了纤维度规

$$g(\varphi(x),\chi(x))=g(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)\varphi^\alpha(x)\chi^\beta(x)=\delta_{\alpha\beta}\varphi^\alpha(x)\chi^\beta(x),\quad(3.1)$$

这里用到

$$g(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)\equiv\langle\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta},\quad(3.2)$$

显然，Higgs 场的模的平方为

$$|\varphi(x)|^2=g(\varphi(x),\varphi(x))=\delta_{\alpha\beta}\varphi^\alpha(x)\varphi^\beta(x).\quad(3.3)$$

在破缺规范理论中，Higgs 场的方向决定了剩余对称性的方向. 为此,将纤维 R_x^n 按 Higgs 场的方向分解为 $R_x^n=T_x^{n-1}\times N_x^1$, N_x^1 是 Higgs 场在此点的方向, T_x^{n-1} 是其补空间，称此时的基为 Higgs 基 $\{\mathring{\varepsilon}_\alpha\}$,显然,它应表为

$$\{\mathring{\varepsilon}_\alpha\}=\{e_a,n\}\quad(a=1-n-1),\quad(3.4)$$

$\{e_a\}$ 与 n 分别是 T_x^{n-1} 与 N_x^1 的基. 同时,由(3.2)

$$g(e_a,e_b)=\delta_{ab},\quad g(e_a,n)=0,\quad g(n,n)=1\quad(3.5)$$

而按定义，Higgs 场应表为

$$\varphi=\mathring{\varphi}^\alpha\mathring{\varepsilon}_\alpha=|\varphi|n,\quad(\mathring{\varphi}^\alpha)=(\underbrace{0,\cdots 0}_{n-1\text{个}},|\varphi|).\quad(3.6)$$

不难看出，剩余对称性 SO_{n-1} 映 T_x^{n-1} 为自身,且保持分解 $R_x^n=T_x^{n-1}\times N_x^1$ 不变.

定义纤维基底 $\{\varepsilon_\alpha\}$ 沿M上某方向 ∂_i 的协变导数

$$\nabla_{\partial_j}\varepsilon_\alpha=\omega_\alpha^\beta(\partial_j)\varepsilon_\beta,\quad(3.7)$$

ω_β^α 是保度规联络，且在李代数 $so(n, R)$ 上.

对于 Higgs 基 (3.4),上式分解为

$$\nabla_{\partial_j}e_a=\theta_a^c(\partial_j)e_c-b_a n,\quad \nabla_{\partial_j}n=b^a e_a,\quad(3.8)$$

其中 θ_a^c、b^a、b_a 是 M 上 1 次微分式

$$\theta_a^c\equiv\omega_a^c,\quad b_a\equiv-\omega_a^n,\quad b^a\equiv\omega_n^a=\delta^{ac}b_c,\quad(3.9)$$

当绕 Higgs 方向作 SO_{n-1} 旋转时

$$e_a\to\tilde{e}_a=S_a^{-1b}e_b,\quad S^{-1}=(S_a^{-1b})_{ab=1-n-1}\in SO_{n-1}.\quad(3.10)$$

(3.8) 式保持不变. 且

$$\left.\begin{aligned}&\theta_b^a\to\tilde{\theta}_b^a=(S^{-1}\theta S-S^{-1}dS)_b^a,\\&\theta=(\theta_b^a)_{ab=1-n-1}\in so(n-1,R),\\&b^a\to\tilde{b}^a=S_c^a b^c.\end{aligned}\right\}\quad(3.11)$$

显然，θ_b^a 就是剩余对称性 SO_{n-1} 的联络.

值得注意，(3.8)二式分别相应于 Riemann 流形曲面论的 Gauss 公式与 Weingarten 公式. 事实上，T_x^{n-1} 之并集

$$T_g^{4+n-1} = \bigcup_{x \in M} T_x^{n-1}$$

也是一 Riemann 向量丛，且 $T_g^{4+n-1} \subset E_g^{4+n}$. 因此，$T_g^{4+n-1}$ 相当于 E_g^{4+n} 中的超曲面，b_a 与第二基本形式对应[4].

对于 Higgs 基，SO_n 向量丛 E_g^{4+n} 的联络显然可以表为

$$\mathring{\omega} = (\mathring{\omega}_\gamma^\alpha)_{\alpha\gamma=1-n} = \begin{pmatrix} \theta_c^a & b^a \\ -b_c & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

与此相应，E_g^{4+n} 的曲率可表为

$$\mathring{\Omega} = d\mathring{\omega} + \mathring{\omega}_\Lambda \mathring{\omega} = (\mathring{\Omega}_\gamma^\alpha)_{\alpha,\gamma=1-n} = \begin{pmatrix} \Theta_c^a - B_c^a & \Theta^a \\ -\Theta_b & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

其中 Θ_c^a 是 SO_{n-1} 向量丛 T_g^{4+n-1} 的曲率，且

$$\Theta_c^a = d\theta_c^a + \theta_{b\Lambda}^a \theta_c^b, \quad B_c^a = b_\Lambda^a b_c,$$

$$\Theta^a = db^a + \theta_{c\Lambda}^a b^c. \quad (3.14)$$

(3.12) 与 (3.13) 表明，对于 Higgs 基，E_g^{4+n} 的联络与曲率已明显地且有分解为包含 T_g^{4+n-1} 的联络与曲率的形式，而此分解是由 Higgs 方向决定的.

4. 讨论 $n = 3$ 的情形. 考虑如何通过特定的规范变换，将给定时空点 x 处的（同位旋)空间 R_x^3 的第 3 方向化为该点的 Higgs 方向；并将 SO_2 规范场用 SO_3 规范场与 Higgs 场表示出来.

考查 R_x^3 中的单位球 $S_x^2 \subset R_x^3$

$$\begin{aligned} &\delta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 1, \quad n = n^\alpha \varepsilon_\alpha, \\ &n^\alpha = \varphi^\alpha / |\varphi^\alpha| \quad (\alpha = 1-3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

用两个坐标邻域 U_1 与 U_2 覆盖它

$$\begin{aligned} &U_1:\ S_x^2 - (0, 0, -1), \\ &U_2:\ S_x^2 - (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

对于 U_1 与 U_2 中的点 $n(n^1, n^2, n^3)$ 分别取[5]

$$O_1(n) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{n_1^2}{1+n_3} & -\dfrac{n_1 n_2}{1+n_3} & n_1 \\ -\dfrac{n_1 n_2}{1+n_3} & 1 - \dfrac{n_2^2}{1+n_3} & n_2 \\ -n_1 & -n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad \forall n \in U_1,$$

$$O_2(n) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{n_1^2}{1-n_3} & -\dfrac{n_1 n_2}{1-n_3} & n_1 \\ -\dfrac{n_1 n_2}{1-n_3} & -1 + \dfrac{n_2^2}{1-n_3} & n_2 \\ n_1 & -n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad \forall n \in U_2. \quad (4.3)$$

不难验证，它们分别在 U_1 与 U_2 中将规范协变基 $\{\varepsilon_\alpha\}$ 之第 3 轴变到 n 方向，即 Higgs 方向. 且当 $n \in U_1 \cap U_2$ 时，除只差一个绕 n 轴的 SO_2 转动外，它们属于同一 SO_3 转动.

按照规范势的变换性质将 ω 变为 $\mathring{\omega}$，就可得到 Higgs 基下联络的分解形式. 例如当 $n \in U_1$ 时

$$\omega \xrightarrow{O_1} \mathring{\omega} = O_1^{-1} \omega O_1 - O_1^{-1} dO_1,$$

$$\begin{aligned} \theta = (\theta_b^a)_{ab=1,2} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \omega^{\beta\gamma} \\ &\quad - (1+n_3)^{-1} \epsilon_{cd} n^c dn^d, \quad (4.4) \\ b^a &= Dn^a - (1+n_3)^{-1} n^a Dn_3, \end{aligned}$$

其中 $Dn^\alpha = dn^\alpha + \omega_\beta^\alpha n^\beta$. 对于 $n \in U_2$ 有类似的公式.

由 SO_2 联络 θ，可直接求出 SO_2 曲率

$$\begin{aligned} \Theta = d\theta &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(d(n^\alpha \omega^{\beta\gamma}) - n^\alpha dn_\Lambda^\beta dn^\gamma) \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(n^\alpha \Omega^{\beta\gamma} - n^\alpha Dn_\Lambda^\beta Dn^\gamma). \end{aligned} \quad (4.5)$$

这就是 't Hoof t 电磁场定义[3]的外微分形式. 这里，由 SO_3 Riemann 向量丛的角度导出了此式. 另外，在上述破缺 SO_3 规范场模型中，b^a 场相应于带电矢量介子，因此，这里也给出了带电矢量介子场的几何表述.

由 (4.4) 可看出，SO_3 规范势完全约化为电磁势的充要条件是没有带电矢量介子场，

即 $$Dn^a = 0. \qquad (4.6)$$

对于 SO_n 规范场与破缺后的场量之间的关系,可以用类似的方式处理.

5. 最后,指出以下几点:

(1) 规范场的向量丛理论并不限于讨论内部对称群 $G_{内}$ 的规范场，同样可以描述以时空对称群 $G_{时空}$ 为规范群的重力场，以及以 $G_{时空} \times G_{内}$（或 $\subset G$）为规范群的重力作用与其它作用的统一理论. 如果我们取 $G_{时空} = SO(3, 2)$，并将纤维 $R^{3,2}_x$ 之度规定义为时空流形 M 之 Riemann 度规，那么在第 3 节中的 SO_n 向量丛便可给出局部 de Sitter 不变的几何表述[6],从而可建立局部 de Sitter 不变的重力规范理论[7]. 如果将纤维取为 $R^{3,2}_x \times R^{内}_x$，其中 $R^{内}_x$ 是 $G_{内}$ 之作用空间,则自然可以得到重力与内部作用的统一理论.

近来，陆续有人从在主丛上引进度规的角度来处理重力场与杨-Mills 场的统一理论[8].但没有引进物质场与 Higgs 场;同时,对重力场的处理一般都回到广义相对论，而后者从规范理论看来并不自然.我们将指出,规范场的向量丛理论完全可以解决这些问题.

(2) 可以考虑将向量丛 E_g 整个作为 Rieman 流形，引进丛度规，并以这种方式来讨论上述问题.显然,与资料[8]相比较,这样作的优点在于可给出 Higgs 场的几何表述.

(3) 本文对 Higgs 场的描述具有一定的普遍意义.一般说来,对于具 Higgs 场的群 G 的规范场，破缺后剩余对称群为 H 的情形都可采用.而且，Higgs 场不一定属于 G 的伴随表示. 对于 G 的任意表示为纤维的向量丛，其截面同样可以起 Higgs 场的作用. 这种广义 Higgs 场的物理内容值得进一步探讨.

(4) 本文关于 SO_3 规范场的结果，与我们从纤维丛约化理论得到的一致[9]. 但这里的图象较直观,且具有更为广泛的意义.

(5) 本文没有涉及有关拓扑性质的问题. 应该指出，从向量丛理论的角度讨论有关拓扑问题也是大有好处的[10].

参 考 资 料

[1] 例如，陆启铿，物理学报，**23** (1974) 4, 249; Wu, T. T. & Yang, C. N., *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.

[2] Kobayaski, S & Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, **I** (1963), **II** (1969); Spivak, M., *Differential Geometry*, **II** (1970).

[3] 't Hoof t, G., *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276.

[4] 这种对应最初是由段一士等指出的. 见 段一士、侯伯宇、葛墨林,规范场的分解约化及可 Abel 化场对偶荷解 (1977 年 3 月在高能物理会议上报告).

[5] Steenorod, N., *The Topology of Fibre Bundles*, 1951, § 23.

[6] 郭汉英，科学通报，**21** (1976), 1, 31.

[7] 吴詠时、李根道、郭汉英,科学通报, **19** (1974), 11, 509; 安瑛、陈时、邹振隆、郭汉英，科学通报，**21** (1976), 8, 379.

[8] Cho, Y. M., *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 2029. Chang, L. N., Macrae, K. & Mansoui, F., *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 235.

[9] 吴詠时、陈时、杜东生、郭汉英，SU_2 与 SO_3 规范场中的磁单极(1977年 3 月在高能物理会议上报告).

[10] 例如, Husemoller, D., *Fibre Bundles*, 1966.

[上接 460 页]

雷藤酮 $C_{20}H_{22}O_6$(III). 熔点250—253℃. 紫外光谱 λ_{max}^{EtOH}218mμ(ε, 13,300). 红外光谱(KBr 压片): 1760、1680cm^{-1}(α、β-不饱和五元内酯),1721cm^{-1}($>C=0$). 核磁共振谱示有以下质子信号(见图 2): 0.89 (3H, 二重峰, $J_{15,16}=7H_z$, 16-CH_3), 0.98(3H, 二重峰, $J_{15,17}=7H_z$, 17-CH_3), 1.08 (3H, 单峰, 20-CH_3), 3.42(1H, 二重峰, $J_{6\alpha,7}=5H_z$, 7-H), 3.85、4.07 (二重峰, $J=3H_z$, 11, 12-H), 4.71 (2H, 复峰, 19-CH_2).

以上得到的雷藤素甲，药理试验 0.25 毫克/公斤，对小鼠 L_{615} 有很好的抗癌活性，生存时间延长率在 159% 以上，并使部份动物长期存活.

参 考 资 料

[1] 昆明医学院第一附属医院类风湿科研小组，中华医学杂志，1976, **6**, 384.

[2] Kupchan, S. M. *et al.*, *J. Amer. Chem. Soc.*, **20** (1972), 7194.