中国科学 E辑: 信息科学 2008年 第38卷 第4期: 481 ~ 503
www.scichina.com info.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

分数阶 Fourier 变换离散化的研究进展

陶然*, 张峰, 王越

北京理工大学电子工程系, 北京 100081
* E-mail: rantao@bit.edu.cn

收稿日期: 2007-08-06; 接受日期: 2007-11-15
国家杰出青年科学基金(批准号: 60625104)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 60232010)和国家自然科学基金(批准号: 60572094)资助

摘要 近年来, 分数阶 Fourier 变换在光学、信号处理等领域得到越来越广泛的应用, 离散化成为其得以应用的关键. 由于分数阶 Fourier 变换的离散算法不像离散 Fourier 变换那样可以简单地通过在时域和分数阶 Fourier 域直接离散化采样得到, 因此分数阶 Fourier 变换的离散算法成为近年来的研究重点. 根据分数阶 Fourier 变换离散化的发展历史, 对其重要研究进展和现状进行了系统归纳和简要评述, 包括: 分数阶 Fourier 域采样和重构; 离散时间分数阶 Fourier 变换和分数阶 Fourier 级数; 离散分数阶 Fourier 变换(包括目前 3 种主要类型: 线性加权型、采样型和特征分解型); 以及和分数阶 Fourier 变换紧密相关的其他离散分数阶酉变换; 并指出了应用背景和发展方向. 有助于读者全面了解分数阶 Fourier 变换离散计算, 进一步促进其工程应用.

关键词
分数阶 Fourier 变换
分数阶 Fourier 域采样定理
离散时间分数阶 Fourier 变换
分数阶 Fourier 级数
离散分数阶 Fourier 变换

近年来, 分数阶Fourier变换因其在光学、量子力学、模式识别、时频分析、信号处理等领域的广泛应用得到了越来越多的关注[1~8]. 分数阶Fourier变换可以看作是时频平面的旋转, 并且同其他时频分布具有密切的联系, 这为分数阶Fourier变换理解为一种统一的时频变换奠定了理论基础[9~14]. 分数阶Fourier变换是传统Fourier变换的推广, 其很多性质都可以看作是Fourier变换的一般化; 一些常见的性质, 比如分数阶Fourier域上的卷积和乘积定理、采样定理等都已经得到[15~28].

信号 $x(t)$ 的 a 阶连续分数阶Fourier变换线性积分形式定义为[1,2]

$$X_\alpha(u) = F^a[x(t)](u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(u,t)x(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中积分核为:

$$K_a(u,t)=\begin{cases}A_\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u^2+t^2}{2}\cot\alpha-\mathrm{j}ut\csc\alpha}, & \alpha\neq k\pi;\\ \delta(u-t), & \alpha=2k\pi;\\ \delta(u+t), & \alpha=(2k+1)\pi;\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\alpha=a\pi/2$ 被看作时频平面旋转的角度, $A_\alpha=\sqrt{(1-\mathrm{j}\cot\alpha)/2\pi}$, F^a 表示分数阶 Fourier 变换算子, 因此 a 阶分数阶 Fourier 变换有时也称为 α 角度分数阶 Fourier 变换.

为了在信号处理领域更好地应用分数阶Fourier变换, 就必须研究分数阶Fourier变换的离散化问题, 包括采样定理和离散化计算. 我们知道, 采样定理是联系连续时间信号和离散时间信号的桥梁. 在传统的基于Fourier变换的信号分析中, 采样定理为连续时间信号的离散化处理以及离散Fourier变换(DFT)的定义奠定了基础. 相应地, Xia[18]首先研究了分数阶Fourier域带限信号的性质. Xia证明了, 对于一个非零信号 $x(t)$, 如果其在某个分数阶Fourier域带限, 那么该信号不可能会在另一个分数阶Fourier域带限. 在此基础上, 研究人员从不同角度将传统的Fourier域采样定理推广到分数阶Fourier域. 基于分数阶Fourier变换的采样理论表明, 在满足分数阶Fourier域采样定理的条件下, 信号在某个分数阶Fourier域的表示, 可以从另一个分数阶Fourier域的采样完全重建.

传统Fourier域采样定理在给出离散采样信号频谱和连续时间信号频谱关系的同时, 也给出了离散时间Fourier变换(DTFT)的定义. 在传统的基于Fourier变换的分析中, 针对不同的信号类型, 定义了不同的Fourier变换形式. 自然地, 我们希望对不同类型的信号, 也定义不同的分数阶Fourier变换形式. 文献 [15]研究了对于哪些类型的信号可以定义相应的分数阶Fourier变换形式. 在此基础上, 研究人员定义了离散时间分数阶Fourier变换(DTFRFT)和分数阶Fourier级数(FRFS), 这为离散时间信号的分数阶Fourier域分析和处理, 以及离散分数阶Fourier变换(DFRFT)的定义奠定了基础.

在上述分数阶Fourier域采样定理和DTFRFT定义的基础上, 一种直接获得时域和分数阶Fourier域都离散的分数阶Fourier变换形式——DFRFT的方法是: 对分数阶Fourier域也进行直接采样. Ozaktas在 1996 年给出了一种基于采样的DFRFT快速计算方法 [25]. 其后Pei提出了另一种基于采样的DFRFT定义和快速计算方法, 通过对时域和分数阶Fourier域进行合适间隔的采样, 得到的DFRFT定义具有闭合形式, 且可以利用FFT进行快速计算, 缺点是不具有连续分数阶Fourier变换最独特的性质——旋转相加性. 与此同时, Pei也首先提出利用分数阶Fourier变换的特征分解去定义DFRFT的方法, 通过这种方法定义的DFRFT会满足旋转相加性. 从此, 从特征分解的角度定义DFRFT引起了研究人员的重视, 并应用于定义其他的分数阶变换.

本文对分数阶 Fourier 变换离散化算法的重要研究进展和现状进行了系统归纳和简要评述, 分为 4 个部分, 组织如下: 第 1 部分给出了基于分数阶 Fourier 变换的采样和重构; 第 2 部分给出了离散时间分数阶 Fourier 变换和分数阶 Fourier 级数的定义; 第 3 部分研究了离散分数阶 Fourier 变换, 包括目前 DFRFT 的 3 种主要型式, 1) 线性加权型 DFRFT, 2) 采样型 DFRFT, 3) 特征分解型 DFRFT, 并且对各种类型的 DFRFT 做了详尽的比较, 并指出其相应的应用背景; 第 4

部分介绍了通过特征分解方法定义的其他分数阶变换; 最后总结了全文, 并指出了未来的分数阶 Fourier 变换离散化的研究方向.

1　分数阶 Fourier 域采样定理

Xia首先研究了分数阶Fourier域带限信号的性质 [18]. 给出分数阶Fourier域带限信号的定义: 如果一个信号的分数阶Fourier变换具有有限支撑, 称该信号为分数阶Fourier域带限信号, 也就是如果信号 $x(t)$ 满足 $X_\alpha(u)=0$, 当 $|u|>U_\alpha$ 时, 称 $x(t)$ 为 α 角度分数阶Fourier域 U_α 带限信号(注意, 在本节中, 当同时需要表示多个不同角度分数阶Fourier域时, 使用不同的角度下标以区分不同的分数阶Fourier域). 根据这个定义, Xia证明了: 如果一个非 0 信号 $x(t)$ 在 α 角度分数阶Fourier域是带限的, 那么该信号不可能同时还在 β 角度分数阶Fourier域是带限的, 其中 $\beta\neq\pm\alpha+n\pi$, n 为任意整数 [18]. 这是传统Fourier域理论的广义形式: 一个非0信号不可能同时在时域和频域带限.

设 $x(t)$ 为 α 角度分数阶Fourier域 U_α 带限信号, 根据分数阶Fourier逆变换公式, 并考虑尺度因子 $\csc\alpha$, 可以得到分数阶Fourier域带限信号插值公式 [18]

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{t^2}{2}\cot\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x\left(m\frac{\pi\sin\alpha}{U_\alpha}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{m^2}{2}\left(\frac{\pi\sin\alpha}{U_\alpha}\right)^2\cot\alpha}\operatorname{sinc}\left[(U_\alpha\csc\alpha)\left(t-m\frac{\pi\sin\alpha}{U_\alpha}\right)\right]. \tag{3}$$

类似地, 可以得到时域带限信号 $x(t)=0$, 当 $|t|>T$ 时的插值公式

$$X_\alpha(u_\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u_\alpha^2}{2}\cot\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_\alpha\left(m\frac{\pi\sin\alpha}{T}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{m^2}{2}\left(\frac{\pi\sin\alpha}{T}\right)^2\cot\alpha}\operatorname{sinc}\left[T\csc\alpha\left(u_\alpha-m\frac{\pi\sin\alpha}{T}\right)\right]. \tag{4}$$

(3)和(4)式表示分数阶 Fourier 域带限和时域带限信号可以从时域采样和分数阶 Fourier 域采样完全重构.

因为时域和频域都可以看作 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\pi/2$ 角度的分数阶Fourier域, 因此上面两式可以写成统一的形式. 也就是说, 对于 α 角度分数阶Fourier域 U_α 带限信号, 可以用 β 角度分数阶Fourier域的采样重构该信号. 利用分数阶Fourier变换的旋转相加性, α 角度分数阶Fourier域 U_α 带限信号在 β 角度分数阶Fourier域的表示可以看作是 $(\alpha-\beta)$ 角度分数阶Fourier域 U_α 带限信号, 因此可以得到 [18]

$$\begin{aligned}X_\beta(u_\beta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{u_\beta^2}{2}\cot(\alpha-\beta)}&\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_\beta\left(m\frac{\pi\sin(\alpha-\beta)}{U_\alpha}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{m^2}{2}\left(\frac{\pi\sin(\alpha-\beta)}{U_\alpha}\right)^2\cot(\alpha-\beta)}\\&\times\operatorname{sinc}\left[(U_\alpha\csc(\alpha-\beta))\left(u_\beta-m\frac{\pi\sin(\alpha-\beta)}{U_\alpha}\right)\right].\end{aligned} \tag{5}$$

从上式可以看出, 当 $\beta=0$ 时, (5)式退化为(3)式; 当 $\alpha=0$ 时, (5)式退化为(4)式. 对(5)式两边做角度为 $(\gamma-\beta)$ 的分数阶 Fourier 变换, 可以得到更广义的重构公式:

$$X_{\gamma}(u_{\gamma})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_{\beta}\left(m\frac{\pi\sin(\alpha-\beta)}{U_{\alpha}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{m^2}{2}\left(\frac{\pi\sin(\alpha-\beta)}{U_{\alpha}}\right)^2\cot(\alpha-\beta)}$$
$$\times F^{(\gamma-\beta)}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{u_{\beta}^2}{2}\cot(\alpha-\beta)}\operatorname{sinc}\left[(U_{\alpha}\csc(\alpha-\beta))\left(u_{\beta}-m\frac{\pi\sin(\alpha-\beta)}{U_{\alpha}}\right)\right]\right\}. \tag{6}$$

上式表明, 对于一个 α 角度分数阶 Fourier 域带限信号, 其在 γ 角度分数阶 Fourier 域的表示可以通过 β 角度分数阶 Fourier 域的采样实现完全重构. 当 $\gamma=\beta$ 时, (6)式退化为(5)式.

Zayed把分数阶Fourier变换看作传统Fourier变换的一种变化形式, 也同样得到了基于分数阶Fourier变换的采样和插值理论 [6]. 类似地, Candan采用更直接的推导方法得到了基于分数阶Fourier变换和其他酉变换的采样和插值理论 [29]. 他们把分数阶Fourier变换表示成一种Fourier变换的变化形式, 通过定义中间函数 $v(t)=x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t^2/2)\cot\alpha}$, 得到前面所推导的广义插值公式.

对于分数阶Fourier域支撑区间 $\left[U_{\alpha}^0-U_{\alpha},U_{\alpha}^0+U_{\alpha}\right]$ 的带通信号, 也就是信号 $x(t)$ 的分数阶Fourier变换满足 $X_{\alpha}(u)=0$, 当 $\left|u-U_{\alpha}^0\right|>U_{\alpha}$ 时, (3)式将变成 [30]

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{t^2}{2}\cot\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x\left(m\frac{\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{m^2}{2}\left(\frac{\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)^2\cot\alpha}\operatorname{sinc}\left[(U_{\alpha}\csc\alpha)\left(t-m\frac{\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\right]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{U_{\alpha}^0}{\sin\alpha}\left(t-m\frac{\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)}. \tag{7}$$

同样地, (4)~(6)式也可以类似地扩展到分数阶 Fourier 域带通信号上.

上面所得到的基于分数阶Fourier变换的采样理论并没有对采样信号限制任何条件, 所以信号只能以满足Nyquist采样速率的采样进行重建. 我们知道如果信号是实的带限信号, 那么分别对原始信号和它的Hilbert变换以 1/2 Nyquist采样速率采样, 就可以用这些采样点来完全重构原始信号. 根据Fourier变换和分数阶Fourier变换的关系 [6], 可以推广到分数阶Fourier域. Zayed推导出了针对分数阶Fourier域带限实信号的插值公式 [30]:

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{x\left(m\frac{2\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\cos\left[\frac{U_{\alpha}\csc\alpha}{2}\left(t-m\frac{2\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\right]-\tilde{x}\left(m\frac{2\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\right.$$
$$\left.\times\sin\left[\frac{U_{\alpha}\csc\alpha}{2}\left(t-m\frac{2\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\right]\right\}\operatorname{sinc}\left[\frac{U_{\alpha}\csc\alpha}{2}\left(t-m\frac{2\pi\sin\alpha}{U_{\alpha}}\right)\right], \tag{8}$$

其中 $x(t)$ 为实信号, $\tilde{x}(t)$ 为信号 $x(t)$ 的 Hilbert 变换.

Sharma研究了分数阶Fourier域带限的周期信号特征: 分数阶Fourier域带限的周期信号可以唯一地由信号在时域的有限个采样点实现重构; 并且还给出了传统Fourier域带限周期信号和分数阶Fourier域带限周期信号的关系 [31]. Sharma还给出了当信号是 α 角度分数阶Fourier域带限信号时, 信号在时域的表示可以直接从 $(\alpha-\pi/2)$ 角度分数阶域获得 [32]. 这些结论都可以看作(6)式的特例.

上面讨论的插值公式是从分数阶Fourier变换和Fourier变换的关系导出的, 没有表示出离散

采样信号在分数阶Fourier域的特征. Torres和张卫强分别推导了分数阶Fourier域带限信号理想采样的分数阶Fourier谱的表达形式 [33,34]. 假设 $x(t)$ 为 α 角度分数阶Fourier域带限信号, 其支撑区为 $[-U_\alpha, U_\alpha]$. 根据分数阶Fourier变换和Fourier变换的关系 [6], 定义 $\tilde{X}_\alpha(u)$ 为 $x(t)$ 的分数阶Fourier变换 $X_\alpha(u)$ 带相移的周期复制, 也称为chirp-周期复制 [19]:

$$\tilde{X}_\alpha(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{u^2}{2}\cot\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_\alpha(u-nB)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(u-nB)^2}{2}\cot\alpha}, \tag{9}$$

其中 $B = 2U_\alpha$ 为分数阶 Fourier 域带宽. 根据分数阶 Fourier 变换的定义, 可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{X}_\alpha(u) &= F^\alpha\left[T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right] \\ &= T_s A_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n^2T_s^2}{2}\cot\alpha - \mathrm{j}unT_s\csc\alpha},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $T_s = \sin\alpha / B$ 为采样间隔.

上式表示了分数阶 Fourier 域带限信号理想采样的分数阶 Fourier 谱的形式, 同时也是传统 Fourier 域相应结论的广义形式. 从(10)式可以清楚地看出采样信号的分数阶 Fourier 谱的形式. 因此可以得到分数阶 Fourier 域采样定理.

设 $x(t)$ 为 α 角度分数阶 Fourier 域带限信号, 也就是 $X_\alpha(u_\alpha) = 0$, 当 $|u_\alpha| > U_\alpha$ 时, 如果时域采样间隔满足 $T_s \leqslant \sin\alpha / B$, 那么 $x(t)$ 可以完全由其采样 $x(mT_s)$ 唯一确定, 其中 $B = 2U_\alpha$.

因为当 $u \in [-B/2, B/2]$ 时, $\tilde{X}_\alpha(u) = X_\alpha(u)$, 所以(10)式从分数阶Fourier谱的关系角度提供了基于分数阶Fourier变换的插值公式 [33,34]. 另一方面(10)式也给出了一种DTFRFT的定义, 下一节会有详细介绍.

2 离散时间分数阶 Fourier 变换和分数阶 Fourier 级数

在传统的基于Fourier变换分析中, 针对信号在时域表示是否为连续和周期的, 存在 4 种不同形式的Fourier变换对: Fourier变换、Fourier级数(FS)、离散时间Fourier变换(DTFT)和离散Fourier变换(DFT). 自然地, 我们会问这样的问题: 对于分数阶Fourier变换, 是否也存在类似的 4 种形式. Cariolaro根据信号在时域和Fourier域上的表示是否是相同的, 对这个问题进行了解答 [15].

对于 4 种类型Fourier变换对, 信号类型分别为: 1) 连续时间非周期信号; 2) 连续时间周期信号; 3) 离散时间非周期信号; 4) 离散时间周期信号. 在每一种情况中, 均要考虑信号的表示是否为连续的, 是否为周期性. 考察以上 4 种类型的Fourier变换, 可以看出只有 1) 连续时间非周期信号和 4) 离散时间周期信号, 它们在Fourier域的表示依然还是连续非周期和离散周期函数, 也就是说, 第 1)和 4)类信号在时域和Fourier域上的表示是相同的. 因为时域和Fourier域是 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \pi/2$ 角度的分数阶Fourier域, 因此分数阶Fourier变换只能对在时域和Fourier域具有相同表示形式的信号存在定义 [15]. 在每一类可以定义分数阶Fourier变换的信号类型上, 信号在时域

和分数阶Fourier域的表示需要具有相同表示形式，这也是分数阶Fourier变换旋转相加性的要求. 因为旋转相加性要求可以对信号做 α 角度分数阶Fourier变换结果再做 β 角度的分数阶Fourier变换，这就要求信号在各个角度分数阶Fourier域具有相同的形式，否则连续地做分数阶Fourier变换就没有意义.

尽管不存在严格意义(满足旋转相加性)的DTFRFT和FRFS，但是在一些特殊的应用场合下，依然可以定义其表示形式. Kraniauskas和Cariolaro把分数阶Fourier变换看成Fourier变换的变化形式，也就是说，根据分数阶Fourier变换的定义，信号的分数阶Fourier变换可以看作信号首先被一个chirp信号调制，然后做Fourier变换，再经过尺度化和被第 2 个chirp信号调制. 这其中，Fourier变换操作被认为是在分数阶Fourier变换中最重要的步骤，因此可以根据分数阶Fourier变换中Fourier变换的形式得到相应的DTFRFT和FRFS的定义. 其中FRFS被定义为 [14,19]

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_\alpha(nu_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{t^2+(nu_0)^2}{2}\cot\alpha+\mathrm{j}(nu_0)t\csc\alpha}, \tag{11}$$

$$X_\alpha(nu_0)=\int_0^{T_P} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{t^2+(nu_0)^2}{2}\cot\alpha-\mathrm{j}(nu_0)t\csc\alpha}\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

其中 $x(t)$ 满足

$$x(t-T_p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(t-T_p)^2}{2}\cot\alpha}=x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{t^2}{2}\cot\alpha}, \tag{13}$$

称为 α 角度 chirp-周期性，其中 $u_0=2\pi/(T_p\csc\alpha)$, T_p 为 chirp 周期大小.

相应地, DTFRFT被定义为 [14,19]

$$\tilde{X}_\alpha(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{u^2+(nT)^2}{2}\cot\alpha+\mathrm{j}(nT)u\csc\alpha}, \tag{14}$$

$$x(nT)=\int_0^{\frac{2\pi\sin\alpha}{T}} \tilde{X}_\alpha(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u^2+(nT)^2}{2}\cot\alpha-\mathrm{j}(nT)u\csc\alpha}\,\mathrm{d}u, \tag{15}$$

其中 T 是采样间隔，并且 $\tilde{X}_\alpha(u)$ 满足 $-\alpha$ 角度 chirp-周期性:

$$\tilde{X}_\alpha\left(u-\frac{2\pi\sin\alpha}{T}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(u-\frac{2\pi\sin\alpha}{T}\right)^2\cot\alpha}=\tilde{X}_\alpha(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{u^2}{2}\cot\alpha}. \tag{16}$$

从上式可以看出，这种 DTFRFT 定义是直接从信号理想采样的分数阶 Fourier 变换得到

$$\tilde{X}_\alpha(u)=F^\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)\right), \tag{17}$$

这和(10)式是一样的 [33]. 类似地, (9)式所表示的插值公式也可以看作是DTFRFT的广义形式.

Pei提出了针对有限长信号的FRFS[35]. 类似在传统FS定义中，冲击函数 $\delta(u-nu_0)$ 被看作分数阶Fourier域的基，并用来寻找FRFS在时域的基函数. 对 $\delta(u-nu_0)$ 做 α 角度逆分数阶Fourier变换，并考虑正交性条件，可以得到 α 角度FRFS时域的正交基函数:

$$\phi_{\alpha,n}(t)=\sqrt{\frac{\sin\alpha+\mathrm{j}\cos\alpha}{T}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{t^2+(nu_0)^2}{2}\cot\alpha+\mathrm{j}(nu_0)t\csc\alpha},\tag{18}$$

其中 $u_0=2\pi/(T\csc\alpha)$，T 为有限长信号的时间长度.

利用(18)式, FRFS 可以写做

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{\alpha,n}\phi_{\alpha,n}(t).\tag{19}$$

FRFS 序列展开系数 $C_{\alpha,n}$ 可以从信号 $x(t)$ 的分数阶 Fourier 变换采样获得:

$$C_{\alpha,n}=\sqrt{\frac{2\pi\sin\alpha}{T}}X_\alpha\left(n\frac{2\pi\sin\alpha}{T}\right).\tag{20}$$

相应地, DTFRFT可以利用FRFS的对偶性获得, 也就是把时域的离散采样看作 $\alpha=\pi/2$ 角度FRFS展开系数. 因此离散时间信号 $x(nT)$ 的DTFRFT可以通过对 $X_{-\pi/2}(u)$ 求 $(\pi/2+\alpha)$ 角度的FRFS系数获得[35]. 因为这种DTFRFT是从FRFS推导得到, 因此这种类型的DTFRFT在分数阶Fourier域是离散的, 这种定义和Cariolaro在文献[14]和[19]中定义的DTFRFT是不一样的.

从这种FRFS的定义可以看出, 对chirp信号做匹配角度的FRFS只会在 $2\pi/(T\csc\alpha)$ 的整数倍处存在冲击. 因为并不是所有chirp信号都会在 $2\pi/(T\csc\alpha)$ 的整数倍处存在冲击[35], 所以这对于有限长chirp信号是不合适的. 文献[36]定义了一种基于(18)式的任意偏移FRFS, 这样FRFS的chirp基就不止是在 $2\pi/(T\csc\alpha)$ 的整数倍处存在冲击, 这非常利于有限长chirp信号的检测和参数估计.

Kraniauskas和Cariolaro定义的DTFRFT就是信号 $x(t)$ 理想采样的分数阶Fourier变换[14,19]. 根据分数阶Fourier变换旋转相加性, 信号 $x(t)$ 采样序列的 α 角度DTFRFT等于周期函数 $X_{\pi/2}(\omega)$ 的 $\alpha-\pi/2$ 角度分数阶Fourier变换. 因此, Alieva根据周期函数的分数阶Fourier变换的性质, 分析了小角度下DTFRFT的振荡特性[37].

3　离散分数阶 Fourier 变换

类似 DFT 在传统的 Fourier 分析中的作用和地位一样, DFRFT 在基于分数阶 Fourier 变换的应用中起着非常重要的作用. 在分数阶 Fourier 变换被定义后, 许多研究人员定义和研究了 DFRFT. 到目前为止, 已经出现了几种关于 DFRFT 的定义.

A) 线性加权型 DFRFT

一种最初定义 DFRFT 的想法是在时域和分数阶 Fourier 域直接离散化. 通过把连续分数阶 Fourier 变换中的变量 t 和 u 换成变量 n 和 k 得到相应的 DFRFT. 因为离散化的网格 (n,k) 不允许含有非整数的变量, 也就是说对于离散化的网格 (n,k) 不满足旋转操作, 所以这种直接离散化的方法不能产生一个离散化的旋转算子, 因此这种定义 DFRFT 的方法不会满足旋转相加性. 可以考虑从 DFT 矩阵的分数阶幂入手, 去推导分数阶 Fourier 变换的离散化形式. 当然, 由于这种离散化分数阶 Fourier 变换的方法只是从 DFT 矩阵的分数阶幂入手, 而并没有考虑同连续分数阶 Fourier 变换的关系, 因此通过这种方法得到 DFRFT 虽然满足旋转相加性, 但是得到的离散变换

结果和分数阶 Fourier 变换结果差别可能会很大.

Dickinson和Santhanam通过直接取DFT矩阵F的a阶幂得到DFRFT矩阵 F^a [38~40]

$$F^a = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i(a) F^i, \tag{21}$$

其中 F 为 DFT 矩阵, $\alpha_i(a)$ 为加权系数, 由下式给出:

$$\begin{cases} \alpha_0(a) = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d})\cos(2\pi a), \\ \alpha_1(a) = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi a})\sin(2\pi a), \\ \alpha_2(a) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi a}-1)\cos(2\pi a), \\ \alpha_3(a) = \dfrac{1}{2}(-1-\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi a})\sin(2\pi a). \end{cases} \tag{22}$$

定义了 DFRFT 矩阵之后, 离散时间信号 $\boldsymbol{x}$ 的 a 阶 DFRFT 表示为

$$\boldsymbol{X}_\alpha = F^a \boldsymbol{x}. \tag{23}$$

从(21)式我们可以看出, 这种类型的DFRFT定义为单位矩阵、DFT矩阵、翻转矩阵, 以及IDFT矩阵的线性加权组合. 这种定义的DFRFT核矩阵满足旋转相加性; 同时由于表示为DFT矩阵的线性加权, 所以也具有快速算法. 然而, 这种类型DFRFT的主要问题是: 其变换结果并不匹配本文所定义的分数阶Fourier变换结果, 也就是说, 其变换结果和分数阶Fourier变换结果不具有相似性. 而离散变换是否具有和连续变换相似的变换结果是一个离散变换可以称为连续变换的离散形式的一个基本条件. Cariolaro把这种DFRFT称为加权分数阶Fourier变换的离散形式, 并在文献 [15]和 [41]中详细地讨论了加权分数阶Fourier变换和本文所定义的分数阶Fourier变换的关系. 关于这种线性加权型DFRFT与本文的分数阶Fourier变换的不一致性的讨论可以参考文献[25].

B) 采样型 DFRFT

另一个直接并且简单定义DFRFT的方法是, 直接采样连续分数阶Fourier变换核来得到DFRFT核矩阵. 对于这种类型的DFRFT, 考虑的主要是数值计算分数阶Fourier变换. 由于这时感兴趣的只是计算连续分数阶Fourier变换的方法, 所以要求这种DFRFT要近似连续分数阶Fourier变换, 同时希望所定义的DFRFT具有快速算法. 至于旋转相加性, 在这里没有用到, 所以可以不满足. Kraniauskas等通过在时域和分数阶Fourier域直接采样得到DFRFT定义为 [14,19]:

$$X_\alpha(kF) = A_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}(kF)^2\cot\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}(nT)^2\cot\alpha - \mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}, \tag{24}$$

其中 T 为时域采样间隔, $F = 2\pi/(NT\csc\alpha)$ 是分数阶 Fourier 域采样间隔.

Ozaktas推导了两种高效并且精确计算分数阶Fourier变换的方法 [25]. 这种算法把时域原始函数的N个采样点映射为分数阶Fourier域的N个采样点, 并且这种算法的计算复杂度为$O(N\log N)$. 在使用这种方法计算分数阶Fourier变换之前, 首先需要对原始信号做量纲归一化

操作. 经过量纲归一化操作后, 信号在时域和频域表示都称为无量纲的, 并且在时域和频域的支撑长度都等于 Δx [25]. 这也意味着, 信号的Wigner分布被限制在以 $\Delta x/2$ 为半径, 时频平面原点为中心的单位圆内. 为了得到高效计算方法, 这里把分数阶Fourier变换的计算分解为卷积形式. 根据分数阶Fourier变换的定义, 信号 $x(t)$ 的a阶分数阶Fourier变换可以写做

$$X_\alpha(u)=A_\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}u^2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}t^2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}(u-t)^2\csc\alpha}\,\mathrm{d}t, \tag{25}$$

从上式可以看出, 分数阶Fourier变换的计算可以分解成 3 个步骤. 首先对信号 $x(t)$ 乘以一个chirp函数(记做函数 $g(t)$), 这步操作使得 $g(t)$ 的频域带宽变为信号 $x(t)$ 的 2 倍 [25], 因此 $g(t)$ 的采样间隔应该为 $1/2\Delta x$. 而原始信号 $x(t)$ 的采样间隔为 $1/\Delta x$, 所以这时 $x(t)$ 的采样间隔要变成 $1/2\Delta x$, 这样就需要对信号 $x(t)$ 2倍插值, 得到采样间隔为 $1/2\Delta x$ 的 $x(t)$, 然后乘以采样间隔 $1/2\Delta x$ 的采样 $g(t)$. 第 2 步, 用 $g(t)$ 和一个chirp信号做卷积, 因为 $g(t)$ 的带宽为 $2\Delta x$, 所以根据卷积定理, 所卷积的chirp信号可以用其 $2\Delta x$ 带限形式表示, 记为 $h(t)$:

$$h(t)=\int_{-\Delta x}^{\Delta x}H(\varOmega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varOmega t}\,\mathrm{d}\varOmega, \tag{26}$$

其中 $H(\varOmega)$ 为所卷积 chirp 信号的 Fourier 变换.

把卷积写成离散形式, 有

$$g'\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)=\sum_{n=-N}^{N}h\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)g\left(\frac{n}{2\Delta x}\right), \tag{27}$$

这个卷积公式可以利用 FFT 去计算.

最后一步是乘以另一个 chirp 信号, 这样就得到了 $X_\alpha(u)$ 的采样间隔为 $1/2\Delta x$ 的 $2N$ 个采样点. 因为是时域 N 个采样点到分数阶 Fourier 域 N 个采样点的映射, 所以再对 $X_\alpha(u)$ 做 2 倍的抽取就可以得到以采样间隔 $1/\Delta x$ 的 $X_\alpha(u)$ 的采样.

令 $\boldsymbol{X}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{x}$ 表示由 $X_\alpha(u)$ 和 $x(t)$ 的 N 个采样点组成的列向量, 那么上述计算过程可以写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{X}_\alpha=F_{\mathrm{I}}^{a}\boldsymbol{x}, \tag{28}$$

$$F_{\mathrm{I}}^{a}=D\varLambda H\varLambda J, \tag{29}$$

其中 D 和 J 表示抽取和插值操作, $\varLambda$ 和 H 分别对应 chirp 乘和 chirp 卷积操作.

上面是把分数阶 Fourier 变换表示成卷积运算的第 1 种方法, 还可以把分数阶 Fourier 变换表示成另一个形式:

$$X_\alpha(u)=A_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}u^2(\cot\alpha-\csc\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}t^2(\cot\alpha-\csc\alpha)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}(u-t)^2\csc\alpha}\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$

对上式进行采样得到

$$X_\alpha\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)=A_\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2(\cot\alpha-\csc\alpha)}\sum_{n=-N}^{N}\left[x\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2(\cot\alpha-\csc\alpha)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2\csc\alpha}. \tag{31}$$

上式的求和可以表示成卷积形式, 利用 FFT 完成. 最后对 $X_\alpha(u)$ 进行 2 倍的抽取, 就可以得到以 $1/\Delta x$ 为采样间隔 $X_\alpha(u)$ 的采样. 同样地, 上述过程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}_\alpha=F_{\mathrm{II}}^{a}\boldsymbol{x}, \tag{32}$$

$$F_{\mathrm{II}}^{a}=DK_aJ, \tag{33}$$

其中

$$K_a(m,n)=A_\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2(\cot\alpha-\csc\alpha)-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2(\cot\alpha-\csc\alpha)+\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2\csc\alpha}. \tag{34}$$

在第 1 种方法中, $h(t)$ 的计算需要利用Fresnel积分, 所以第 2 种方法具有更大的优势. 需要指出的是, 尽管对于分数阶Fourier变换还有其他的分解方法同样可以利用FFT去运算, 但是这些方法由于还需要坐标尺度化使得方法变得复杂. 对于文献 [25]中计算分数阶Fourier变换所需要的量纲归一化的详细讨论和实际操作可以参考文献 [42]. 该算法的更多操作细节可以参考文献 [43].

Deng提出了一种基于Chirp-Z变换的数值计算分数阶Fourier变换的快速算法 [44]. 该算法本质上和(30)式的分解是一样的. 在这种方法中, 时域和分数阶Fourier域的采样点数可以自由地选择, 只要满足在第 1 部分所介绍的基于分数阶Fourier变换的采样定理.

在此基础上, Pei定义了另一种采样类型的DFRFT, 这种方法通过对信号及其分数阶Fourier变换在时域和分数阶Fourier域选择合适的采样间隔, 使得DFRFT具有正交性和可逆性 [45]. 更重要的是, 该DFRFT具有更低的计算复杂度, 在所有近似连续分数阶Fourier变换的DFRFT类型中, 这种DFRFT具有最低的计算复杂度.

首先对原始函数 $x(t)$ 和其分数阶 Fourier 变换函数 $X_\alpha(u)$ 进行采样间隔为 Δt 和 Δu 的采样, 这时分数阶 Fourier 变换表示为

$$X_\alpha(m)=A_\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}m^2(\Delta u)^2\cot\alpha}\sum_{n=-N}^{N}x(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}n^2(\Delta t)^2\cot\alpha-\mathrm{j}mn\Delta u\Delta t\csc\alpha}, \tag{35}$$

其中 $n=-N,-N+1,\cdots,N$, $m=-M,-M+1,\cdots,M$. 注意, 这里的起始采样位置并不在 $t=0$ 和 $u=0$.

令时域和分数阶 Fourier 域采样间隔满足

$$\Delta u\cdot\Delta t=\frac{S\cdot 2\pi}{(2M+1)\csc\alpha}, \tag{36}$$

其中 S 是和 $2M+1$ 互质的整数. 那么变换矩阵可以写做

$$F_a(m,n)=A_\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}m^2(\Delta u)^2\cot\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}n^2(\Delta t)^2\cot\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{S\cdot 2\pi\cdot mn}{2M+1}}. \tag{37}$$

经过这样满足(36)式的以采样间隔为 Δt 和 Δu 的采样后, 使得逆变换矩阵是 Hermite 矩阵, 也就是说, 这样定义的 DFRFT 是可逆的, 当 $M\geqslant N$.

为简化起见, 选择 $S=\pm1$, 并且归一化变换矩阵 $F_\alpha(m,n)$, 就可以得到这种新的采样类型 DFRFT:

$$X_\alpha(m)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\sin\alpha-\mathrm{j}\cos\alpha}{2M+1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}m^2(\Delta u)^2\cot\alpha}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}x(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}n^2(\Delta t)^2\cot\alpha-\mathrm{j}\frac{2\pi\cdot mn}{2M+1}}, & \alpha\text{在第1,2象限};\\ \sqrt{\dfrac{-\sin\alpha+\mathrm{j}\cos\alpha}{2M+1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}m^2(\Delta u)^2\cot\alpha}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}x(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}n^2(\Delta t)^2\cot\alpha+\mathrm{j}\frac{2\pi\cdot mn}{2M+1}}, & \alpha\text{在第3,4象限}.\end{cases}\tag{38}$$

从上式我们可以清楚地看出, 相对于Ozaktas所定义的采样型DFRFT[25], Pei提出的这种采样型DFRFT通过选择合适的时域和分数阶Fourier域采样间隔避免了卷积操作, 使得DFRFT的计算可以直接利用FFT完成[45]. 由于通过FFT计算卷积需要 3 个FFT, 而这里把求和表示成DFT的形式就可以直接利用 1 个FFT计算, 只是点数增加了 1 倍. 所以Pei定义的这种DFRFT比Ozaktas在文献[25]中的DFRFT的计算复杂度要小.

C) 特征分解型 DFRFT

为了使所定义的DFRFT满足酉性和旋转相加性, Pei首先提出基于特征分解方法的DFRFT——特征分解型DFRFT. 这类DFRFT是基于矩阵的特征分解来计算矩阵的分数阶幂. Namias首先通过特征分解也就是谱展开给出了这种定义分数阶Fourier变换的方法[3]. Dickinson和McClellan分别讨论了DFT矩阵的特征值和特征向量[38,46]. 在介绍特征分解型DFRFT之前, 首先列出定义这类DFRFT所需要的基本知识.

性质 1　分数阶 Fourier 变换的特征函数是 Hermite-Gauss 函数

$$\phi_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}}H_m(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},$$

其中 $H_m(t)$ 表示 m 阶的 Hermite 函数, 其定义由下面给出:

$$H_m(t)=(-1)^m\,\mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}(\mathrm{e}^{-t^2}),\tag{39}$$

$\phi_m(t)$ 所对应的特征值为 $\exp(-\mathrm{j}m\alpha)$.

证明　见文献[3].

性质 2　$N\times N$ 大小的 DFT 矩阵 F 的特征值为 $\{1,-1,\mathrm{j},-\mathrm{j}\}$, 其各个特征值的多样性在表 1 列出.

表1　DFT 矩阵特征值的多样性

N	1 的多重度	−1 的多重度	−j 的多重度	j 的多重度
$4m$	m+1	m	m	$m-1$
$4m+1$	M+1	m	m	m
$4m+2$	M+1	m+1	m	m
$4m+3$	M+1	m+1	m+1	m

证明　见文献[46].

从表 1 我们可以看出, DFT 矩阵的特征向量属于 4 个特征空间: E_0,E_1,E_2 和 E_3, 这 4 个特

征空间是分别对应特征值 1, −1, −j, j 的特征空间.

性质 3　由(40)式给出了 $N\times N$ 大小的矩阵 S 和 DFT 矩阵 F 是可以交换的, 因此矩阵 F 的特征向量可以通过计算矩阵 S 的特征向量得到, 其中 $\omega=2\pi/N$.

$$S=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2\cos(\omega) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(2\omega) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos[(N-2)\omega] & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos[(N-1)\omega] \end{bmatrix}. \tag{40}$$

证明　见文献 [38].

我们知道 Fourier 变换的特征函数也是 Hermite-Gauss 函数, 所以 Fourier 变换的核可以表示为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}\,\phi_k(t), \tag{41}$$

其中 $\phi_k(t)$ 表示第 k 阶 Hermite-Gauss 函数, $\lambda_k=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)k}$ 是 k 阶 Hermite-Gauss 特征函数所对应的 Fourier 变换的特征值.

(41)式称为Fourier变换核的谱展开形式 [2]. 类似地, 分数阶Fourier变换的核可以写为 [3]:

$$K_a(u,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}ka}\,\phi_k(t), \tag{42}$$

其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)ka}$ 表示 Fourier 变换特征值的 a 次幂.

模拟连续情况(42), 定义 DTFRFT 核矩阵为谱展开形式:

$$F^a(m,n)=\sum_{k=0}^{N-1}v_k(m)(\lambda_k)^a v_k(n), \tag{43}$$

其中 $v_k(n)$ 表示 $N\times N$ 大小的 DFT 矩阵正交归一化特征向量集, λ_k 为所对应的特征值.

Ozaktas证明了通过(43)式谱展开方式定义的DFRFT会自动满足: 1)酉性, 2)旋转相加性, 3)当变换阶数等于 1 时, DFRFT退化为传统的DFT[12]. 这样, 特征分解型DFRFT的关键就是如何使得这种类型的DFRFT逼近连续分数阶Fourier变换. 从表 1 已经得到了DFT矩阵的特征值的多样性. 那么利用特征分解去构造DFRFT变换核所剩下的工作就是寻找合适的特征向量, 并且对于不同的N去合理的分配特征值和特征向量, 这其中最重要的是寻找逼近Hermite-Gauss函数的DFT矩阵特征向量.

在构造DFRFT核之前, 有 2 个会引起DFRFT定义模糊的问题需要解决. 第 1 个是由特征值分数阶幂的多样性引起, 因为分数阶幂操作不是单值的. 这个问题可以通过取 $\lambda_k^a=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)ka}$ 解决. 第 2 个问题是由DFT核矩阵特征向量引起的, 因为同一个特征值所对应的特征向量的线性组合依然还是这个特征值所对应的特征向量, 所以必须找到一个标准正交的特征向量集, 要求特征向量近似连续Hermite-Gauss函数. 从前面的性质 3 可以看出, S矩阵的特征向量同时也是F矩阵

的特征向量. 在文献 [12]和 [38]中已经证明了, 对于不同的N, 总可以找到一个唯一的完备的矩阵S和F的特征向量集. 因为S矩阵是实对称的, 所以其特征向量是实的正交的.

Pei和Yeh首先提出了这种基于特征分解类型的DFRFT[47,48]. 在文献 [47]和 [48]中, 从S矩阵获得的特征向量被直接看作是连续Hermite-Gauss函数的近似. 这是因为S的特征向量是离散的Mathieu函数, 而这个函数会随着N的增加逼近于Hermite函数. 根据特征向量中符号的改变数目, 可以确定所得到的特征向量所对应的连续Hermite-Gauss函数, 也就是确定相应的Hermite-Gauss特征向量的阶数. 如果特征向量具有k个符号改变, 就认为该特征向量对应第k阶Hermite-Gauss函数, 其相应的特征值为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2)ka}$. 对于不同的$N$值, 特征值的分配规则归纳于表 2.

表 2　DFRFT 特征值分配规则

N	DFRFT 的特征值
$4m$	$\exp(-\mathrm{j}\pi ka/2)$, $k=0,1,2,\cdots,4m-2, 4m$
$4m+1$	$\exp(-\mathrm{j}\pi ka/2)$, $k=0,1,2,\cdots,4m-1, 4m$
$4m+2$	$\exp(-\mathrm{j}\pi ka/2)$, $k=0,1,2,\cdots,4m, 4m+2$
$4m+3$	$\exp(-\mathrm{j}\pi ka/2)$, $k=0,1,2,\cdots,4m+1, 4m+2$

需要注意的是, 当 N 为偶数时, 最后一个特征值分配上存在一个“跳跃”. 这个规则是和表 1 特征值的多样性一致的.

现在, 可以给出 DFRFT 的定义:

$$F^{a}=VD^{a}V^{\mathrm{T}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}, & N\text{为奇数};\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a}\boldsymbol{v}_{N-1}\boldsymbol{v}_{N-1}^{\mathrm{T}}, & N\text{为偶数};\end{cases}\tag{44}$$

其中, $\boldsymbol{v}_k$ 是从 S 矩阵得到的近似连续 Hermite-Gauss 函数的特征向量, $V=[\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{N-1}]$ 表示由特征向量所组成的矩阵, D^a 是一个对角矩阵, 定义如下, 当 N 为奇数时,

$$D^{a}=\mathrm{diag}\left(1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}a},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}(N-2)a},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}(N-1)a}\right);\tag{45}$$

当 N 为偶数时,

$$D^{a}=\mathrm{diag}\left(1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}a},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}(N-2)a},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}Na}\right).\tag{46}$$

Pei在文献 [49]中首先研究了离散Hartley变换的特征值和特征向量, 然后根据Hartley变换和Fourier变换之间的特征关系, 利用变换矩阵的特征分解法定义了DFRFT. 这种DFRFT的定义和在文献 [47]和 [48]中定义本质上是一样的, 因为定义DFRFT矩阵核所采用的特征向量都是把S矩阵的特征向量直接认为是离散Hermite-Gauss函数.

在文献 [49]的基础上, Pei在文献 [50]和 [51]中提出了一种更加近似连续分数阶Fourier变换的DFRFT, 这种方法并不直接把从S矩阵得到的特征向量作为DFT矩阵的特征向量, 而是首先对Hermite-Gauss函数进行采样, 然后通过一个向量校准过程, 使得从Hermite-Gauss函数采样得到的向量修正为DFT矩阵的特征向量. 由于这种方法从Hermite-Gauss函数采样出发, 所以得到的DFT矩阵的特征向量更加近似Hermite-Gauss函数. 首先对Hermite-Gauss函数进行采样间隔为$T=\sqrt{2\pi/N}$的采样, 然后对采样得到的离散函数进行在范围$[0,N-1]$之间的移位, 得到逼近k阶Hermite-Gauss函数的序列$g_m(n)$. 定义向量v_m为

$$v_m=\left[g_m(0)\;g_m(1)\;\cdots\;g_m(N-1)\right]^{\mathrm{T}},\tag{47}$$

并且归一化$\boldsymbol{v}_m$, 得到 DFT 矩阵F的“近似”特征向量$\bar{\boldsymbol{v}}_m$, 注意$\bar{\boldsymbol{v}}_m$并不是矩阵F的精确特征向量. 然后从得到的近似特征向量集中根据阶数从低到高选择N个近似特征向量$\left\{\bar{\boldsymbol{v}}_{m_i},i=1,\cdots,N\right\}$作为待调整的特征向量. 从阶数由低到高选择是因为, 低阶 Hermite-Gauss 向量$\boldsymbol{v}_m$近似连续 Hermite-Gauss 函数的误差比较小. 特征值的选择满足表 1 的多样性就可以了. 接着通过一个向量校准过程, 使得所选择的N个近似特征向量集$\left\{\bar{\boldsymbol{v}}_{m_i},i=1,\cdots,N\right\}$成为$N$个 Hermite-Gauss 特征向量集$\left\{\boldsymbol{u}_{m_i},i=1,\cdots,N\right\}$. 这样 DFRFT 定义为

$$\begin{aligned}F^a&=\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{m_i\pi}{2}a}\boldsymbol{u}_{m_i}\boldsymbol{u}_{m_i}^{\mathrm{T}},\\&=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a}\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}, & N\text{为奇数};\\\displaystyle\sum_{k=0}^{N-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a}\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N\pi}{2}a}\boldsymbol{u}_N\boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}}, & N\text{为偶数}.\end{cases}\end{aligned}\tag{48}$$

因为特征向量$\boldsymbol{u}_{m_i}$的获得是通过采样 Hermite-Gauss 函数然后再经过特征向量校准过程得到, 所以这里定义的 DFRFT 更逼近连续 DFRFT.

在文献 [52]中, DFT矩阵的近似特征向量也是首先通过采样Hermite-Gauss函数得到, 然而, DFT矩阵Hermite-Gauss特征向量是通过利用所得到的近似特征向量在DFT特征空间上的正交投影得到, 而不是采用文献 [50, 51]中的校准过程. 跟文献 [50, 51]中的采样一样, 首先得到近似特征向量$\bar{\boldsymbol{v}}_m$, 然后计算$\bar{\boldsymbol{v}}_m$在DFT特征空间的投影, 得到DFT特征向量$\tilde{\boldsymbol{u}}_m$:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_m=\sum_{(n-k)\bmod 4=0}\left\langle\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{u}_k\right\rangle\boldsymbol{u}_k,\tag{49}$$

其中$\boldsymbol{u}_k$是S矩阵特征向量, 用来通过上式使得$\tilde{\boldsymbol{u}}_m$成为 DFT 矩阵的 Hermite-Gauss 特征向量. 然而, 从上式得到的 DFT 矩阵特征向量并不是正交的, 因此可以使用 2 种正交化方法以得到正交 DFT 特征向量$\hat{\boldsymbol{u}}_k$: Gram-Schmidt 算法(GSA)和 Orthogonal Procrustes 算法(OPA). 然后 DFRFT 的

核可以表示为

$$
\begin{aligned}
F^{a} &= \hat{U} D^{a} \hat{U}^{\mathrm{T}}, \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a} \hat{\boldsymbol{u}}_k \hat{\boldsymbol{u}}_k^{\mathrm{T}}, & N\text{为奇数;} \\ \sum_{k=0}^{N-2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}a} \hat{\boldsymbol{u}}_k \hat{\boldsymbol{u}}_k^{\mathrm{T}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N\pi}{2}a} \hat{\boldsymbol{u}}_N \hat{\boldsymbol{u}}_N^{\mathrm{T}}, & N\text{为偶数.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{50}
$$

Candan在文献 [12]和 [53]中, 通过离散二阶差分方程的解得到离散Hermite-Gauss函数, 也就是DFT矩阵Hermite-Gauss特征向量. 通过二阶微分算子得到可以和F相交换的矩阵$\tilde{S}$. 矩阵$\tilde{S}$的特征向量看作连续Hermite-Gauss函数的离散化. 需要指出的是, 这里的可交换矩阵$\tilde{S}$和前面定义的矩阵的关系是$\tilde{S} = S - 4I$. 因为DFT矩阵的特征向量要么是偶对称的, 要么是奇对称的, 所以这里特征向量是通过一个矩阵P得到的. 该矩阵可以把任何向量映射为具有奇偶性的向量. 相应的$\tilde{S}$的特征向量只是简单的把$P\tilde{S}P^{-1}$的特征向量做偶和奇扩展. 在得到Hermite- Gauss特征向量后, 跟前面一样就可以定义DFRFT.

Hanna通过使用奇异值分解方法得到了F矩阵的标准正交特征向量, 而不是利用可交换矩阵S [54]. Hanna提出序列OPA(SOPA)算法用来产生矩阵F的近似Hermite-Gauss特征向量. 根据谱展开理论, 矩阵F可以表示为

$$
F = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k P_k, \tag{51}
$$

其中λ_k为DFT矩阵的特征值, P_k为在F的第k个特征空间上的正交投影矩阵. 对特征空间P_k应用奇异值分解技术, 有

$$
P_k = V_k V_k^{\mathrm{H}},\ k = 1, \cdots, 4, \tag{52}
$$

其中V_k为酉矩阵, 上标H表示复共轭转置. 那么矩阵F的第k个特征空间的标准正交基可以从V_k的列中得到. 然后, 类似在文献 [50~52]中的操作一样, 先得到DFT矩阵的Hermite-Gauss特征向量$\tilde{\boldsymbol{u}}_m$, 然后结合利用奇异值分解方法对得到的特征向量应用GSA, OPA和SOPA方法得到标准正交特征向量$\hat{\boldsymbol{u}}_k$.

在文献 [54]的基础上, Hanna直接从投影矩阵P_k获得DFT矩阵Hermite-Gauss特征向量$\tilde{\boldsymbol{u}}_m$, 而不是先得到近似特征向量, 然后再得到特征向量 [55], 这种方法更为快速和直接:

$$
\tilde{\boldsymbol{u}}_m = P_k \boldsymbol{v}_m. \tag{53}
$$

前面的F特征向量的获得是通过矩阵S得到的. Pei提出了一种新的和F是可以交换的矩阵T [56,57]. 这个矩阵的特征向量比S矩阵更加近似连续Hermite-Gauss函数. $N \times N$大小的矩阵T定义为

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & \cdots & 0 & 0.5 \\ 0.5 & \left(\cos\frac{\pi}{N}\right)^2 & \dfrac{\cos\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{N}}{2\cos\frac{\pi}{N}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{N}}{2\cos\frac{\pi}{N}} & \left(\cos\frac{2\pi}{N}\right)^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left[\cos\frac{(N-2)\pi}{N}\right]^2 & \dfrac{\cos\frac{(N-2)\pi}{N}\cos\frac{(N-1)\pi}{N}}{2\cos\frac{\pi}{N}} \\ 0.5 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\cos\frac{(N-2)\pi}{N}\cos\frac{(N-1)\pi}{N}}{2\cos\frac{\pi}{N}} & \left[\cos\frac{(N-1)\pi}{N}\right]^2 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

因为矩阵T的特征向量更加近似连续Hermite-Gauss函数，所以基于T的DFRFT定义更加逼近连续分数阶Fourier变换．此外，因为矩阵S和T是线性独立的，并且它们的特征向量都是近似于Hermite-Gauss函数的，所以它们的线性组合$S+kT$也是和F可交换的，并且其特征向量也是近似Hermite-Gauss的. Pei指出，$S+15T$在所有的线性组合中，具有最佳的Hermite- Gauss特征向量[56,57]．和文献[12]的方法一样，在文献[56，57]中利用DFT矩阵特征向量的奇偶性得到$S+15T$的特征向量．Candan在此基础上找到了与矩阵F可交换的矩阵集合，这些矩阵可以提供更好的近似Hermite-Gauss函数的特征向量[58]．同时Candan还利用高阶差分方程推导了高阶近似Hermite-Gauss函数的特征向量．这些特征向量可以用来定义DFRFT.

D) 其他类型 DFRFT

还有其他类型的DFRFT和上面定义的方法不同．在文献[59]中，DFRFT依据采样的周期冲击串来定义，并且这种定义具有快速算法．然而，这种类型的DFRFT需要很多限制条件，并且并不是对所有角度都有合适的定义．文献[60]的DFRFT定义通过对DFT矩阵乘以一个周期chirp得到．这种类型的DFRFT满足旋转相加性和可逆性．但是，这种DFRFT也只是对一些特殊的角度存在定义.

E) 关于 DFRFT 的总结

作为一个真正“严格”的DFRFT, DFRFT需要满足下面的性质[12]: 1) 酉性; 2) 旋转相加性; 3) 当变换阶数为 1 时，退化为DFT; 4) 近似连续分数阶Fourier变换.

前 2 条性质是连续分数阶 Fourier 变换基本的性质，我们希望离散变换形式也同样具有这 2 条性质．第 3 个是 DFRFT 作为普通 DFT 广义形式的必然条件．最后一条性质是定义离散变换的基本出发点．此外还希望所定义的 DFRFT 具有快速计算方法，并且还可以写成闭合形式．加上合理 DFRFT 所应该具有的 4 条性质，真正理想的 DFRFT 应该具有 6 条性质．现在我们对比 3 种主要的 DFRFT 类型，也就是：线性组合型、采样型和特征分解型，而不考虑使用很少的其他类型，比较结论列于表 3．比较的项目包括: 1) 酉性; 2) 旋转相加性; 3) 近似连续分数阶 Fourier 变换; 4) 计算复杂度; 5) 是否可以写成闭合形式．因为 3 种 DFRFT 类型明显满足当变换阶数等于 1 时退化为 DFT，所以这一条没有在表 3 中列出.

表 3　3 种主要类型 DFRFT 的比较

性质	线性加权型	采样型	特征分解型
酉性	√	√	√
旋转相加性	√	×	√
近似连续变换	×	√	√
计算复杂度	$O(N\log N)$	$O(N\log N)$	$O(N^2)$
可否写成闭合式	√	√	×

从表 3 我们可以清楚地看出，由于线性组合型DFRFT不能逼近连续分数阶Fourier变换，所以这种类型的DFRFT所对应的连续分数阶Fourier变换不是本文所定义的分数阶Fourier变换. Cariolaro称这种分数阶Fourier变换为加权分数阶Fourier变换(WFRFT)，本文所定义的分数阶Fourier变换称为chirp型分数阶Fourier变换(CFRFT)[41]. 由于WFRFT比CFRFT缺少很多重要的性质，目前对其研究不多. 这种类型的DFRFT可以扩展到多周期分数阶Fourier变换，主要用于图像编码和加密[61,62].

对于采样型 DFRFT，当我们只是为了利用离散变换去计算连续分数阶 Fourier 变换时是非常有用的. 这种 DFRFT 把原始函数的 N 个采样值映射为分数阶 Fourier 变换的 N 个采样值. 这种形式的 DFRFT 具有很好的逼近连续分数阶 Fourier 变换的精度，并且可以利用 FFT 获得运算量为 $O(N\log N)$的数值算法. 在一些应用中，只是希望 DFRFT 可以很好地逼近连续分数阶 Fourier 变换，而不利用旋转相加性，这时通过把连续分数阶 Fourier 变换用这种 DFRFT 取代，在连续分数阶 Fourier 域推导的各种信号处理算法可以直接应用到离散信号处理上. 此外，由于这种 DFRFT 具有闭合形式，所以在一些应用中有利于推导一些性质. 由于采样型 DFRFT 的这些优点，得到了广泛应用. 需要指出的是由于线性加权型 DFRFT 不能逼近连续分数阶 Fourier 变换，而采样型 DFRFT 不具有旋转相加性，因而不能称为严格的 DFRFT.

由于分数阶Fourier变换的核函数匹配chirp信号，所以分数阶Fourier变换特别适合chirp信号检测和估计，以及去除chirp噪声. 这时采用采样型DFRFT对原始信号进行分数阶Fourier变换，然后在分数阶Fourier域设计合适的滤波器函数，以对其中的chirp信号进行匹配[8,21,45,63]. 由于分数阶Fourier变换具有时变特性，文献 [45]还利用采样型DFRFT定义离散分数阶相关，用于模式识别，并取得了很好的效果[45].

Chirp信号在雷达声纳等工程中应用广泛，所以对这类信号的采样就变得非常重要. 由于分数阶Fourier变换特别适合处理非平稳信号，尤其是chirp信号，所以我们提出基于分数阶Fourier变换的非均匀采样理论[64]. 由于采样型DFRFT具有闭合式，我们利用采样型的DFRFT对基于分数阶Fourier变换的非均匀采样进行研究，得到了非均匀采样的分数阶Fourier数字谱特性以及恢复非均匀采样chirp信号原始分数阶Fourier数字谱的方法.

鉴于多抽样技术和滤波器组理论在数字信号处理中的广泛应用，在文献[65, 66]中，我们提出基于分数阶Fourier变换的多抽样率转换和分数阶Fourier域滤波器组设计. 得到了抽取和插值在分数阶Fourier域的作用，以及抽取和插值在分数阶Fourier域的等价结构. 利用等价结构得到分数阶Fourier域滤波器的多相表示以及高效实现. 利用滤波器组理论分析非均匀采样和差分采样，得到了非均匀采样和差分采样滤波器理论，由于这里需要采用DFRFT很好地逼进连续分数

阶Fourier变换, 同时也为了具有闭合表达式, 所以这里我们采用采样型DFRFT. 这些理论发展了基于分数阶Fourier变换采样和多抽样率转换理论. 促进了分数阶Fourier变换在工程中的具体应用.

特征分解型DFRFT是目前为止唯一严格意义上的DFRFT定义, 这种类型的DFRFT和连续分数阶Fourier变换非常接近, 同时还具有能称为“分数阶”的独特性质——旋转相加性. 当DFRFT满足旋转相加性时, α 角度的DFRFT的逆变换就是$-\alpha$角度的DFRFT. 因此, 正变换和逆变换具有同样的表达式, 只是相差一个参数, 这样通过一个统一的计算机程序就可以容易地把在分数阶Fourier域的信号处理移植到时域. 在没有实时性要求的前提下, 采样型DFRFT的计算也可以通过特征分解型DFRFT完成. 同时这种特征分解型DFRFT还可以用于需要旋转相加性的地方, 比如图像加密 [67]. 当然, 这种类型的DFRFT的缺点是, 它不能写成闭合形式, 同时还缺少$O(N\log N)$的计算方法.

根据特征分解型 DFRFT 的定义, 为了使 DFRFT 满足酉性和旋转相加性, 要求 DFT 矩阵的特征向量为标准正交的; 为了使 DFRFT 近似连续分数阶 Fourier 变换, 要求 DFT 矩阵的特征向量近似Hermite-Gauss函数. 因为矩阵F的酉性表明对应不同特征空间的特征向量是相互正交的, 所以基于特征分解类的 DFRFT 的关键就是在各个特征空间寻找逼近性能好的 Hermite- Gauss 标准正交特征向量. 在早期定义 DFRFT 中, 矩阵 S 的标准正交特征向量被直接认为是标准正交Hermite-Gauss 特征向量. 随着 DFRFT 研究的深入, 矩阵 S 的标准正交特征向量只是用来做矩阵 F 特征空间最初的标准正交基, 以用来获得最终的近似 Hermite-Gauss 特征向量. 后来出现的各种方法就是为了寻找更好的近似 Hermite-Gauss 的标准正交特征向量.

文献 [68~70]讨论了通过角度分解计算特征分解型DFRFT的方法. 利用这种方法, 任何角度的DFRFT可以通过某些特殊角度的DFRFT的加权求和得到. 尽管通过这种方法的计算DFRFT的运算量依然还是$O(N^2)$, 但是这种计算方法会降低计算过程中的存储单元的数目, 其运算结构特别适合在VLSI上完成.

其他新颖的高效的计算 3 种DFRFT的相关文献可以参考 [71~75]. 在文献 [71]中, 用多抽样率信号处理来高效地计算特征分解型DFRFT. 通过块处理操作, DFRFT可以通过MIMO系统完成. 在文献 [72]中, 自适应滤波器被用来计算采样类DFRFT, 这种方法适合并行计算的场合, 适合VLSI完成. 在文献 [73]中, DFT矩阵的特征向量被推导出来, 这样就不需要从S矩阵求解特征向量, 进而可以更直接计算特征分解型DFRFT. 文献 [74]给出了二维特征分解型DFRFT的计算. 文献 [75]给出了DFRFT在DSP上的实现, 并给出了定点计算的误差分析.

4 其他离散分数阶变换

由于 DFT 和其他酉变换有着密切的关系, 比如离散余弦变换、离散 Hadamard 变换和离散Hartley 变换等, 因此可以得到这些离散变换的分数阶变换形式.

许多离散变换的“分数阶”形式都是基于前面所讲的特征分解方法, 因为这种方法使得所得到的分数阶变换具有旋转相加性, 并且当变换阶数等于 1 时退化为原来的变换. 这些离散变换分数阶化的统一方法是: 首先研究离散变换的特征结构, 以得到这些变换的特征值和特征向量, 然后利用特征分解结构得到相应的分数阶形式. 一旦 $N\times N$ 的变换矩阵 K 的特征值 λ_n 和特征向

量 $\boldsymbol{u}_n$ 得到了, 那么分数阶变换矩阵 K^a 可以表示为

$$K^a = UD^aU^{\mathrm{H}} = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n^a \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{H}}, \tag{55}$$

其中矩阵 U 和 D 由标准正交特征向量 $\boldsymbol{u}_n$ 和特征值的分数阶幂 λ_n^a 组成. 注意, 这里使用共轭转置而不是转置, 是因为并不是所有变换的特征向量都是实的.

Pei在文献 [49]中引入了离散分数阶Hartley变换(DFRHT), 并讨论了DFRHT的特征结构: 其特征值为 $\{1,-1\}$, 特征向量跟F的特征向量一样, 都是Hermite-Gauss特征向量.

Pei在文献 [76]中引入了离散分数阶Hadamard变换. 其特征值为 $\{1,-1\}$, 特征向量通过从最初的 2 个特征向量利用回归算法精确地计算从阶数 2 一直到阶数 2^n 的Hadamard特征向量.

Pei和Cariolaro分别从不同角度定义了离散分数阶余弦和正弦变换 [77,78]. Pei选择DCT-I和DST-I来定义离散分数阶余弦-I变换(DFRCT-I)和离散分数阶正弦-I变换(DFRST-I)[77]. DCT-I和DST-I核矩阵的特征值为 $\{1,-1\}$, 并且它们的特征向量可以通过DFT的特征向量的计算获得. 对于N点的DCT-I特征向量$\boldsymbol{u}$, 可以写为

$$\boldsymbol{u} = \left[v_0, \sqrt{2}v_1, \cdots, \sqrt{2}v_{N-2}, v_{N-1}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{56}$$

其中 $\boldsymbol{v} = \left[v_0, v_1, \cdots, v_{N-2}, v_{N-1}, v_{N-2}, \cdots, v_1\right]^{\mathrm{T}}$ 是$(2N-2)$点的 DFT 矩阵的偶特征向量.

N 点的 DST-I 特征向量 $\boldsymbol{u}$ 可以写为

$$\boldsymbol{u} = \sqrt{2}\left[v_1, v_2, \cdots, v_{N-1}, v_N\right]^{\mathrm{T}}, \tag{57}$$

其中 $\boldsymbol{v} = \left[0, v_0, v_1, \cdots, v_N, 0, -v_N, -v_{N-1}, \cdots, -v_1\right]^{\mathrm{T}}$ 是 $2(N+1)$ 点 DFT 矩阵的奇特征向量.

不同于文献 [77]中定义的DFRCT, Cariolaro从DCT-II中得到了实值的DFRCT-II. DCT-II的特征值对于不同的N是不同的, 特征值的星座图是象限对称的 [78]. 因为DCT-II的特征值是不同的, 所以它的特征向量是相互正交的, 也就可以直接从DCT-II矩阵计算其特征向量.

DFRCT和DFRST可以用于计算偶信号和奇信号的DFRFT. 由于DFRCT是传统DCT的广义形式, 多了一个自由度参数, 因此在数据压缩和编码等应用方面通过最优角度的选择获得最佳压缩和编码效果. 比如对Lena测试图像进行压缩的最优变换阶数是 1.01, 比传统DCT压缩效率有所提高 [77]. 同时, 由于DFRCT具有阶数和生成序列(GS)参数, 可以用于数据加密和数字水印 [77,79].

读者若想对DFRCT, DFRST, 分数阶离散广义和偏移DFT, DHT, DCT-IV和DST-IV进行深入研究, 可以参考文献 [79~81].

其他的离散分数阶变换可以参考文献 [67, 82, 83]. 在文献 [82]中, 基于DFRFT的特征分解定义了离散分数阶Hilbert变换. 在文献 [83]中定义了分数阶随机变换, 这个定义同样可以写做(55)式的形式, 只是矩阵U的特征向量是依赖于一个随机矩阵. 在文献 [67]中, 通过对(55)式中的对角矩阵D取不同的分数阶幂, DFRFT可以推广到多参数DFRFT. 文献 [84, 85]中, 角度分解方法用到了其他分数阶酉变换中.

5 结论和将来的研究方向

本文对分数阶 Fourier 变换离散化算法的重要研究进展和现状进行了系统归纳和简要评述, 包括: 分数阶 Fourier 域带通信号采样和重构; 离散时间 Fourier 变换和分数阶 Fourier 级数; 离散分数阶 Fourier 变换; 以及和分数阶 Fourier 变换紧密相关的其他分数阶酉变换, 并介绍了它们的应用场合.

为了实现对某种连续变换的数字计算, 我们需要研究此连续变换精确并且高效的离散算法. 也就是说, 一个成功的离散算法应该尽可能地保留连续变换所具有的性质, 同时也应该具有高效的计算方法. DFT 就是一个例子. 当连续分数阶 Fourier 变换定义后, 许多研究人员开始尝试推导其相应的离散算法, 也就是离散分数阶 Fourier 变换. 由于分数阶 Fourier 变换核的快速振荡性, 使得分数阶 Fourier 变换的离散计算比传统 Fourier 变换的离散计算困难得多. 在目前的各种分数阶 Fourier 变换离散计算的方法中, 由于基于特征分解的方法可以保留连续分数阶 Fourier 变换的许多性质, 同时很好地逼近连续分数阶 Fourier 变换而得到了研究人员的重视. 这种基于特征分解的方法也可以应用到其他酉变换中, 以得到这些变换相应的“分数阶”形式. 所以目前 DFRFT 研究的热点是这种特征分解型 DFRFT. 将来这方面研究的主要方向为: 1) 找到更加逼近连续 Hermite-Gauss 函数的特征向量, 以使得特征分解型 DFRFT 更好地逼近连续分数阶 Fourier 变换; 2) 深入研究 DFT 的特征结构, 希望可以找到灵活的基于特征分解的 FFT 结构, 以使得基于特征分解的 DFRFT 可以具有快速算法; 3) 对 Hermite-Gauss 函数的离散化进行深入研究, 希望找到闭合形式的特征分解型 DFRFT; 4) 找到 DFRFT 同其他离散时频分布的关系, 比如同离散 Wigner 分布的关系. 相信随着对 DFRFT 研究的不断深入, 分数阶 Fourier 变换在工程实践中会得到越来越广泛的应用前景.

参考文献

1 Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42: 3084—3091 [DOI]

2 Ozaktas H M, Zalevsky Z, Kutay M A. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing. New York: Wiley, 2000. 1—513

3 Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. J Inst Math Appl, 1980, 25: 241—265 [DOI]

4 Tao R, Deng B, Wang Y. Research progress of the fractional Fourier in signal processing. Sci China Ser F-Inf Sci, 2006, 49(1): 1—25

5 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004. 23—49

6 Zayed A I. On the relationship between the Fourier transform and fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1996, 3: 310—311 [DOI]

7 Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. J Opt Soc Amer A, 1993, 10: 2181—2186

8 Ozaktas H M, Barshan B, Mendlovic D, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relationship to chirp and wavelet transform. J Opt Soc Amer A, 1994, 11: 547—559

9 Lohmann A W, Soffer B H. Relationship between the Radon-Wigner and the fractional Fourier transform. J Opt Soc Amer A, 1994, 11: 1798—1801

10 Mustard D A. The fractional Fourier transform and the Wigner distribution. J Aust Math Soc B, 1996, 38: 209—219
11 Pei S C, Ding J J. Relations between fractional operations and time-frequency distributions, and their applications. IEEE Trans Signal Process, 2001, 49: 1638—1655 [DOI]
12 Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Process, 2000, 48: 1329—1337 [DOI]
13 Ozaktas H M, Aytur O. Fractional Fourier domains. Signal Process, 1995, 46: 119—124 [DOI]
14 Kraniauskas P, Cariolaro G, Erseghe T. Method for defining a class of fractional operations. IEEE Trans Signal Process, 1998, 46: 2804—2807 [DOI]
15 Cariolaro G, Erseghe T, Kraniauskas P, et al. A unified framework for the fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Process, 1998, 46: 3206—3219 [DOI]
16 Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1997, 4: 15—17
17 Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1998, 5: 101—103 [DOI]
18 Xia X. On bandlimited signals with fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1996, 3: 72—74 [DOI]
19 Erseghe T, Kraniauskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem. IEEE Trans Signal Process, 1999, 47: 3419—3423 [DOI]
20 Pei S C, Ding J J. Simplified fractional Fourier transforms. J Opt Soc Amer A, 2000, 17: 2355—2367 [DOI]
21 Erden M F, Kutay M A, Ozaktas H M. Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its application to signal restoration. IEEE Trans Signal Process, 1999, 47: 1458—1462 [DOI]
22 Zalevsky Z, Mendlovic K. Fractional Wiener filter. Appl Opt, 1996, 35: 3930—3936
23 Kutay M A, Ozaktas H M, Arikan O, et al. Optimal image restoration with the fractional Fourier transform. J Opt Soc Amer A, 1998, 15: 825—833 [DOI]
24 Erden M F, Ozaktas H M. Synthesis of general linear systems with repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains. J Opt Soc Amer A, 1998, 15: 1647—1657 [DOI]
25 Ozaktas H M, Arikan O, Kutay M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Process, 1996, 44: 2141—2150 [DOI]
26 Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier optics. J Opt Soc Amer A, 1995, 12: 743—751
27 McBride A C, Kerr F H. On Namias' fractional Fourier transforms. IMA J Appl Math, 1987, 39: 159—175 [DOI]
28 Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. Fractional correlation. Appl Opt, 1995, 34: 303—309
29 Candan C, Ozaktas H M. Sampling and series expansion theorems for fractional Fourier and other transforms. Signal Process, 2003, 83: 2455—2457 [DOI]
30 Zayed A I, Garcia A G. New Sampling formulae for the fractional Fourier transform. Signal Process, 1999, 77: 111—114 [DOI]
31 Sharma K K, Joshi S D. Fractional Fourier transform of bandlimited periodic signals and its sampling theorem. Opt Commun, 2005, 256: 272—278 [DOI]
32 Sharma K K, Joshi S D. On scaling properties of fractional Fourier transform and its relation with other transforms. Opt Commun, 2006, 257: 27—38 [DOI]
33 Torres R, Pellat-Finet P, Torres Y. Sampling theorem for fractional bandlimited signals: a self-contained proof. Application to digital holography. IEEE Signal Process Lett, 2006, 13: 676—679 [DOI]
34 张卫强, 陶然. 分数阶 Fourier 域上带通信号的采样定理. 电子学报, 2005, 33(7): 1196—1199
35 Pei S C, Yeh M H, Luo T L. Fractional Fourier series expansion for finite signals and dual extension to discrete-time fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Process, 1999, 47: 2883—2888 [DOI]
36 Barkat B, Yinguo J. A modified fractional Fourier series for the analysis of finite chirp signals & its application. In: IEEE the 7th International Symposium on Signal Processing and Its Application. New York: IEEE Press, 2003, 1.

285—288
37 Alieva T, Barbe A. Fractional Fourier and Radon-Wigner transforms of periodic signals. Signal Process, 1998, 69: 183—189 [DOI]
38 Dickinson B W, Steiglitz K. Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1982, ASSP-30: 25—31 [DOI]
39 Santhanam B, McClellan J H. The DRFT-a rotation in time-frequency space. In: Proc IEEE Int Conf Acoustics Speech Signal Process. New York: IEEE Press, 1995. 921—924
40 Santhanam B, McClellan J H. The discrete rotational Fourier transform. IEEE Trans Signal Process, 1996, 42: 994—998 [DOI]
41 Cariolaro G, Erseghe T, Kraniauskas P, et al. Multiplicity of fractional Fourier transforms and their relationships. IEEE Trans Signal Process, 2000, 48: 227—241 [DOI]
42 Zhao X H, Tao R, Deng B. Practical normalization methods in the digital computation of the fractional Fourier transform. In: Proc IEEE Int Conf Signal Process. New York: IEEE Press, 2004, 1. 105—108
43 Bultheel A, Sulbaran H M. Computation of the fractional Fourier transform. Appl Comput Harmon Anal, 2004, 16: 182—202 [DOI]
44 Deng X G, Li Y P, Fan D Y, et al. A fast algorithm for fractional Fourier transform. Opt Commun, 1997, 138: 270—274 [DOI]
45 Pei S C, Ding J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms. IEEE Trans Signal Process, 2000, 48: 1338—1353 [DOI]
46 McClellan J H, Parks T W. Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform. IEEE Trans Audio Eletroacoustics, 1972, AU-20: 66—74
47 Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Fourier transform. In: Proc IEEE Int Symp Circ Syst, 1996. 536—539
48 Pei S C, Yeh M H. Improved discrete fractional Fourier transform. Opt Lett, 1997, 22: 1047—1049
49 Pei S C, Tseng C C, Yeh M H, et al. Discrete fractional Hartley and Fourier transform. IEEE Trans Circ Syst II, 1998, 45: 665—675 [DOI]
50 Pei S C, Tseng C C. A new discrete fractional Fourier transform based on constrained eigendecomposition of DFT matrix by Largrange multiplier method. In: Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Process. New York: IEEE Press, 1997. 3965—3968
51 Pei S C, Tseng C C, Yeh M H. A new discrete fractional Fourier transform based on constrained eigendecomposition of DFT matrix by Largrange multiplier method. IEEE Trans Circ Syst II, 1999, 46: 1240—1245
52 Pei S C, Yeh M H, Tseng C C. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections. IEEE Trans Signal Process, 1999, 47: 1335—1348 [DOI]
53 Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform. In: Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Process. New York: IEEE Press, 1999. 1713—1716
54 Hanna M T, Seif N P A, Ahmed W A E M. Hermite-Gauss-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the singular value decomposition of its orthogonal projection matrices. IEEE Trans Circ Syst I, 2004, 51: 2245—2254 [DOI]
55 Hanna M T, Seif N P A, Ahmed W A E M. Hermite-Gauss-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the direct utilization of the orthogonal projection matrices on its eigenspaces. IEEE Trans Signal Process, 2006, 54: 2815—2819 [DOI]
56 Pei S C, Hsue W L, Ding J J. Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices. In: Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Process. New York: IEEE Press, 2005. 385—388
57 Pei S C, Hsue W L, Ding J J. Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices. IEEE Trans Signal Process, 2006, 54: 3815—3828 [DOI]
58 Candan C. On higher order approximations for Hermite-Gauss functions and discrete fractional Fourier transforms. IEEE Signal Process Lett, 2007, 14: 699—702 [DOI]
59 Arikan O, Kutay M A, Ozaktas H M, et al. The discrete fractional Fourier transformation. In: Proc IEEE Int Symp Time-Frequency Time-Scale Anal. New York: IEEE Press, 1996. 205—207
60 Richman M S, Parks T W. Understanding discrete rotations. In: Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Proc-

ess. New York: IEEE Press, 1997, 3. 2057—2060
61 Zhu B H, Liu S T, Ran Q W. Optical image encryption based on multifractional Fourier transforms. Opt Lett, 2000, 25(16): 1159—1161 [DOI]
62 Ran Q W, Yeung D S, E. Tsang C C, et al. General multifractional Fourier transform method based on the generalized permutation matrix group. IEEE Trans Signal Process, 2005, 53(1): 83—98 [DOI]
63 Qi L, Tao R, Zhou S Y, et al. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform. Sci China Ser F-Inf Sci, 2004, 47(2): 184—198
64 Tao R, Li B Z, Wang Y. Spectral analysis and reconstruction for periodic nonuniformly sampled signals in fractional Fourier domain. IEEE Trans Signal Process, 2007, 55(7): 3541—3547 [DOI]
65 Tao R, Deng B, Zhang W Q, et al. Sampling and sampling rate conversion of band limited signals in the fractional Fourier transform domain. IEEE Trans Signal Process, 2008, 56(1): 158—171 [DOI]
66 张峰, 陶然. 基于离散时间分数阶 Fourier 变换的多抽样率信号处理. 自然科学进展, 2008, 18(1): 93—101
67 Pei S C, Hsue W L. The multiple-parameter discrete fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 2006, 13: 329—332 [DOI]
68 Pei S C, Yeh M H. A novel method for discrete fractional Fourier transform computation. In: Proc IEEE Int Symp Circ Syst. New York: IEEE Press, 2001. 585—588
69 Yeh M H, Pei S C. A method for the discrete fractional Fourier transform computation. IEEE Trans Signal Process, 2003, 51: 889—891 [DOI]
70 Hanna M T. On the angular decomposition technique computing the discrete fractional Fourier transform. In: Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Process. New York: IEEE Press, 2007. 3988—3991
71 Huang D F, Chen B S. A multi-input-multi-output system approach for the computation of discrete fractional Fourier transform. Signal Process, 2000, 80: 1501—1513 [DOI]
72 Zhu Y Q, Qi L, Yang S Y, et al. Calculation of discrete fractional Fourier transform based on adaptive LMS algorithm. In: Proc IEEE Int Conf Signal Process. New York: IEEE Press, 2006, 1. 16—20
73 Hanna M T. A discrete fractional Fourier transform based on orthonormalized McClellan-Parks eigenvectors. In: Proc IEEE Int Conf Circ Syst. New York: IEEE Press, 2003. 81—84
74 Pei S C, Yeh M H. Two dimensional discrete fractional Fourier transform. Signal Process, 1998, 67: 99—108 [DOI]
75 Narayanan V A, Prabhu K M M. The fractional Fourier transform: theory, implementation and error analysis. Microprocess Microsyst, 2003, 27: 511—521 [DOI]
76 Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hadamard transform. In: Proc IEEE Int Symp Circ Syst. New York: IEEE Press, 1999. 179—182
77 Pei S C, Yeh M H. The discrete fractional cosine and sine transforms. IEEE Trans Signal Process, 2001, 49: 1198—1207 [DOI]
78 Cariolaro G, Erseghe T, Kraniauskas P. The fractional discrete cosine transform. IEEE Trans Signal Process, 2002, 50: 902—911 [DOI]
79 Tseng C C. Eigenvalues and eigenvectors of generalized DFT, generalized DHT, DCT-IV and DST-IV matrices. IEEE Trans Signal Process, 2002, 50: 866—877 [DOI]
80 Pei S C, Ding J J. Generalized eigenvectors and fractionalization of offset DFTs and DCTs. IEEE Trans Signal Process, 2004, 52: 2032—2046 [DOI]
81 Vargas-Rubio J G, Santhanam B. On the multiangle centered discrete fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 2005, 12: 273—276 [DOI]
82 Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hilbert transform. In: Proc IEEE Int Symp Signal Process. New York: IEEE Press, 1998. 506—509
83 Liu Z J, Zhao H F, Liu S T. A discrete fractional random transform. Opt Commun, 2005, 255: 357—365 [DOI]
84 Yeh M H. Angular decompositions for the discrete fractional signal transforms. In: Proc IEEE Int Symp Circ Syst. New York: IEEE Press, 2003. 93—96
85 Yeh M H. Angular decompositions for the discrete fractional signal transforms. Signal Process, 2005, 85: 537—547 [DOI]