



光滑粒子流体动力学(SPH)中摩擦接触的模拟

王建^{①②*}, 吴浩^②, 顾冲时^{①②}, 花卉^②

① 河海大学水资源高效利用与工程安全国家工程研究中心, 南京 210098;

② 河海大学水利水电学院, 南京 210098

* E-mail: wang_jian@hhu.edu.cn

收稿日期: 2013-02-24; 接受日期: 2013-05-17

河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室专项基金(批准号: 20095860120)和中央高校基本科研业务费(批准号: B1020083)资助项目

摘要 光滑粒子流体动力学(SPH)无网格法是岩土体崩塌与流动大变形计算的有力工具, 但是, 如何在 SPH 框架内模拟摩擦接触现象尚无系统方法, 迫切需要开展研究. 提出一种在 SPH 框架内模拟土与刚性或柔性结构摩擦接触的算法, 该算法根据所存在的接触边界, 将计算域分解为若干个子域, 以接触力为桥梁在各子域间建立联系, 最终实现接触问题的整体求解. 在各子域内对土体的运动控制方程进行 SPH 离散时, 修正了 SPH 固有的边界缺陷, 使得位于接触边界附近的 SPH 粒子具有准确的加速度, 保证了接触探测的精度. 然后, 假设允许土体 SPH 粒子局部侵入结构体, 根据允许的残余侵入量, 运用动量原理, 计算沿接触面法向和切向的接触力, 并应用滑移条件对切向力进行修正使其不超过极限摩擦力. 与现有的在 SPH 中处理接触通常采用“粒子-粒子”接触或忽略摩擦滑移的方法相比, 方法具有更高的计算效率和精度, 适用于岩土材料与刚性或可变形结构之间相互作用的模拟. 通过多个算例对此方法的精度和稳定性进行了验证, 计算表明, 基于接触算法的 SPH 计算成果与理论解或有限元解吻合很好, 算法是有效的, 可用于拓展 SPH 的计算能力与应用范围.

关键词

SPH

摩擦接触

侵入

边界缺陷

光滑粒子流体动力学(SPH)是一种拉格朗日无网格法, 最早被用来解决天体物理问题. 此后, 被推广应用到其他领域, 如流体力学、热传导以及有强度材料的力学响应问题^[1, 2]. 最近, 被成功用于岩土力学领域, 以解决大变形与后失稳流动(post-failure flows)问题^[3-10]. 与有限元或离散元等数值方法相比, SPH 由于其拉格朗日和自适应特性, 可以很好地处理大变形和后失稳问题, 避免了有限元计算中的网格过度扭曲可能导致的计算失败, 或离散单元法计算工作量大和参数标定困难等问题, 因此是量化及解释

土体大变形和后失稳机理的有力工具.

然而, SPH 中的积分插值在边界附近通常是不准确的, 这就是本文第 2 节所提到的“边界缺陷”. 在 SPH 的一些早期应用如天体学和宇宙学中, “边界缺陷”通常不重要或者只需要进行简单的处理. 但是, 在流体与固体力学中, 边界缺陷对问题求解影响很大, 因此需要得到妥善的处理. 在大多数 SPH 模拟中, 边界一般通过镜像法、边界力、耦合边界法或正则化修正法来模拟^[11-13]. 对于接触模拟, 则采用基于动量方程的“粒子-粒子接触”或“粒子-结构面接触”, 其

接触力作用于粒子连线方向, 或者沿着接触面的法向^[14-21]. 据我们所知, 所有这些方法只适合于完全光滑或完全粗糙条件, 不能处理摩擦滑移接触.

从检索到的文献来看, SPH 框架下的摩擦接触研究极少, 仅 Gutfraind 和 Savage^[22]曾在 SPH 框架下提出一种处理摩擦接触的算法. 该算法中, 按库伦摩擦边界, 通过墙体对 SPH 粒子施加法向接触力以及与之成比例的切向力. 但该算法需要进一步完善: 1) 当摩擦力没有达到极限摩擦力时, 切向力与法向力成比例的假设不准确; 2) 没有考虑墙体的运动及旋转, 而这在岩土工程中极为常见; 3) SPH 粒子可能会穿透边界; 4) 不能用于可变形的结构边界. 为解决上述问题, 本文提出一种新的算法, 以拓广 SPH 在岩土工程以及其他涉及摩擦接触的领域的应用范围.

1 SPH 基本原理

在 SPH 方法中, 计算域被离散为有限数量的粒子, 这些粒子携带场变量以及材料特性如速度、密度、应力等, 最终, 连续体偏微分方程的求解可转化为粒子的运动方程而求解, 而每个粒子的场变量通过积分插值获得

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (1)$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 为函数或者材料特性; W 为光滑函数; h 为光滑长度, 用于定义光滑函数的影响区域.

光滑函数 W 满足紧支性条件, 即

$$\text{若 } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > kh, \text{ 则 } W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0, \quad (2)$$

其中 k 为常量.

应用紧支性条件, 即(2)式, 那么在整个问题域内的积分就转化为支持域内的积分. 在 SPH 方法中, 光滑函数 W 的选择直接影响到数值算法的精度、效率和稳定性. 本文中采用最常用的三次样条函数形式^[23].

SPH 计算时, 通过对支持域内的离散粒子求和来代替(1)式中的连续积分:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h), \quad (3)$$

其中 $j=1, 2, \dots, N$ 表示在坐标 $\mathbf{x}$ 处的粒子的支持域内的粒子数目, 也称为相邻粒子; m_j 和 ρ_j 分别为粒子 j 的质量和密度(m_j/ρ_j 代表粒子 j 的体积 V_j).

对于函数 $f(\mathbf{x})$ 沿坐标 $\mathbf{x}^\beta$ 的偏导数的近似, 只要在(1)式中用 $\partial f(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}^\beta$ 代替 $f(\mathbf{x})$, 然后利用分部积分和散度定理, 得到:

$$\left\langle \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\beta} \right\rangle = \oint_S f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{n}^\beta dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)}{\partial \mathbf{x}^\beta} d\mathbf{x}', \quad (4)$$

其中 β 表示笛卡尔坐标方向 x, y, z ; $\mathbf{n}^\beta$ 为紧支域表面 S 的单位外法线沿坐标 β 的分量. 顺便指出, 本文中, 希腊字母 α 和 β 用于代表坐标方向, 而字母 i 和 j 用于表示粒子编号.

由于光滑函数 W 是定义在支持域内, 所以, 当支持域位于问题域的内部时, (4)式等号右边的曲面积分为零. 进一步地, 使用求和方法来近似代替连续积分, 则 $f(\mathbf{x})$ 的偏导数可以表示为

$$\left\langle \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\beta} \right\rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h)}{\partial \mathbf{x}_j^\beta}. \quad (5)$$

根据(3)和(5)式, 函数 $f(\mathbf{x})$ 及其偏导数在粒子 i 处的粒子近似式最终可以写成:

$$f(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W_{ij}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}, \quad (7)$$

其中

$$W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h). \quad (8)$$

应指出: (5)式中的负号在(7)式中消失, 这是因为在后者中 $\partial W_{ij}/\partial \mathbf{x}^\beta$ 是对 $\mathbf{x}_i^\beta$ 求导的, 而非对 $\mathbf{x}_j^\beta$.

2 控制方程及边界缺陷修正

对于固体介质来说, 控制方程主要包括连续性方程和动量方程:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha}, \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}^\beta} + \mathbf{b}^\alpha, \quad (10)$$

其中 ρ 为土体密度; $\mathbf{v}$ 为速度; $\sigma^{\alpha\beta}$ 为应力张量; $\mathbf{b}$ 为体力引起的加速度(本文中为重力); d/dt 表示变量对时间的导数.

对于粒子 i , 连续性方程(9)中的速度对空间坐标

的导数的 SPH 近似式为

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^\alpha}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}. \quad (11)$$

实践发现: 用两个相互作用的粒子之间的速度差来计算, 其结果比使用单个相邻粒子的速度来计算更准确, 因此, 可运用常数 1 的导数为 0 的特征来引入速度差. 由(11)式, 常数 1 的导数为 0 可表示为

$$\frac{\partial 1}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = 0. \quad (12)$$

将(12)式乘以速度 $-\mathbf{v}_i^\alpha$, 并与(11)式的右端项相加, 得到:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^\alpha}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j^\alpha - \mathbf{v}_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}. \quad (13)$$

对于(10)式中的粒子加速度 $d\mathbf{v}^\alpha/dt$ 的计算, 可采用相同的处理方法: 在(12)式两边同时乘以 $\sigma_i^{\alpha\beta}/\rho_i$ 或 $-\sigma_i^{\alpha\beta}/\rho_i$, 并与 $\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}$ 的 SPH 粒子近似式相加, 得到:

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\sigma_j^{\alpha\beta} + \sigma_i^{\alpha\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}, \quad (14)$$

或

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\sigma_j^{\alpha\beta} - \sigma_i^{\alpha\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}. \quad (15)$$

(14)式是计算在应力作用下, 粒子 i 的加速度的惯用形式; 而(15)式是由 Randles 和 Libersky^[24]提出的替代公式, 被认为具有更大的准确性和稳定性. 这两个公式都可以应用于有完整支持域的粒子; 但由于边界缺陷的存在, 后者不能用于位于接触边界的粒子, 下面将对此进行详细解释.

当粒子的支持域不完整时, (4)式中的曲面积分不是零, 这种情况下, 若仍然采用(5)或(7)式来计算函数 $f(\mathbf{x})$ 的空间偏导数将带来较大的误差, 这就是所谓的“边界缺陷”.

当粒子 i 与结构物接触时, 如图 1 所示, 粒子 i 的支持域 Ω_i 是不完整的. 因此, 若直接用(7)式来离散(10)式中的 $(\partial \sigma^{\alpha\beta} / \partial \mathbf{x}^\beta)$ 并据此确定由应力引起的粒子运动加速度, 那么由于边界缺陷的存在, 计算结果将是不准确的.

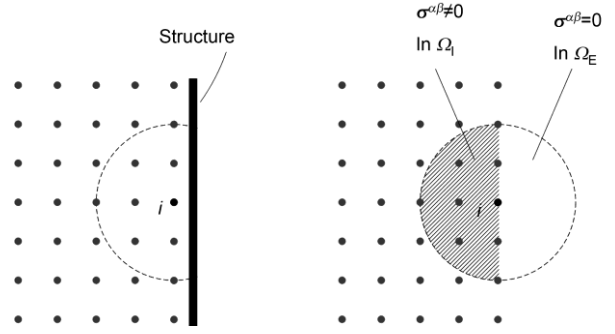


图 1 粒子 i 与结构物接触时的支持域

为了解决边界缺陷问题, 一个最直观的想法就是使粒子 i 得到一个完整支持域并且保持其物理场不变, 这可以在 Ω_i 旁再添加一个外部域 Ω_E 并将 Ω_E 内的应力都设置为零来实现. 利用分部积分、散度定理以及 W 的紧支性特征, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}^\beta} &= \frac{1}{\rho} \oint_S \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{n}^\beta W dS - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_i \cup \Omega_E} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}^\beta} d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{\rho} \int_{\Omega_i \cup \Omega_E} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}^\beta} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 S 为 $\Omega_i \cup \Omega_E$ 的边界. 运用(7)式并注意到粒子 i 在区域 Ω_E 上 $\sigma^{\alpha\beta} = 0$, 则(16)式变成:

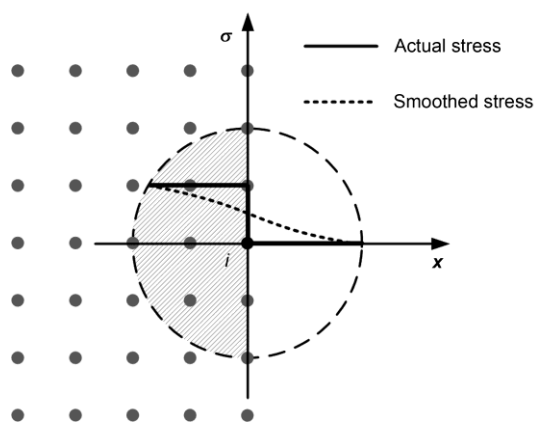
$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \Omega_i} \frac{m_j}{\rho_j} \sigma_j^{\alpha\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}. \quad (17)$$

但是, (17)式严重低估了由应力引起的加速度, 其误差接近 50%. 这是因为在(16)式的推导中运用了分部积分和散度定理, 其隐含的前提是应力 $\sigma^{\alpha\beta}$ 在接触界面附近是光滑连续的, 但实际上我们所设定的应力在接触面位置有一个急剧变化, 因此, SPH 积分插值的平滑作用(如图 2 所示)使得计算出的粒子加速度的只有实际值的一半左右. 这可通过简单的算例来验证, 例如, 二维空间内初始粒子间距为 0.02 的所有粒子有相同的初始应力 $\sigma^{xx} = -1$, 有相同的密度 $\rho_j = 1.0$ 和相同的质量 $m_j = 0.0004$, 用(17)式计算出边界粒子的加速度是 -25.3, 该值大约是按牛顿第二运动定律计算所得结果 ($d\mathbf{v}/dt = \sigma^{xx} \Delta \mathbf{x} / m_i = -50$) 的一半.

为了修正上述缺陷, 可以在(17)式的右端乘以 2, 从而可得

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in \Omega_i} \frac{m_j}{\rho_j} (2\sigma_j^{\alpha\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i^\beta}. \quad (18)$$

进一步地, 假设粒子 i 的支持域足够小, 则接触

图 2 粒子 i 附近的应力分布

界面附近的应力可看作是均匀分布的, 即 $\sigma_j^{\alpha\beta} = \sigma_i^{\alpha\beta}$, 则(18)式可以改写为

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial x_i^\beta} = \sum_{j \in \Omega_1} \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}. \quad (19)$$

可以看出: (19)与(14)式在形式上完全相同, 但这只是一种巧合, 因为它们的起源是完全不同的. 这也是为什么(14)式的替代形式, 即(15)式, 不能用于接触粒子加速度计算的原因, 否则由于边界缺陷, 边界粒子的加速度几乎为 0, 这显然是不正确的.

采用(19)式来代替(18)式, 其优点在于: 无论粒子处于计算域中间, 还是处于接触边界附近, 其动量方程中由应力引起的加速度的计算公式具有相同的形式, 这种统一的形式极大地方便了计算程序的编制和维护.

将(19)式代入粒子运动的动量方程(10)并计入接触力的作用, 最终得到接触边界上粒子 i 的动量方程的 SPH 离散形式为

$$\frac{d\mathbf{v}_i^\alpha}{dt} = \sum_{j \in \Omega_1} \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\mathbf{F}_i^\alpha}{m_i} + \mathbf{b}^\alpha, \quad (20)$$

其中 $\mathbf{F}_i^\alpha$ 是沿着坐标 α 方向的接触力.

应指出的是, 采用(20)式来处理接触问题时, 位于接触边界附近的粒子的支持域仅包括接触界面的单侧范围. 例如, 图 3 中粒子 i 的支持域仅包括 Ω_1 内的粒子, 不包括 Ω_2 内的任何粒子, 反之亦然.

3 接触算法

为了获得(10)式中的加速度 $d\mathbf{v}_i^\alpha/dt$, 需要确定接

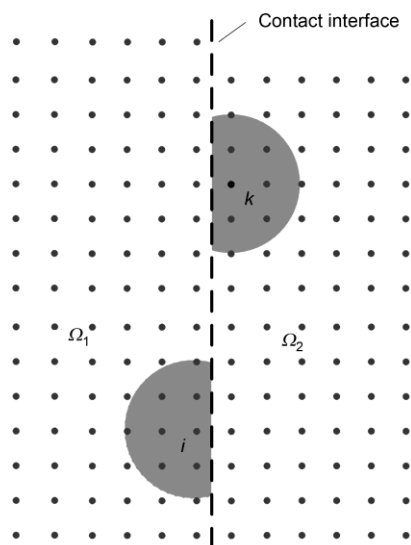


图 3 接触边界附近粒子的有效支持域

触力 $\mathbf{F}_i^\alpha$, 这里给出其算法.

计算接触力时, 为了与粒子的坐标演化(详见本文第 5 节)一致以方便接触探测, 本文中假设接触力仅在两个相邻的整数时间步起作用, 例如, 从 t_n 到 t_{n+1} , 而在 t_{n+1} 到 t_{n+2} 则需重新计算. 图 4 给出了计算接触力 $\mathbf{F}_i$ 及其引起的加速度的总体步骤.

图 4 中, d_0 是接触探测的临界值(当 $d_p < d_0$ 时接触发生), 其取值与结构是否能够发生变形有关: 对于刚性结构, 取粒子初始间距的一半, 即 $d_0 = \Delta x/2$; 对于可变形结构, 取粒子初始间距, 即 $d_0 = \Delta x$, 如图 5 所示. d_p 是粒子到结构表面的最小距离, 根据下式计算:

$$d_p = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{G}$ 为从粒子 i 的坐标指向其在结构表面的垂直投影点 p 的向量, 见图 5; $\mathbf{n}$ 为结构表面在点 p 处的单位外法线向量; 符号 $\cdot$ 表示向量内积.

采用(21)式, 可以保证粒子穿透结构物表面后总能被探测到, 这是因为此时 d_p 为负值, 所以 $d_p < d_0$ 总能满足. 这样, 就保证了所有发生穿透的粒子都能得到有效的处理(重新拉回到接触面), 保证了接触计算的精度.

从图 5 中还可以看出: 对于可变形的结构, 我们使用了“粒子表面”来代替实际表面. 原因解释如下: 对于可变形的结构物, 由于其表面形状随结构的变形也相应地发生改变, 因此难以确定其几何信息. 为了简单起见, 本文采用假想的“粒子表面”, 即根据结

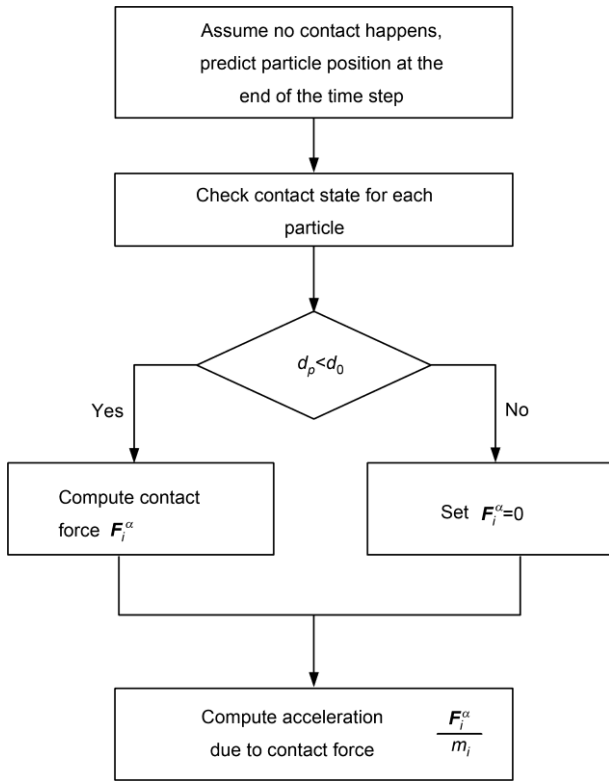


图 4 接触算法的总体流程

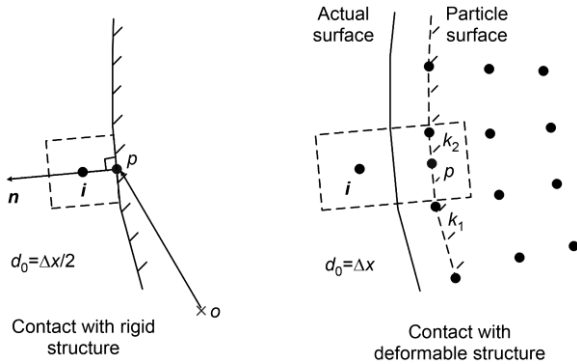


图 5 计算中使用的接触面

构最外层粒子(本算法中,可变形结构在计算时必须也离散为 SPH 粒子,这与刚性结构不同)的连线来代替实际的结构表面。

下面给出确定图 4 中 F_i^α 的详细算法。该算法采用的基本假设是允许粒子局部侵入结构内部,如图 6 所示。使用该假设的目的是模仿柔性材料与结构物碰撞时将发生局部变形的特性,以提高计算稳定性。

该算法中,垂直结构表面的法向接触力 F_n 取决于允许的侵入量,公式如下:

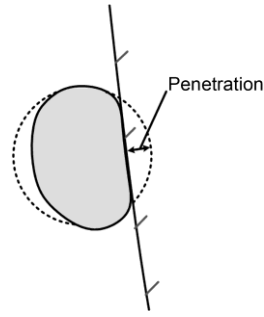


图 6 接触时粒子侵入结构示意

$$F_n = (1 - \zeta) \left[\frac{2m_i}{(\Delta t)^2} (d_0 - d_p) \right] \mathbf{n}, \quad (22)$$

其中 Δt 为时间步长; $\mathbf{n}$ 是结构表面单位外法线向量; d_p 由(21)式计算得到,当 $d_0 - d_p > 0$,表明粒子已经侵入结构内部; $\mathbf{n}$ 为结构表面的单位外法线; ζ 是一个调整因子,它定义了允许的侵入量或残余侵入量, $\zeta=0$ 意味着零侵入。参数 ζ 的使用可以起到模仿材料局部变形特征的作用,从而减低数值模拟中的应力振荡、提高计算稳定性。大量数值测试表明, ζ 在 0.9~0.99 取值可以获得稳定的计算结果。

为了获得 F_τ ,即沿结构表面切线方向的摩擦力,我们首先假设接触是完全粗糙的,即,粒子不会沿接触面滑动,此时, F_τ 可以用下式计算:

$$F_\tau = \frac{2m_i}{(\Delta t)^2} \Delta \mathbf{u}_\tau, \quad (23)$$

其中 $\Delta \mathbf{u}_\tau$ 为粒子 i 与结构表面的相对位置在当前时步内沿结构表面切线方向的改变量,计算公式如下:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{x}_i^{\text{pred}} - \mathbf{x}_i) - \mathbf{v}_p \Delta t, \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{u}_n = \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad (25)$$

$$\Delta \mathbf{u}_\tau = \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_n, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 为粒子 i 在当前时步开始时的坐标; $\mathbf{x}_i^{\text{pred}}$ 为假设不发生接触的情况下,当前时步结束时粒子 i 的预测坐标; $\mathbf{v}_p$ 为结构物在接触点 p 的速度; $\Delta \mathbf{u}$ 为在当前时步内粒子 i 与 p 点的相对位移; $\Delta \mathbf{u}_n$ 和 $\Delta \mathbf{u}_\tau$ 分别为 $\Delta \mathbf{u}$ 沿结构表面法向和切向的分量。

若结构为刚体,则(24)式中的 $\mathbf{v}_p$ 可按式计算:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{\text{tran}} + \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{L}, \quad (27)$$

其中 $\mathbf{v}_{\text{tran}}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别是刚体结构的平移速度和转动速度; $\mathbf{L}$ 为转矢,即刚体转动的参考点 o 到粒子与刚体接触点 p 的矢量,见图 5; 符号 $\otimes$ 表示矢量外积。

若结构是可变形的, 那么 $\mathbf{v}_p$ 可根据接触点 p 附近的相邻粒子的运动速度进行线性插值得到:

$$\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{v}_{k_1} |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{k_2}| + \mathbf{v}_{k_2} |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{k_1}|}{|\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_1}|}, \quad (28)$$

其中 $\mathbf{x}_p$ 为接触点 p 的坐标; k_1 和 k_2 为接触点 p 附近的相邻粒子的编号; $\mathbf{v}_{k_1}$, $\mathbf{x}_{k_1}$ 以及 $\mathbf{v}_{k_2}$, $\mathbf{x}_{k_2}$ 分别为粒子 k_1 和 k_2 的速度和坐标.

在获得接触面完全粗糙(无滑移)时的摩擦力 $\mathbf{F}_\tau$ 以后, 只要对其进行简单的修正, 使其不超过极限摩擦力, 即可适用于摩擦接触(允许滑移)条件, 方法如下:

$$\mathbf{F}'_\tau = \begin{cases} \frac{\mu |\mathbf{F}_n|}{|\mathbf{F}_\tau|} \mathbf{F}_\tau, & |\mathbf{F}_\tau| > \mu |\mathbf{F}_n|, \\ \mathbf{F}_\tau, & \text{其他,} \end{cases} \quad (29)$$

其中 μ 为摩擦系数; $\mathbf{F}'_\tau$ 为摩擦接触条件下的摩擦力.

作用在粒子 i 上的合力等于 $\mathbf{F}_n$ 和 $\mathbf{F}'_\tau$ 的矢量和:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}'_\tau. \quad (30)$$

一旦求出结构对土体粒子 i 的接触力后, 那么, 根据力矩平衡, 可以求出土体对结构粒子 k_1 , k_2 的反作用力:

$$\mathbf{F}_{k_1} = -\frac{|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{k_2}|}{|\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_1}|} \mathbf{F}_i, \quad (31)$$

$$\mathbf{F}_{k_2} = -\frac{|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{k_1}|}{|\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_1}|} \mathbf{F}_i, \quad (32)$$

其中 $\mathbf{F}_{k_1}$ 和 $\mathbf{F}_{k_2}$ 分别为作用在粒子 k_1 , k_2 上的反作用力, 其值将用于计算 k_1 , k_2 的加速度.

作用在结构上的总荷载可通过对所有接触粒子求和得到:

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = -\sum_i^m \mathbf{F}_i, \quad (33)$$

其中 m 为与结构发生接触的所有粒子的数目.

4 本构模型

为了获得(20)式中的加速度 $d\mathbf{v}_i^\alpha/dt$, 还需要采用合适的本构模型来计算土体内的应力 $\sigma_i^{\alpha\beta}$. 本构模型的选用依赖于待求解的问题类型. 本文采用弹塑性 Drucker-Prager 模型^[6]来描述本文第 6 部分的材料

应力应变关系.

对于基于非关联流动法则的 Drucker-Prager 本构模型, 其塑性流动势函数 g 可以表示为

$$g = \sqrt{J_2} + \alpha_2 I_1 - \text{constant}, \quad (34)$$

其中 I_1 和 J_2 分别为应力张量第一不变量和偏应力张量第二不变量; α_2 是一个与剪胀角有关的系数.

屈服准则可以表示为

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha_1 I_1 - k_c = 0, \quad (35)$$

其中 α_1 和 k_c 是常量, 它们与材料的凝聚力 c 和内摩擦角 ϕ 有关. 平面应变条件下, α_1 和 k_c 按下式计算:

$$\alpha_1 = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad k_c = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}. \quad (36)$$

当考虑大变形时, 采用与刚体转动无关的应力率, 粒子 i 的应力应变关系为

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i^{\alpha\beta} = & \sigma_i^{\alpha\gamma} \dot{\omega}_i^{\beta\gamma} + \sigma_i^{\beta\gamma} \dot{\omega}_i^{\alpha\gamma} + 2G_i \dot{\epsilon}_i^{\alpha\beta} + K_i \dot{\epsilon}_i^{\gamma\gamma} \delta^{\alpha\beta} \\ & - \dot{\lambda}_i \left[3K_i \alpha_{2i} \delta^{\alpha\beta} + \frac{G_i}{\sqrt{J_{2i}}} s_i^{\alpha\beta} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

其中 α, β, γ 表示直角坐标方向, 对重复指标按爱因斯坦求和约定; G 是剪切模量; K 是体积弹性模量; δ 是克罗内克符号; $\dot{\epsilon}_i^{\alpha\beta}$ 和 $\dot{\omega}_i^{\alpha\beta}$ 分别为总应变率张量和转动率张量, 根据粒子的运动速度对空间坐标的偏导数的 SPH 插值确定, 参考(13)式; $\dot{\epsilon}^{\alpha\beta}$ 为偏应变率张量; $\dot{s}^{\alpha\beta}$ 是偏应力张量; $\dot{\lambda}$ 是塑性变化率因子, 表达式为

$$\dot{\lambda} = \frac{3\alpha_1 K \dot{\epsilon}^{\gamma\gamma} + (G/\sqrt{J_2}) s^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}^{\alpha\beta}}{9\alpha_1 \alpha_2 K + G}. \quad (38)$$

应说明的是: 若取(34)式中的 α_2 等于(35)式中 α_1 , 上述模型即退化为基于关联流动法则的 Drucker-Prager 模型; 若取(37)式中的 $\dot{\lambda} = 0$, 即为弹性模型. 这些技巧将用于本文第 6 节的数值测试.

5 时间积分

为了求解经 SPH 离散后得到的常微分形式的控制方程, 可采用标准数值算法如跳蛙法(Leap-Frog)、预测-校正法(predictor-corrector)或龙格-库塔(RK)方法来对每个粒子的场变量进行时间积分. 由于跳蛙法对内存要求低、计算效率高, 因此也将采用该法. 该法中, 场变量包括速度($\mathbf{v}$)、密度(ρ)、应力张量($\sigma^{\alpha\beta}$)

和粒子的位置($\mathbf{x}$)可以通过以下式子递推得到:

$$\rho_{n+1/2} = \rho_{n-1/2} + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_n \Delta t, \quad (39)$$

$$\mathbf{v}_{n+1/2}^\alpha = \mathbf{v}_{n-1/2}^\alpha + \left(\frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} \right)_n \Delta t, \quad (40)$$

$$\sigma_{n+1/2}^{\alpha\beta} = \sigma_{n-1/2}^{\alpha\beta} + \left(\frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt} \right)_n \Delta t, \quad (41)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1/2} \Delta t. \quad (42)$$

为了使计算在每个相邻的时间步连续, 在每个时间步的开始, 需要预测每个粒子在半个时间步长处的密度、速度和应力张量, 使其在时间上与 $\mathbf{x}_{n+1}$ 相一致. 例如, 对于速度的预测为

$$\mathbf{v}_{n+1}^\alpha = \mathbf{v}_{n+1/2}^\alpha + \left(\frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} \right)_n \frac{\Delta t}{2}. \quad (43)$$

(39)~(43)式适用于不与结构物接触的内部粒子. 对于位于接触面附近的边界粒子, 在(40)式还需计入接触力的影响:

$$\mathbf{v}_{n+1/2}^\alpha = \mathbf{v}_n^\alpha + \left[\left(\frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} \right)_n + \frac{\mathbf{F}^\alpha}{m} \right] \frac{\Delta t}{2}, \quad (44)$$

其中 $\mathbf{F}^\alpha$ 为粒子所受接触力沿 α 方向的分量; m 为粒子质量 ($\mathbf{F}^\alpha/m$ 为由接触力引起的加速度); 而 $(d\mathbf{v}^\alpha/dt)_n$ 仅代表由应力及体力引起的加速度. 注意(44)式的时间演化与(40)式是不同的, 这是因为接触力仅在 t_n 和 t_{n+1} 存在, 见前文第 3 节所述.

类似的, 对于与结构物接触的粒子, (43)式也需作相应的修正以计入接触力的影响:

$$\mathbf{v}_{n+1}^\alpha = \mathbf{v}_{n+1/2}^\alpha + \left[\left(\frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} \right)_n + \frac{\mathbf{F}^\alpha}{m} \right] \frac{\Delta t}{2}. \quad (45)$$

为保证上述积分方案的稳定性, 时间步长 Δt 不能太大, 需满足 Courant-Friedrichs-Levy 条件, 此条件允许时间步长与光滑长度互成比例. 本文中, 采用下式来确定时步的大小^[10]:

$$\Delta t = C_{\text{cour}} \left(\frac{h}{c} \right), \quad (46)$$

其中 C_{cour} 为 Courant 系数, 本文中取 0.2; h 是光滑长度, 见(1)式; c 为声速, 可根据杨氏弹性模量和密度估计, 即 $c = \sqrt{E/\rho}$.

在每一步计算之后, 检查材料的应力张量是否违背屈服准则, 即材料的应力状态是否超过屈服点

或屈服面. 如果超过, 则通过“返回映射算法”(return mapping algorithm)使其恢复^[6, 25].

6 数值测试与讨论

本部分通过对 3 个平面应变问题算例的数值模拟, 对所提出的接触算法进行验证和测试. 第 1 个为滑块沿斜坡的摩擦滑移计算; 第 2 个为粗糙刚性挡墙的被动土压力计算; 第 3 个为初始地应力下柔性挡墙的变形计算.

在上述算例的数值模拟中, 都使用了人工黏度项^[23], 其参数 α_0 和 β_0 均取 1.0, 以消除不必要的计算振荡, 提高数值稳定性; 同时, 采用返回映射策略, 包括张拉裂缝处理及应力缩放; 另外, 使用“人工力”以避免 SPH 计算时出现张力不稳定性, 其中, 参数 n 取 2.55^[26].

6.1 物体沿斜坡的滑动

本算例测试滑块在重力作用下沿斜坡的滑动. 斜坡的倾角为 30° , 如图 7 所示. 滑块为 $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 的方块, 杨氏弹性模量 $E=1 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu=0.2$, 密度 $\rho=1000 \text{ kg m}^{-3}$, 材料假设为线弹性模型.

SPH 模拟时将滑块离散为 25 个均匀分布的粒子, 每个粒子质量为 40 kg , 斜坡则按刚性结构模拟. 图 8 给出了坡面摩擦系数 $\mu=0.15$ 时, 滑块运动的水平位移与时间的关系. 其相应的理论解可按式计算:

$$u_x = \frac{1}{2} g (\sin \alpha \cos \alpha - \mu \cos^2 \alpha) t^2, \quad (47)$$

其中 t 为时间; α 为坡角, 取 30° ; g 为重力加速度, 取 9.8 m s^{-2} .

可以看出, 当参数 ζ 的取值在 $0 \leq \zeta \leq 0.999$ 时, 按 SPH 计算出的滑块水平位移与理论解都非常接近,

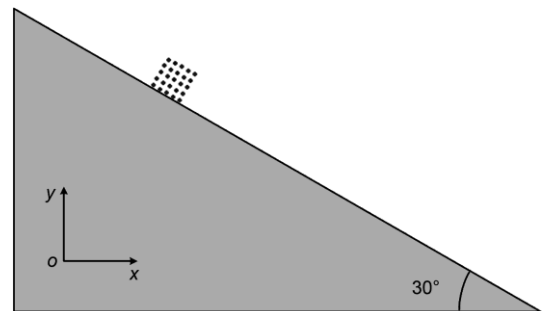


图 7 斜坡及滑块

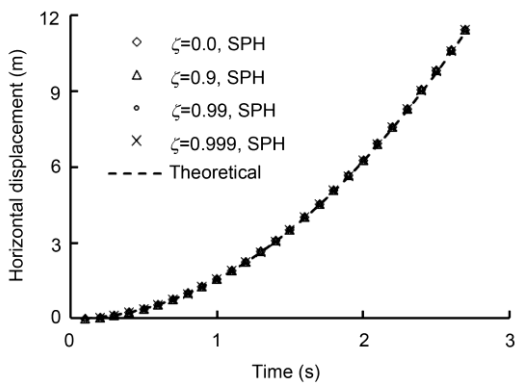


图 8 滑块的水平位移随时间的变化($\mu = 0.15$)

表明本文给出的接触算法是正确的。

6.2 粗糙挡墙的被动土压力

本例通过计算土体对粗糙刚性挡墙的被动土压力来检验接触算法的可靠性。计算时，挡墙视为刚体结构，土体本构模型采用基于关联流动法则的 Drucker-Prager 模型，并将其计算成果与 Sokolovskii 提出的滑移线结果^[27]进行对比。

如图 9 所示，矩形土体长 12.5 m，高 5 m，杨氏弹性模量 $E=100\text{ MPa}$ (采用较高的杨氏模量的目的是尽量接近滑移线法求解所用的刚塑性假设，以便与滑移线法的结果对比)，泊松比 $\nu=0.3$ ，密度 $\rho=1000\text{ kg m}^{-3}$ ，内摩擦角 $\phi=30^\circ$ ，凝聚力 $c=0$ 。直立挡墙缓慢向土体移动，最终达到被动土压力状态。为了减小几何边界的影响以便与滑移线法计算条件接近，挡墙的有效高度取 4 m，低于土体高度。

对于上述问题，基于不同的假设，目前有多个理论解或半理论解。其中，Sokolovskii 给出的滑移线解被认为是其中较为精确的解答之一。根据滑移线解，当土体和挡墙间的摩擦角 $\delta=0$ (完全光滑)时，被动土压力系数 $K_p=3.0$ ；当摩擦角 $\delta=15^\circ$ (粗糙)时，被动土压力系数 $K_p=4.62$ 。根据该系数容易得到作用于挡土墙上的水平分力 F_x 和垂直分力 F_y ，见表 1。

在 SPH 模拟中，土体采用 1000 个均匀分布的粒子模拟，每个粒子质量为 62.5 kg，所有边界均以接触来模拟。为了降低土体内的应力振荡，挡墙的移动速度不是瞬间施加的，而是在 0.5 s 内从 0 线性增加到 0.05 m s^{-1} ，之后保持不变，最终土体将达到被动土压力状态。本算例中，总的计算时间取 2 s。

图 6 和 7 给出了当挡墙的外摩擦角 $\delta=15^\circ$ 、侵入

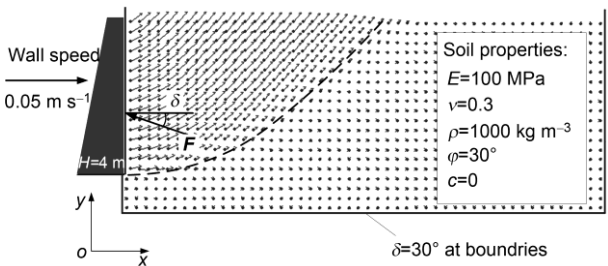


图 9 挡墙及土体特性

表 1 作用于挡墙上的力(土压力)

$\delta(^{\circ})$	Computation method	$F_x\text{ (kN)}$	$F_y\text{ (kN)}$
15	SPH, $\zeta=0.0$ (failed)	—	—
	SPH, $\zeta=0.5$	341.8	91.6
	SPH, $\zeta=0.9$	341.8	91.6
	SPH, $\zeta=0.99$	341.9	91.6
	SPH, $\zeta=0.999$	341.3	91.4
	Slip-line	349.9	93.7
0	SPH, $\zeta=0.0$ (failed)	—	—
	SPH, $\zeta=0.5$	243.3	0.0
	SPH, $\zeta=0.9$	243.2	0.0
	SPH, $\zeta=0.99$	243.2	0.0
	SPH, $\zeta=0.999$	243.0	0.0
	Slip-line	235.2	0.0

量调整因子 ζ 取不同数值时，挡墙所受水平荷载 F_x 及垂直荷载 F_y 的过程线。

从图 10 中可以看到，约在 0.5 s 时刻土体已接近极限状态，在 0.7 s 之后作用在挡土墙上的力(土压力)已相对稳定。因此我们采用 0.7~1.0 s 时的平均作用力来代表 SPH 的结果，如表 1 所列。表 1 中同时还给出了 $\delta=0^\circ$ 即墙体光滑时的计算结果。

从图 10, 11 及表 1 可以看出：对于本文所提出的接触算法，当 $0.5 \leq \zeta \leq 0.9$ 时，土压力的水平分力 F_x 和垂直分力 F_y 都相当接近解析解；最大误差不超

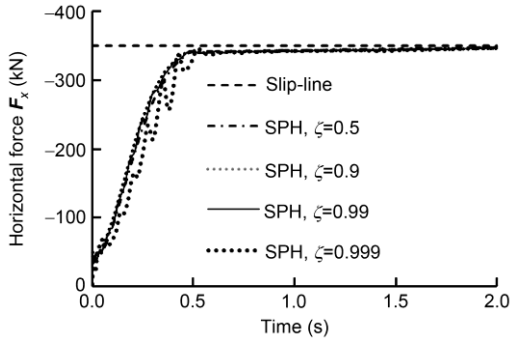
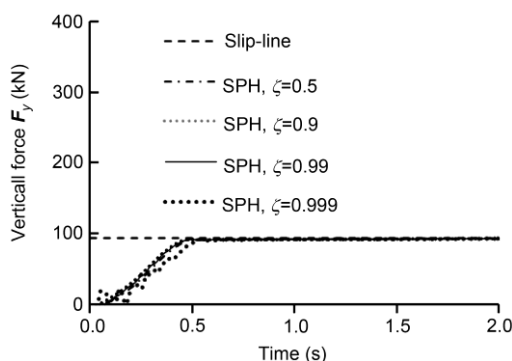


图 10 作用于挡墙的水平力($\delta = 15^\circ$)

图 11 作用于挡墙的竖向力($\delta=15^\circ$)

过 3.1%; 但是, 当 $\zeta=0.999$ 时, 水平分力 F_x 和竖直分力 F_y 在达到被动土压力状态之前均有大幅摆动, 这表明 ζ 过大不能有效处理接触, 可能带来显著的计算误差。

6.3 弹性挡墙在初始地应力下的变形

本例通过计算柔性挡墙在初始地应力下的变形来验证接触算法的正确性。计算时, 挡墙采用线弹性模型; 土体采用基于非关联流动法则(剪胀角取 0)的 Drucker-Prager 模型。其计算成果将与 ABAQUS Explicit 有限元计算成果进行对比。

柔性挡墙结构高 5 m, 厚 1 m, 底部固定, 用于支撑位于其右侧的 8 m×4 m 的矩形土体。为简单起见, 挡墙和土体的部分材料参数取为相同: 杨氏弹性模量 $E=5$ MPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=1000$ kg m⁻³。土体内摩擦角 $\varphi=30^\circ$, 黏聚力 $c=0$ 。竖向初始地应力按 $\sigma_y=\rho gh$ 确定, 水平地应力按 $\sigma_x=\sigma_y\nu/(1-\nu)$ 确定, 地应力在计算时瞬时施加。

SPH 计算时, 共采用 1332 个均匀分布的粒子, 每个粒子质量为 27.78 kg。土体与挡墙间的接触边界根据“粒子表面”确定, 挡墙与土体间的外摩擦角 δ 分别取 0° , 15° 和 30° ; 挡墙底部的固定边界条件用虚粒子模拟; 土体底部和右侧边界则采用刚体接触模拟, 摩擦系数取 0.577, 即等于 $\tan\varphi$ 。图 12 给出了 SPH 和 FEM (ABAQUS Explicit) 计算出的挡墙顶部位移过程线, 图 13 给出了两种方法计算出的最终变形量的匹配程度, 其中 u 表示水平位移。

可以看出, SPH 和 FEM 的位移计算结果吻合很好。值得指出的是, SPH 计算若采用 $\zeta<0.5$, 将会引起粒子混乱导致计算失败, 表明过小的 ζ 容易引起计算不稳定。

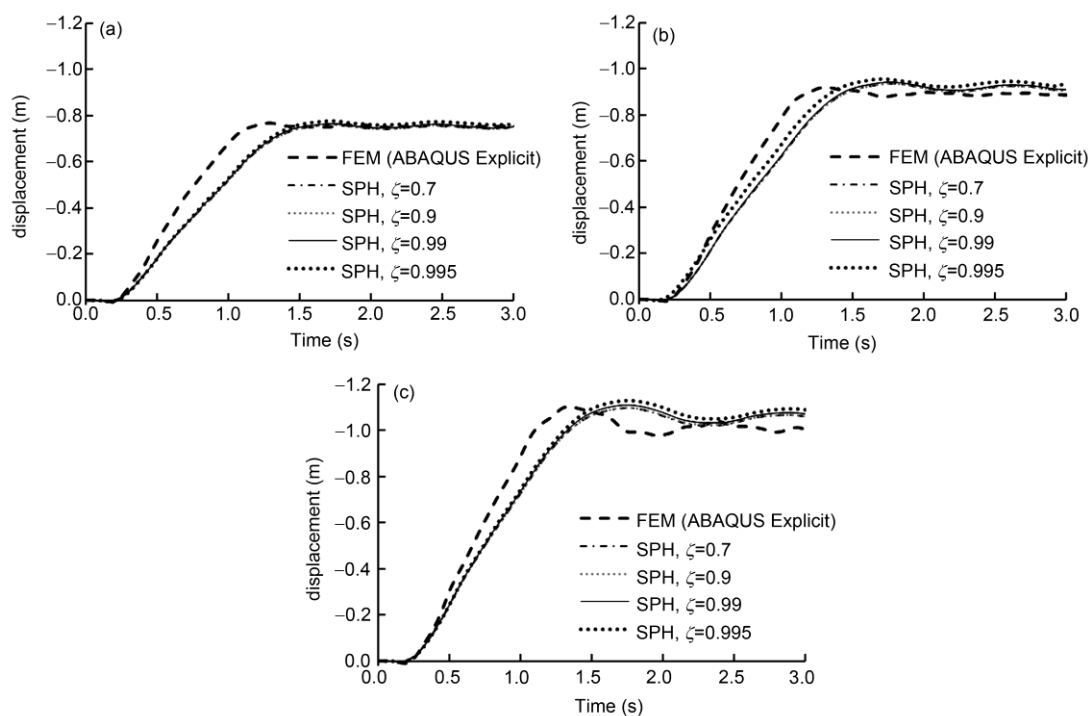


图 12 挡墙顶部位移随时间的变化

(a) $\delta=30^\circ$; (b) $\delta=15^\circ$; (c) $\delta=0^\circ$

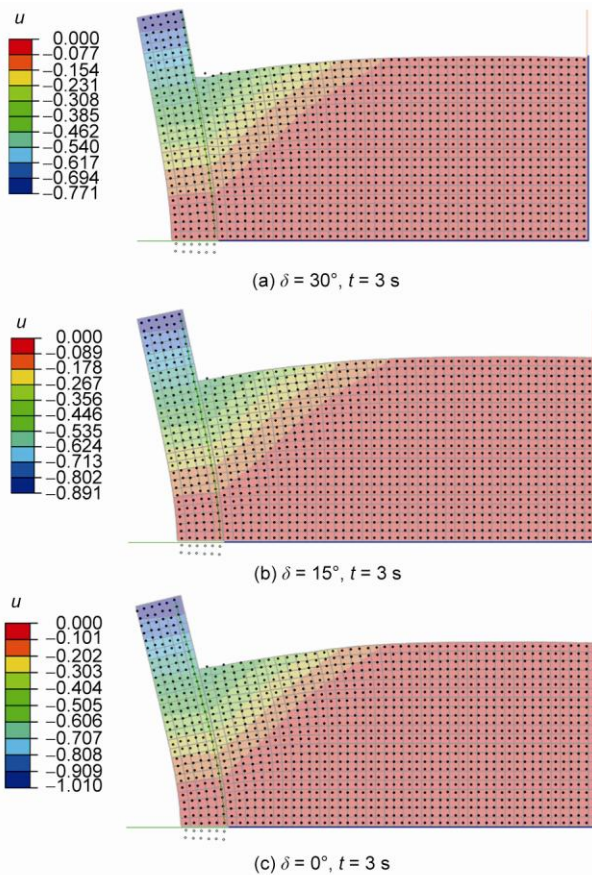


图 13 SPH 与 FEM 的变形计算结果对比

另外, 可以看出随着挡墙与土体间外摩擦角 δ 的增加, 位移结果更加稳定, 这是由于摩擦引起能量耗散, 从而降低了应力和位移的振荡. 同时, 在计算初

期, FEM 与 SPH 计算结果之间有一定的偏离, 这主要是两者分别采用了不同的人工黏度项而引起的.

7 结论

本文介绍了一种在 SPH 框架下模拟土体与刚体或柔性结构之间摩擦滑移接触行为的算法. 该算法基于允许土体粒子部分侵入结构物内部的假定, 以模拟土体与结构碰撞时的局部变形行为, 其优点是它能够以一种简单的方式处理摩擦接触, 提高了算法的效率、准确性和稳定性.

在这种算法中, 边界缺陷问题得到妥善解决, 从而可以在 SPH 离散时准确计算边界粒子的加速度, 这对于接触探测至关重要, 同时也保证了接触计算的准确性. 数值测试表明, 算法的稳定性依赖于参数 ξ , 参数 ξ 的值太大或太小可能会导致数值振荡甚至 SPH 计算的崩溃. 总的来说, ξ 在 0.9~0.99, 可以确保算法的稳定性和精度.

应用该算法来模拟滑块、粗糙挡墙以及弹性挡墙所涉及的摩擦接触行为, 并将计算结果与解析解或有限元解进行了比较, 两者之间吻合很好, 表明本文所提出的接触算法是可靠的, 可用于扩展 SPH 解决实际问题的能力.

为了进一步增强 SPH 在大变形方面的应用, 还必须对本文接触算法进行改进, 以扩展到更一般的情况, 例如, 简单、高效地模拟两种柔性材料之间的摩擦接触行为, 模拟岩土工程中碎石桩的成桩过程等, 这方面的工作有待进一步研究.

参考文献

- 1 Liu G R, Liu M B. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. Singapore : World Scientific, 2004
- 2 Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications. Annu Rev Fluid Mech, 2012, 44: 323–46
- 3 Sakai M, Maeda K. Seepage failure analysis by smoothed particle hydrodynamics method with interactions among solid-liquid-gas phase (in Japanese). In: Proceedings of the 38th Japan National Conference on Geotechnical Engineering. Akita, 2003. 1203–1204
- 4 McDougall S, Hungr O. A model for the analysis of rapid landslide motion across three-dimensional terrain. Canadian Geotech J, 2004, 41: 1084–1097
- 5 Chang Y Z, Bao K, Zhu J, et al. A particle-based method for granular flow simulation. Sci China Info Sci, 2012, 55: 1062–1072
- 6 Bui H H, Fukagawa R, Sako K, et al. Lagrangian mesh-free particle method (SPH) for large deformation and post-failure of geomaterial using elastic-plastic soil constitutive model. Int J Numer Anal Met, 2008, 32: 1537–1573
- 7 黄雨, 郝亮, 谢攀, 等. 土体流动大变形的 SPH 数值模拟. 岩土工程学报, 2009, 21: 1520–1524
- 8 Pastor M, Haddad B, Sorbino G, et al. A depth-integrated, coupled SPH model for flow-like landslides and related phenomena. Int J Numer Anal Met, 2009, 33: 143–172
- 9 Bui H H, Fukagawa R, Sako K, et al. Slope stability analysis and discontinuous slope failure simulation by elasto-plastic smoothed particle hydrodynamics (SPH). Geotechnique, 2011, 61: 565–574
- 10 Bui H H, Ryoichi F. An improved SPH method for saturated soils and its application to investigate the mechanisms of embankment failure: Case of hydrostatic pore-water pressure. Int J Numer Anal Met, 2013, 37: 31–50

- 11 龚凯, 刘桦, 王本龙. SPH 固壁边界处理方法的改进. 力学季刊, 2008, 29: 507–514
- 12 Monaghan J J, Kajtar J B. SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries. Comput Phys Commun, 2009, 180: 1811–1820
- 13 Liu M B, Shao J R, Chang J Z. On the treatment of solid boundary in smoothed particle hydrodynamics. Sci China Tech Sci, 2012, 55: 244–254
- 14 Campbell J, Vignjevic R, Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. Comput Method Appl M, 2000, 184: 49–65
- 15 Kulasegaram S, Binet J, Lewis R W, et al. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications. Comput Mech, 2004, 33:316–325
- 16 Seo S W, Min O. Axisymmetric SPH simulation of elasto-plastic contact in the low velocity impact. Comput Phys Commun, 2006, 175: 583–603
- 17 Feldman J, Bonet J. Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems. Int J Numer M, 2007, 72: 295–324
- 18 Antoci C, Gallati M, Sibilla S, et al. Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH. Comput Struct, 2007, 85: 879–890
- 19 王吉, 王肖均, 卞梁. 光滑粒子法与有限元的耦合算法及其在冲击动力学中的应用. 爆炸与冲击, 2007, 27: 522–528
- 20 肖毅华, 韩旭, 胡德安. 流体与结构相互作用问题的 FE-SPH 耦合模拟. 应用力学学报, 2011, 28: 13–18
- 21 张志春, 强洪夫, 高巍然. SPH-FEM 接触算法在冲击动力学数值计算中的应用. 固体力学学报, 2011, 32: 319–324
- 22 Gutfraind R, Savage S B. Smoothed particle hydrodynamics for the simulation of broken-ice fields: Mohr-Coulomb-type rheology and frictional boundary conditions. J Comput Phys, 1997, 134: 203–215
- 23 Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics. Rep Prog Phys, 2005, 68: 1703–1759
- 24 Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications. Comput Method Appl M, 1996, 139: 375–408
- 25 Chen W F, Mizuno E. Nonlinear Analysis in Soil Mechanics: Theory and Implementation. Amsterdam: Elsevier, 1990
- 26 Gray J P, Monaghan J J, Swift R P. SPH elastic dynamics. Comput Method Appl M, 2001, 190: 6641–6662
- 27 Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1975