中国科学: 信息科学 2011 年 第 41 卷 第 1 期: 66–76
www.scichina.com info.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

格值模态命题逻辑及其完备性

王国俊*, 时慧娴
陕西师范大学数学研究所, 西安 710062
* 通信作者. E-mail: gjwang@snnu.edu.cn

收稿日期: 2010–01–20; 接受日期: 2010–07–20
国家自然科学基金 (批准号: 10771129) 资助项目

摘要 文中以满足第一及第二无限分配律的完备格为工具, 建立了格值模态命题逻辑的语义理论, 并指出这种语义是经典模态命题逻辑语义理论及 [0,1] 值模态命题逻辑语义理论的共同推广. 给出了 $\mathrm{QM}R_0$ 代数的定义, 并分别以 Boole 代数及 $\mathrm{QM}R_0$ 代数为背景构建了 Boole 型格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$ 及 $\mathrm{QM}R_0$ 型格值模态命题逻辑系统 $\mathrm{QM}\mathcal{L}^*$, 并证明了系统 $\mathcal{B}$ 及系统 $\mathrm{QM}\mathcal{L}^*$ 的完备性.

关键词 格值模态命题逻辑 模态模型 $\mathrm{QM}R_0$ 代数 有效公式 完备性

1 引言

模态逻辑是数理逻辑及人工智能研究领域的一个重要方面. 它不仅是程序语义描述的有力工具, 是时态逻辑和动态逻辑的理论基础, 而且在知识表示方面表现出越来越多的优越性. 因而, 模态逻辑自提出以来受到了学者们的广泛关注, 文献 [1–3] 对经典模态命题逻辑及其相关的逻辑系统进行了详细论述. 随着多值逻辑与不确定性推理的长足发展, 许多学者将经典模态命题逻辑进行扩充, 建立了多种模糊模态命题逻辑, 并讨论了它们在其他若干重要领域的应用 (参看文献 [4–8]). 为了将数值计算引入到数理逻辑中使其具有某种灵活性从而扩大其应用范围, 文献 [9–12] 从概念的程度化入手建立了计量逻辑学, 文献 [12] 更是将计量化的思想引入到了经典模态命题逻辑中. 此外, 文献 [13–15] 将经典的 Kripke 语义进行扩充, 建立了 [0,1] 值模态命题逻辑的语义理论, 也体现出了计量化的思想.

值得注意的是, 文献 [4] 虽然证明了若干完备性定理, 但有明显的局限性: 其作者不仅要求 Kripke 模型 (W,e,A) 中的 A 为某种链, 而且为了与仅含一个变元的谓词逻辑相联系, 使模态词 $\Box$, $\Diamond$ 分别与全称量词 $\forall$, 存在量词 $\exists$ 相对应, 其整体框架只适用于模态逻辑 $S5$ 的推广. 本文则放弃了 Kripke 模型为全序模型的要求, 同时不再限制模态逻辑系统的类型, 将经典的模态命题逻辑及 [0,1] 值模态命题逻辑进行统一的推广. 为此, 本文选取满足第一及第二无限分配律的完备格为赋值域, 定义了格值模态模型的概念, 并构建了相应的语义理论. 同时指出, 基本模态模型及 [0,1] 值模态模型都可以纳入到格值模态模型的框架之下, 从而本文定义的格值模态命题逻辑是经典模态命题逻辑及 [0,1] 值模态命题逻辑的推广. 作为格值模态模型的特例, 本文以 Boole 代数为背景, 定义了 Boole 型模态模型的概念, 指出基本模态模型实际上是一种特殊的 Boole 型模态模型, 并构建了相应的 Boole 型格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$. 此外, 本文定义了 $\mathrm{QM}R_0$ 代数的概念, 并以 $\mathrm{QM}R_0$ 代数为赋值域, 定义了另一种

引用格式: 王国俊, 时慧娴. 格值模态命题逻辑及其完备性. 中国科学: 信息科学, 2011, 41: 66–76

特殊的格值模态模型— QMR_0 型模态模型的概念, 并构建了相应的 QMR_0 型格值模态命题逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$. 最后, 证明了上述两种格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$ 与 QM$\mathcal{L}^*$ 都是完备的, 即任一模态公式是系统中的定理当且仅当它是该系统中的有效公式.

2 预备

基本模态逻辑 [1,3](即经典模态命题逻辑) 中模态公式的构成如下:

$$\varphi := p \mid \perp \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \Diamond\varphi, \quad p \in \Phi.$$

其中 Φ 为原子公式集, $\perp$ 表示矛盾式, 并以 $\Box\varphi$ 表示 $\neg\Diamond\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ 表示 $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\varphi \rightarrow \psi$ 表示 $\neg\varphi \vee \psi$. 全体基本模态公式之集记为 Form$(\Diamond, \Phi)$.

定义 1[3] 基本模态逻辑的模型 (简称为基本模型) 是一个三元组 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$, 其中 W 是非空的可能世界之集, $R \subset W \times W$ 是 W 上的二元关系, V 是映射 $V: \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$, 这里 $\mathcal{P}(W)$ 是 W 的幂集.

设 $\varphi \in$Form$(\Diamond, \Phi)$, $w \in W$, 则 w 满足 φ, 记作 $\boldsymbol{M}, w \models \varphi$, 可归纳的定义如下:

(i) $\boldsymbol{M}, w \models p$ 当且仅当 $w \in V(p), p \in \Phi$.

(ii) $\boldsymbol{M}, w \models \perp$ 永远不成立.

(iii) $\boldsymbol{M}, w \models \neg\varphi$ 当且仅当 $\boldsymbol{M}, w \models \varphi$ 不成立.

(iv) $\boldsymbol{M}, w \models \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $\boldsymbol{M}, w \models \varphi$ 或 $\boldsymbol{M}, w \models \psi$.

(v) $\boldsymbol{M}, w \models \Diamond\varphi$ 当且仅当存在 $u \in W, (w, u) \in R$ 使 $\boldsymbol{M}, u \models \varphi$.

定义 2[3] 设 $\varphi \in$Form$(\Diamond, \Phi)$, 如果对每个基本模型 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 及 $\forall w \in W$ 均有 $\boldsymbol{M}, w \models \varphi$, 则称 φ 为有效公式.

命题 1[3] 设 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 是基本模型, 令

$$V(\varphi) = \{w \in W | \boldsymbol{M}, w \models \varphi\}, \quad \varphi \in \text{Form}(\Diamond, \Phi),$$

则

(i) $V(\neg\varphi) = W - V(\varphi)$.

(ii) $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$.

(iii) $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$.

(iv) $V(\varphi \rightarrow \psi) = (W - V(\varphi)) \cup V(\psi)$.

(v) $V(\Diamond\varphi) = \{w \in W | \ R[w] \cap V(\varphi) \neq \emptyset\}$.

这里 $R[w] = \{u \in W | \ (w, u) \in R\}$(下同).

命题 2[3] 设 $\varphi \in$Form$(\Diamond, \Phi)$, 则 φ 是有效公式当且仅当对每个基本模型 $\boldsymbol{M} = (W, R, V)$ 均有 $V(\varphi) = W$.

3 格值模态命题逻辑的语义

本节将上述基本模型进行扩充, 选取满足第一及第二无限分配律的完备格为赋值域, 构建格值模态命题逻辑的模型及其相应的语义理论.

定义 3 格值模态命题逻辑的模型是一个四元组 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$, 其中 W 是非空的可能世界之集 (与定义 1 相同), $L=L(\vee,\wedge,0,1)$ 为一完备格, 且满足第一及第二无限分配律 [9], 即

$$a\wedge(\vee_{i\in I}\ b_i)=\vee_{i\in I}\ (a\wedge b_i), \tag{1}$$

$$a\vee(\wedge_{i\in I}\ b_i)=\wedge_{i\in I}\ (a\vee b_i), \tag{2}$$

其中 $a,b_i\in L\ (i\in I)$. 此外, $'$ 是 L 上的逆序对合对应, $\rightarrow$ 是 L 上的二元运算. $R:W\times W\longrightarrow L$ 是 W 上的 L 值二元关系. 赋值映射 e 是 L 值映射 $e:W\times\varPhi\longrightarrow L$, 其中 $\varPhi$ 为原子公式集. 将 L 称为赋值域, 格值模态命题逻辑的模型简称为格值模态模型.

定义 4 设 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 是格值模态模型, $\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)$ 为全体模态公式之集, 则赋值映射 e 可按如下方式扩张为映射 $\bar{e}:W\times\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)\longrightarrow L$:

$$\begin{aligned}
&\bar{e}(w,\neg\varphi)=\bar{e}(w,\varphi)',\\
&\bar{e}(w,\varphi\vee\psi)=\bar{e}(w,\varphi)\vee\bar{e}(w,\psi),\\
&\bar{e}(w,\varphi\rightarrow\psi)=\bar{e}(w,\varphi)\rightarrow\bar{e}(w,\psi),\\
&\bar{e}(w,\Diamond\varphi)=\vee\{\bar{e}(u,\varphi)|\ R(w,u)\neq 0,u\in W\},
\end{aligned}$$

其中 $w\in W$, $\varphi,\psi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)$. 称 $\bar{e}$ 为赋值映射 e 的扩张映射, $\bar{e}(w,\varphi)$ 称为点 w 关于公式 φ 的赋值.

在不引起混淆的情况下, 我们将 e 与 $\bar{e}$ 不加区别, 均用 e 表示.

命题 3[16] 设 $L=L(\vee,\wedge,0,1)$ 为满足第一及第二无限分配律的完备格, $'$ 是 L 上的逆序对合对应, $Q\subset L$, 则

(i) $0'=1,1'=0$.

(ii) $(\vee_{a\in Q}a)'=\wedge_{a\in Q}a',(\wedge_{a\in Q}a)'=\vee_{a\in Q}a'$.

由命题 3 及定义 4 不难得出:

推论 1 设 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 是格值模态模型, 则

(i) 若 $\Box$ 是与 $\Diamond$ 对偶的模态词, 即满足 $\Box\varphi=\neg\Diamond\neg\varphi\ (\forall\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi))$, 则

$$e(w,\Box\varphi)=\wedge\{e(u,\varphi)|\ R(w,u)\neq 0,u\in W\},\quad w\in W,\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi).$$

(ii) 若公式连接词 $\vee$ 与 $\wedge$ 满足 $\varphi\wedge\psi=\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\ (\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi))$, 则

$$e(w,\varphi\wedge\psi)=e(w,\varphi)\wedge e(w,\psi),\quad w\in W,\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi).$$

例 1 设赋值域 $L=(\{0,1\},\vee,\wedge,')$ 为 $\{0,1\}$-Boole 代数, 则 L 显然为一满足第一及第二无限分配律的完备格, 且其上的二元运算 $\rightarrow$ 定义为

$$a\rightarrow b=a'\vee b,\quad a,b\in L. \tag{3}$$

设 W 是非空集合, $R:W\times W\longrightarrow\{0,1\}$, $e:W\times\varPhi\longrightarrow\{0,1\}$, 则 $\mathcal{M}=(W,R,e,\{0,1\})$ 成为一格值模态模型. 此时我们可以将模型 $\mathcal{M}$ 中的 $\{0,1\}$ 省略, 记为 $\mathcal{M}=(W,R,e)$. 需要说明的是, 此时关系 R 已退化为 W 上的经典二元关系, 即 $R\subset W\times W$, 可见模型 $\mathcal{M}=(W,R,e)$ 中的可能世界之集 W 与二

元关系 R 已与基本模型相同, 唯一的差别在于两个模型中赋值映射的不同, 因为基本模型中的赋值映射为 $V:\Phi\longrightarrow\mathcal{P}(W)$ (详见定义 1).

另一方面, 若 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$ 为一基本模型, 则映射 $V:\Phi\longrightarrow\mathcal{P}(W)$ 可按如下方式诱导出映射 $V^*:W\times\Phi\longrightarrow\{0,1\}$:

$$V^*(w,p)=\begin{cases}1, & w\in V(p),\\ 0, & w\notin V(p).\end{cases}$$

且映射 V 与 V^* 分别按命题 1 与定义 4 中的递归方式进行扩张后, 满足 (详见命题 4 的证明)

$$V^*(w,\varphi)=1 \text{ 当且仅当 } w\in V(\varphi) \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{M},w\models\varphi, w\in W,\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi).$$

可见映射 V 与 V^* 虽然定义方式不同, 但在本质上是一致的, 因此我们将映射 V 与 V^* 等同看待.

此外, 不难看出映射 $V^*:W\times\Phi\longrightarrow\{0,1\}$ 已经具有了格值模态模型中赋值映射的形式. 故在上述格值模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e)$ 中, 不妨取 $e=V^*$, 则由上文分析知映射 e 与 V 一致, 从而格值模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e)$ 即成为一基本模态模型. 可见格值模态命题逻辑的语义是基本模态逻辑语义的推广.

例 2 令赋值域 $L=[0,1]$, $\vee,\wedge$ 分别为关于实值线上通常序的上确界与下确界运算, 则 $L(\vee,\wedge,0,1)$ 成为一满足第一及第二无限分配律的完备格. 令

$$\begin{aligned}&a'=1-a,\\ &a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ (1-a)\vee b, & a>b,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $a,b\in L$, 则 $'$ 为 L 上的逆序对合对应, $\to$ 为 L 上的 R_0 蕴含算子 [9]. 设 W 是非空集合, $R:W\times W\longrightarrow[0,1]$ 为 W 上的二元模糊关系, $e:W\times\Phi\longrightarrow[0,1]$, 则 $\mathcal{M}=(W,R,e,[0,1])$ 成为一格值模态模型.

另一方面, 文献 [13] 以 [0,1] 单位区间为赋值域, 建立了 [0,1] 值模态命题逻辑 (文献 [13] 中称之为模糊模态命题逻辑) 的语义理论, 其模型是一个三元组 $\boldsymbol{k}=(U,R,I)$, 其中 U 是非空的可能世界之集, $R:U\times U\longrightarrow[0,1]$ 是 U 上的二元模糊关系, I 是映射 $I:U\times S\longrightarrow[0,1]$, 这里 S 是原子公式集. 不难看出, 除了记号的差别外, 此模型与上述格值模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,[0,1])$ 实际上是一致的, 可见格值模态命题逻辑的语义也是 [0,1] 值模态命题逻辑语义的推广.

4 Boole 型格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$

4.1 逻辑系统 $\mathcal{B}$ 的语义

Boole 型格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$ 中模态公式的构成与基本模态逻辑中的一致 (参看第 2 节), 并仍用 Φ 表示原子公式集, $\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$ 表示全体模态公式之集.

定义 5 设 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 是格值模态模型, 且赋值域 $L=L(\vee,\wedge,',\to)$ 上的二元运算 $\to$ 按 (3) 式定义, 其中 $'$ 为 L 上的逆序对合对应. 若 L 满足

$$a'\vee a=1,\quad a\in L, \tag{4}$$

则称模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 为 Boole 型格值模态模型, 简称为 Boole 型模态模型.

Boole 型模态模型中的赋值映射 $e: W\times\varPhi\longrightarrow L$ 仍可按定义 4 中的递归方式得到其扩张映射 $\bar{e}: W\times\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)\longrightarrow L$, 并仍将 e 与 $\bar{e}$ 不加区别. 只是这里公式连接词 $\vee$ 与 $\rightarrow$ 不再独立 $(\varphi\rightarrow\psi=\neg\varphi\vee\psi)$, 因此无需递归定义点 w 关于公式 $\varphi\rightarrow\psi$ 的赋值, 且可验证

$$e(w,\varphi\rightarrow\psi)=e(w,\varphi)\rightarrow e(w,\psi)$$

仍成立.

注 1 不难看出, 例 1 中定义的格值模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,\{0,1\})$ 也是一个 Boole 型模态模型, 故由其与基本模态模型的一致性知, 基本模态模型是 Boole 型模态模型. 但反之不真, 因为 Boole 型赋值域实际上是一个 Boole 代数, 从而由 Stone 表示定理 [9] 知, 其同构于某非空集的幂集格的子代数, 但这个子代数当然不必是可能世界集 W 的幂集 $\mathcal{P}(W)$. 可见, 基本模态模型实际上是 Boole 型模态模型的特例.

定义 6 设 $\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)$, 如果对每个 Boole 型模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 及 $\forall w\in W$ 均有 $e(w,\varphi)=1$, 则称 φ 为 Boole 型有效公式.

命题 4 Boole 型有效公式是有效公式.

证明 令公式 ψ 是 Boole 型有效公式. 设 $\boldsymbol{M}=(W,R,V)$ 为任一基本模型, 则可作相应的 Boole 型模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$, 这里 W,R 与模型 $\boldsymbol{M}$ 中的一致, 赋值域 $L=(\{0,1\},\vee,\wedge,',\rightarrow)$ 为例 1 中定义的 $\{0,1\}$-Boole 代数, 且赋值映射 $e: W\times\varPhi\longrightarrow\{0,1\}$ 定义为

$$e(w,p)=\begin{cases}1, & w\in V(p),\\ 0, & w\notin V(p).\end{cases}$$

以下用归纳的方法证明: 若 V 与 e 分别按命题 1 与定义 4 中的递归方式进行扩张后, 满足 $\forall w\in W,\forall\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)$, 均有

$$e(w,\varphi)=1\ \text{ iff }\ w\in V(\varphi). \tag{5}$$

(i) 由映射 e 的定义方式可知, 当 φ 为原子公式 p 时, (5) 式成立.

(ii) 设 (5) 式对公式 φ 成立, 则由命题 3 知, 对公式 $\neg\varphi$, 有 $e(w,\neg\varphi)=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi)'=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi)=0$ 当且仅当 $w\notin V(\varphi)$ 当且仅当 $w\in W-V(\varphi)$ 当且仅当 $w\in V(\neg\varphi)$.

(iii) 设 (5) 式对公式 φ_1,φ_2 成立, 则对公式 $\varphi_1\vee\varphi_2$, 有 $e(w,\varphi_1\vee\varphi_2)=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi_1)\vee e(w,\varphi_2)=1$ 当且仅当 $e(w,\varphi_1)=1$ 或 $e(w,\varphi_2)=1$ 当且仅当 $w\in V(\varphi_1)$ 或 $w\in V(\varphi_2)$ 当且仅当 $w\in V(\varphi_1)\cup V(\varphi_2)$ 当且仅当 $w\in V(\varphi_1\vee\varphi_2)$.

(iv) 设 (5) 式对公式 φ 成立, 则对公式 $\Diamond\varphi$, 有 $e(w,\Diamond\varphi)=1$ 当且仅当 $\vee\{e(u,\varphi)|(w,u)\in R,u\in W\}=1$ 当且仅当存在 $u\in W,(w,u)\in R$ 使得 $e(u,\varphi)=1$ 当且仅当 存在 $u\in W,(w,u)\in R$ 使得 $u\in V(\varphi)$ 当且仅当 $R[w]\cap V(\varphi)\neq\emptyset$ 当且仅当 $w\in V(\Diamond\varphi)$.

综合 (i)–(iv) 可知, (5) 式对 $\mathrm{Form}(\Diamond,\varPhi)$ 中所有公式都成立.

由于 ψ 是 Boole 型有效公式, 则对上述的 Boole 型模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$, 必有 $\forall w\in W$, $e(w,\psi)=1$. 故由 (5) 式知, $\forall w\in W$, 均有 $w\in V(\psi)$, 从而 $V(\psi)=W$. 因此, 由基本模型 $\boldsymbol{M}$ 的任意性及命题 2 知, ψ 是有效公式. 证毕.

4.2　逻辑系统 $\mathcal{B}$ 的语构及完备性

Boole 型格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$ 的公理集及推理规则集如下:

• 公理集:

(B1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(B2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$.

(B3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

• 推理规则集:

MP(Modus Ponens) 规则: 从 φ 和 $\varphi \to \psi$ 得出 ψ.

推广规则: 从 φ 得出 $\Box\varphi$.

命题 5　逻辑系统 $\mathcal{B}$ 中的公理均为 Boole 型有效公式.

证明　设 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 为任一 Boole 型模态模型, 则由命题 3 及 (1)–(4) 式知, $\forall w \in W$, 有

$$\begin{aligned}
e(w,(B1)) &= e(w,\varphi)' \vee (e(w,\psi)' \vee e(w,\varphi)) = (e(w,\varphi)' \vee e(w,\varphi)) \vee e(w,\psi)' = 1,\\
e(w,(B2)) &= (e(w,\varphi)' \vee (e(w,\psi)' \vee e(w,\gamma)))' \vee ((e(w,\varphi)' \vee e(w,\psi))' \vee (e(w,\varphi)' \vee e(w,\gamma)))\\
&= (e(w,\varphi)' \vee e(w,\psi)' \vee e(w,\gamma))' \vee (e(w,\varphi)' \vee e(w,\psi)' \vee e(w,\gamma)) = 1,\\
e(w,(B3)) &= (e(w,\varphi)'' \vee e(w,\psi)')' \vee (e(w,\psi)' \vee e(w,\varphi)) = 1,\\
e(w,(K)) &= [\wedge_{u\in\triangle_w}\ (e(u,\varphi)' \vee e(u,\psi))]' \vee [(\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\varphi))' \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\psi))]\\
&= [\vee_{u\in\triangle_w}\ (e(u,\varphi) \wedge e(u,\psi)')] \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\varphi))' \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\psi))\\
&\geqslant\ \vee_{u\in\triangle_w}\ [(\wedge_{v\in\triangle_w}\ e(v,\varphi)) \wedge e(u,\psi)'] \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\varphi))' \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\psi))\\
&= [(\wedge_{v\in\triangle_w}\ e(v,\varphi)) \wedge (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\psi))'] \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\varphi))' \vee (\wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\psi)) = 1.
\end{aligned}$$

其中 $\triangle_w = \{u \in W |\ R(w,u) \neq 0\}$(下同). 综上可知, $\mathcal{B}$ 中公理均为 Boole 型有效公式. 证毕.

命题 6 ($\mathcal{B}$ 的可靠性)　逻辑系统 $\mathcal{B}$ 中的定理都是 Boole 型有效公式.

证明　首先证明逻辑系统 $\mathcal{B}$ 中的推理规则均保持公式的 Boole 型有效性.

若公式 φ, $\varphi \to \psi$ 为 Boole 型有效公式, 则任一 Boole 型模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 及 $\forall w \in W$, 均有 $e(w,\varphi) = e(w,\varphi \to \psi) = 1$. 故 $e(w,\varphi \to \psi) = e(w,\neg\varphi \vee \psi) = e(w,\varphi)' \vee e(w,\psi) = 1' \vee e(w,\psi) = e(w,\psi) = 1$, 从而由模型 $\mathcal{M}$ 及 w 的任意性知, ψ 为 Boole 型有效公式.

若公式 φ 为 Boole 型有效公式, 则任一 Boole 型模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 及 $\forall w \in W$, 均有 $e(w,\varphi) = 1$. 故当 $\triangle_w$ 非空时, $\forall u \in \triangle_w \subset W$ 均有 $e(u,\varphi) = 1$, 从而 $e(w,\Box\varphi) = \wedge_{u\in\triangle_w}\ e(u,\varphi) = 1$. 若 $\triangle_w = \emptyset$, 则显然有 $e(w,\Box\varphi) = \wedge\emptyset = 1$. 从而由模型 $\mathcal{M}$ 及 w 的任意性知, $\Box\varphi$ 为 Boole 型有效公式.

综上可知, MP 规则与推广规则均保持公式的 Boole 型有效性. 由于 $\mathcal{B}$ 中定理均是从公理出发运用有限次推理规则得到, 故结合命题 5 可得, $\mathcal{B}$ 中定理均为 Boole 型有效公式. 证毕.

定理 1 ($\mathcal{B}$ 的完备性)　逻辑系统 $\mathcal{B}$ 是完备的, 即 $\forall\varphi \in$Form$(\Diamond,\Phi)$, φ 是 $\mathcal{B}$ 中定理当且仅当 φ 是 Boole 型有效公式.

证明　不难看出, 系统 $\mathcal{B}$ 的定理集与基本模态逻辑系统 $\boldsymbol{K}$[3] 的定理集相同. 故由命题 4 及系统 $\boldsymbol{K}$ 的完备性 (参看文献 [3]) 知, Boole 型有效公式均为系统 $\boldsymbol{K}$ 中有效公式, 从而是 $\boldsymbol{K}$ 中定理, 也即是 $\mathcal{B}$ 中定理. 再结合命题 6 即可得到系统 $\mathcal{B}$ 的完备性. 证毕.

5 QMR_0 型格值模态命题逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$

5.1 逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 的语义

QMR_0 型格值模态命题逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中模态公式的构成如下:

$$\varphi := p \mid \perp \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \to \varphi_2 \mid \Diamond\varphi, \quad p \in \Phi.$$

其中 Φ 为原子公式集, $\perp$ 表示矛盾式, 并以 $\Box\varphi$ 表示 $\neg\Diamond\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ 表示 $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. 系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中全体模态公式之集记为 $F(\Phi)$.

注 2 $F(\Phi)$ 与基本模态逻辑的公式集 Form$(\Diamond, \Phi)$ 不同. 在 Form$(\Diamond, \Phi)$ 中, $\varphi \to \psi$ 与 $\neg\varphi \vee \psi$ 是相同的公式, 但在 $F(\Phi)$ 中, 二者是不同的公式.

定义 7 设 $L = L(\vee, \wedge, \leqslant, 0, 1)$ 为一有界分配格, $'$ 为 L 上的逆序对合对应, $\Box$ 与 $\to$ 分别为 L 上的一元与二元运算. 若 $\forall a, b, c \in L$ 满足

(i) $a' \to b' = b \to a$.

(ii) $1 \to a = a, \quad a \to a = 1$.

(iii) $b \to c \leqslant (a \to b) \to (a \to c)$.

(iv) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

(v) $a \to b \vee c = (a \to b) \vee (a \to c), \quad a \to b \wedge c = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

(vi) $\Box(a \to b) \leqslant \Box a \to \Box b$.

则称 $L = L(\vee, \wedge, {}', \to, \Box)$ 为 QMR_0 代数.

注 3 QMR_0 代数实际上是去掉 R_0 代数 [9] 定义中的最后一个条件 (详见文献 [9]), 并增加了与模态词相关的一元运算 $\Box$ 得到的代数, 因此我们称其为准模态 R_0 代数, 简记为 QMR_0 代数.

事实上, 许多代数结构都满足定义 7 中的条件 (i)–(v), 例如我们所熟知的 MV 代数与 R_0 代数, 因此只需在其上定义一元运算 $\Box$ 满足条件 (vi), 即可使其成为 QMR_0 代数.

命题 7 设 $L = L(\vee, \wedge, {}', \to, \Box)$ 为 QMR_0 代数, 则 $\forall a, b, c \in L$, 以下性质成立:

(i) $a' = a \to 0$.

(ii) $a \to b = 1$ 当且仅当 $a \leqslant b$.

(iii) $a \to (b \to a \wedge b) = 1$.

(iv) 若 $b \leqslant c$, 则 $a \to b \leqslant a \to c$; 若 $a \leqslant b$, 则 $b \to c \leqslant a \to c$.

(v) $a \vee b \to c = (a \to c) \wedge (b \to c), a \wedge b \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$.

定义 8 设 $\mathcal{M}= (W, R, e, L)$ 为一格值模态模型, 其中赋值域 $L = L(\vee, \wedge, {}', \to, \Box)$ 是 QMR_0 代数, 则称模型 $\mathcal{M}$ 为 QMR_0 型格值模态模型, 简称为 QMR_0 型模态模型.

QMR_0 型模态模型中的赋值映射 $e : W \times \Phi \longrightarrow L$ 仍可按定义 4 中的递归方式得到其扩张映射 $\bar{e} : W\times$ F$(\Phi)\longrightarrow L$, 并仍将 e 与 $\bar{e}$ 不加区别, 均用 e 表示.

定义 9 设 $\varphi \in F(\Phi)$, 如果对每个 QMR_0 型模态模型 $\mathcal{M}= (W, R, e, L)$ 及 $\forall w \in W$ 均有 $e(w, \varphi) = 1$, 则称 φ 为 QMR_0 型有效公式.

5.2 逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 的语构

QMR_0 型格值模态命题逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 的公理集及推理规则集如下:

- 公理集:

(Q1) $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.

(Q2) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

(Q3) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\psi \to (\varphi \to \gamma))$.

(Q4) $(\psi \to \gamma) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$.

(Q5) $\varphi \to \neg\neg\varphi$.

(Q6) $\varphi \to \varphi \vee \psi$.

(Q7) $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$.

(Q8) $(\varphi \to \gamma) \wedge (\psi \to \gamma) \to (\varphi \vee \psi \to \gamma)$.

(Q9) $(\varphi \wedge \psi \to \gamma) \to (\varphi \to \gamma) \vee (\psi \to \gamma)$.

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

• 推理规则集:

MP 规则: 从 φ 和 $\varphi \to \psi$ 得出 ψ.

推广规则: 从 φ 得出 $\Box\varphi$.

注 4 不难看出, 系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的公理 (Q1)–(Q9) 实际上分别是逻辑系统 $\mathcal{L}^*$[9] 中公理 ($\mathcal{L}^*$1)–($\mathcal{L}^*$9) 的代换实例 [3]. 故在不含模态词的情形下, (Q1)–(Q9) 即成为系统 $\mathcal{L}^*$ 中的定理. 但 $\mathcal{L}^*$ 中的公理 ($\mathcal{L}^*$10) 却不必为系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的定理. 因此, 我们称上述 QMR_0 型格值模态命题逻辑系统为准模态 $\mathcal{L}^*$ 系统, 简记为 QM$\mathcal{L}^*$.

此外, 文献 [3] 中指出, 基本模态逻辑系统 $\boldsymbol{K}$ 的公理集包括公式 (K) 及经典二值命题逻辑系统 $\boldsymbol{L}$[9] 中定理的代换实例, 即模态重言式 (详见文献 [3]). 可以验证, 系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的公理 (Q1)–(Q9) 均为 $\boldsymbol{K}$ 中的模态重言式, 从而均是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理. 但 $\boldsymbol{K}$ 中定理 $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$, 即系统 $\boldsymbol{L}$ 中公理 (L2)[9] 的代换实例, 却不必为系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的定理.

实际上, 可以证明公式 $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$ 不是 QMR_0 型有效公式. 为此, 可构造一个 QMR_0 型模态模型, 其赋值域 L 为 MV 代数 [0,1], 并在 L 上定义运算 $\Box$ 满足 $\Box a = a$ 若 $a > 1/2$, 否则 $\Box a = 0$, 则 $L(\vee, \wedge, ', \to, \Box)$ 为一 QMR_0 代数. 可证公式 $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$ 关于此赋值域并不是 QMR_0 型有效公式.

命题 8 在系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中,

(i) HS(hypothetical syllogism) 规则成立, 即由 $\varphi \to \psi$ 和 $\psi \to \gamma$ 得出 $\varphi \to \gamma$.

(ii) 公式 $\varphi \to \varphi$, $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ 均为定理.

(iii) 若公式 φ, ψ 是定理, 则 $\varphi \wedge \psi$ 也是定理.

(iv) 若公式 $\varphi \to \psi, \gamma \to \chi$ 是定理, 则 $\varphi \vee \gamma \to \psi \vee \chi$ 也是定理; 若公式 $\varphi \to \gamma, \psi \to \gamma$ 是定理, 则 $\varphi \vee \psi \to \gamma$ 也是定理.

命题 9 (QM$\mathcal{L}^*$ 的可靠性) 逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的定理都是 QMR_0 型有效公式.

证明 在逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中, 若公式 $\varphi, \varphi \to \psi$ 为 QMR_0 型有效公式, 则任一 QMR_0 型模态模型 $\mathcal{M} = (W, R, e, L)$ 及 $\forall w \in W$, 均有 $e(w, \varphi) = e(w, \varphi \to \psi) = 1$. 故 $e(w, \varphi \to \psi) = e(w, \varphi) \to e(w, \psi) = 1$, 从而由命题 7(ii) 知, $1 = e(w, \varphi) \leqslant e(w, \psi)$, 即 $e(w, \psi) = 1$. 由模型 $\mathcal{M}$ 及 w 的任意性知, ψ 为 QMR_0 型有效公式, 因此 MP 规则保持公式的 QMR_0 型有效性. 又, 类似于命题 6, 可证推广规则也保持公式的 QMR_0 型有效性, 从而逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的推理规则均保持公式的 QMR_0 型有效性.

此外, 由定义 7 及命题 7 易证, 系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中的公理均为 QMR_0 型有效公式. 由于 QM$\mathcal{L}^*$ 中定理均是从公理出发运用有限次推理规则得到, 故 QM$\mathcal{L}^*$ 中定理均为 QMR_0 型有效公式. 证毕.

5.3 逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 的完备性

在系统 QM$\mathcal{L}^*$ 中, 可按通常方式定义公式集 $F(\varPhi)$ 上的可证等价关系 $\sim$, 即 $\varphi \sim \psi$ 当且仅当 $\varphi \to \psi$ 及 $\psi \to \varphi$ 均为 QM$\mathcal{L}^*$ 中定理.

命题 10 可证等价关系 $\sim$ 是 $F(\varPhi)$ 上的 $(\neg, \vee, \to, \Box)$ 型同余关系 [17].

证明 首先由命题 8(i)(ii) 易证, $\sim$ 是 $F(\varPhi)$ 上的等价关系. 下证 $\sim$ 还是 $F(\varPhi)$ 上的 $(\neg, \vee, \to, \Box)$ 型同余关系:

(i) 若 $\varphi \sim \psi$, 则 $\varphi \to \psi$ 是定理, 故由命题 8(ii) 及 MP 规则知 $\neg\psi \to \neg\varphi$ 是定理. 同理可证 $\neg\varphi \to \neg\psi$ 也是定理, 故 $\neg\varphi \sim \neg\psi$.

(ii) 若 $\varphi \sim \psi, \gamma \sim \chi$, 则 $\varphi \to \psi, \gamma \to \chi$ 是定理, 从而由命题 8(iv) 知 $\varphi \vee \gamma \to \psi \vee \chi$ 是定理. 同理 $\psi \vee \chi \to \varphi \vee \gamma$ 也是定理, 故 $\varphi \vee \gamma \sim \psi \vee \chi$.

(iii) 若 $\varphi \sim \psi, \gamma \sim \chi$, 则 $\gamma \to \chi$ 是定理, 由 (Q4) 及 MP 规则知 $(\varphi \to \gamma) \to (\varphi \to \chi)$ 是定理. 同理, 由 $\psi \to \varphi$ 是定理知 $\neg\varphi \to \neg\psi$ 是定理, 从而 $(\neg\chi \to \neg\varphi) \to (\neg\chi \to \neg\psi)$ 也是定理. 再由 (Q2) 及命题 8(ii), 运用两次 HS 规则即得 $(\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi)$ 是定理. 综上, 运用 HS 规则即得 $(\varphi \to \gamma) \to (\psi \to \chi)$ 是定理. 同理可证, $(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \gamma)$ 也是定理, 从而 $\varphi \to \gamma \sim \psi \to \chi$.

(iv) 若 $\varphi \sim \psi$, 则 $\varphi \to \psi$ 是定理, 故由推广规则知 $\Box(\varphi \to \psi)$ 是定理, 从而由 (K) 及 MP 规则得 $\Box\varphi \to \Box\psi$ 是定理. 同理可证 $\Box\psi \to \Box\varphi$ 也是定理, 故 $\Box\varphi \sim \Box\psi$. 证毕.

由于可证等价关系 $\sim$ 是 $F(\varPhi)$ 上的 $(\neg, \vee, \to, \Box)$ 型同余关系, 故 $F(\varPhi)$ 关于 $\sim$ 的商代数 $F(\varPhi)/\sim$, 记作 $\mathcal{F}$, 是 $(\neg, \vee, \to, \Box)$ 型代数. 将 $\mathcal{F}$ 中的元用 $[\varphi]$ $(\varphi \in F(\Phi))$ 表示, 这里 $[\varphi] = \{\psi \in F(\varPhi) | \varphi \sim \psi\}$.

命题 11 商代数 $\mathcal{F} = \mathrm{F}(\varPhi)/\sim$ 是 QMR_0 代数, 其中的偏序关系 $\leqslant$ 由

$$[\varphi] \leqslant [\psi] \text{ 当且仅当 } \varphi \to \psi \text{ 是定理}$$

确定, 且 $\mathcal{F}$ 上的 $\neg, \vee, \to, \Box$ 运算如下定义:

$$\neg[\varphi] = [\neg\varphi], \quad [\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi], \quad [\varphi] \to [\psi] = [\varphi \to \psi], \quad \Box[\varphi] = [\Box\varphi]. \tag{6}$$

证明 易证上述 $\leqslant$ 的定义合理且的确为 $\mathcal{F}$ 上的偏序. 由于可证等价关系 $\sim$ 是 $F(\varPhi)$ 上的 $(\neg, \vee, \to, \Box)$ 型同余关系, 从而 (6) 式中关于 $\mathcal{F}$ 上的 $\neg, \to, \Box$ 运算的定义合理, 且易证 $\neg$ 为 $\mathcal{F}$ 上的逆序对合对应.

又, 由 $\varphi \to \varphi \vee \psi$ 及 $\psi \to \varphi \vee \psi$ 是定理知 $[\varphi \vee \psi]$ 是 $\{[\varphi], [\psi]\}$ 关于 $\leqslant$ 的上界. 设 $[\gamma]$ 是 $\{[\varphi], [\psi]\}$ 的任一上界, 则 $\varphi \to \gamma, \psi \to \gamma$ 是定理, 故由命题 8(iv) 知, $\varphi \vee \psi \to \gamma$ 是定理, 从而 $[\varphi \vee \psi] \leqslant [\gamma]$, 可见 $[\varphi \vee \psi]$ 是 $\{[\varphi], [\psi]\}$ 关于 $\leqslant$ 的上确界, 从而 $\mathcal{F}$ 上的 $\vee$ 运算的定义也合理.

设 $\top$ 是 $F(\varPhi)$ 中的定理 (下同), 则可证对每个公式 $\varphi \in F(\varPhi)$, 均有 $\varphi \to \top$ 是定理, 故 $[\varphi] \leqslant [\top]$, 从而 $[\top]$ 是 $\mathcal{F}$ 中的最大元, 即 1. 类似可证, $[\bot]$ 是 $\mathcal{F}$ 中的最小元, 即 0.

最后, 由命题 8 不难证明商代数 $\mathcal{F}$ 满足定义 7 中的条件 (i)–(vi), 从而是一个 QMR_0 代数. 证毕.

定理 2 (QM$\mathcal{L}^*$ 的完备性) 逻辑系统 QM$\mathcal{L}^*$ 是完备的, 即 $\forall\varphi \in \mathrm{F}(\varPhi)$, φ 是 QM$\mathcal{L}^*$ 中定理当且仅当 φ 是 QMR_0 型有效公式.

证明 由命题 9 知只需证 QMR_0 型有效公式均为 QM$\mathcal{L}^*$ 中定理.

设 φ 是 QMR_0 型有效公式. 做 QMR_0 型模态模型 $\mathcal{M}= (W, R, e, L)$ 如下:

令 W 是非空集, 赋值域 $L=\mathcal{F}$ 为 $F(\Phi)$ 关于 $\sim$ 的商代数, $R: W\times W\longrightarrow\mathcal{F}$ 为 W 上的 $\mathcal{F}$ 值二元关系, 赋值映射 $e: W\times\Phi\longrightarrow\mathcal{F}$ 满足

$$e(w,p)=[p],\quad p\in\Phi, w\in W.$$

则可由 (6) 式归纳证明, 赋值映射 e 按定义 4 进行扩充后, 满足

$$e(w,\psi)=[\psi],\quad \psi\in F(\Phi), w\in W.$$

由于 φ 是 $\mathrm{QM}R_0$ 型有效公式, 故对上述 $\mathrm{QM}R_0$ 型模态模型 $\mathcal{M}=(W,R,e,L)$ 及 $\forall w\in W$, 均有 $e(w,\varphi)=[\varphi]=1=[\top]$, 从而 φ 是 $\mathrm{QM}\mathcal{L}^*$ 中定理. 证毕.

6　结束语

本文首先以满足第一及第二无限分配律的完备格为赋值域, 定义了格值模态模型的概念, 并构建了相应的语义理论, 从而将经典模态命题逻辑及 [0,1] 值模态命题逻辑的语义理论进行了统一推广. 其次, 以 Boole 代数为背景, 定义了 Boole 型模态模型的概念, 并构建了相应的 Boole 型格值模态命题逻辑系统 $\mathcal{B}$, 证明了系统 $\mathcal{B}$ 的完备性. 最后, 定义了 $\mathrm{QM}R_0$ 代数的概念, 并以 $\mathrm{QM}R_0$ 代数为赋值域, 定义了 $\mathrm{QM}R_0$ 型模态模型的概念, 并构建了相应的 $\mathrm{QM}R_0$ 型格值模态命题逻辑系统 $\mathrm{QM}\mathcal{L}^*$, 证明了系统 $\mathrm{QM}\mathcal{L}^*$ 的完备性. 需要说明的是, 除本文所提及外, 满足第一及第二无限分配律的完备格还具有其他若干良好的性质 [18], 可以将这些性质进行抽象化处理, 并类似于系统 $\mathcal{B}$ 与系统 $\mathrm{QM}\mathcal{L}^*$ 建立其他的格值模态命题逻辑系统. 我们将于另文中构建这些系统并讨论他们的完备性及相互关系.

参考文献

1 Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. Modal Logic. New York: Cambridge University Press, 2001. 1–37
2 Cresswell M J, Hughes G E. A New Introduction to Modal Logic. London: Routledge, 1996. 19–39
3 Wang G J. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning (in Chinese). 2nd ed. Beijing: Science Press, 2008. 224–251
4 Hájek P. On fuzzy modal logics $S5(\mathcal{C})$. Fuzzy Set Syst, 2010, 161: 2389–2396
5 Mironov A M. Fuzzy modal logics. J Math Sci, 2005, 128: 3461–3483
6 Ying M S. On standard models of fuzzy modal logics. Fuzzy Set Syst, 1988, 26: 357–363
7 Huynh V N, Nakamori Y, Ho T B, et al. A context model for fuzzy concept analysis based upon modal logic. Inf Sci, 2004, 160: 111–129
8 Zhang Z Y, Sui Y F, Cao C G, et al. A formal fuzzy reasoning system and reasoning mechanism based on propositional modal logic. Theoret Comput Sci, 2006, 368: 149–160
9 Wang G J, Zhou H J. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. Beijing: Science Press, 2009. 257–323
10 Wang G J. A universal theory of measure and integral on valuation spaces with respect to diverse implication operators. Sci China Ser E-Tech Sci, 2000, 43: 586–594
11 Wang G J, Zhou H J. Quantitative logic. Inf Sci, 2009, 179: 226–247
12 Wang G J, Duan Q L. Theory of (n) truth degrees of formulas in modal logic and a consistency theorem. Sci China Ser F-Inf Sci, 2009, 52: 70–83
13 Chen T Y, Wang D G. The semantics of fuzzy modal propositional logic (in Chinese). J Liaoning Norm Univ (Nat Sci Ed), 2003, 26: 341–343

14 Wang D G, Gu Y D, Li H X. Generalized tautology in fuzzy modal propositional logic (in Chinese). Acta Electr Sin, 2003, 35: 261–264
15 Hu M D, Wang G J. Tautologies and quasi-tautologies in fuzzy modal logic (in Chinese). Acta Electr Sin, 2009, 37: 2484–2488
16 Wang G J. The Theory of Topological Molecular Lattices (in Chinese). Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 1990. 5–7
17 Davey B A, Priestley H A. Introduction to Lattices and Order. New York: Cambridge University Press, 1990. 114–123
18 Erné M. Infinite distributive laws versus local connectedness and compactness properties. Top Appl, 2009, 156: 2054–2069

Lattice-valued modal propositional logic and its completeness

WANG GuoJun* & SHI HuiXian

Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062*, China*
*E-mail: gjwang@snnu.edu.cn

Abstract Based on the concept of the complete lattice satisfying the first and second infinite distributive laws, the present paper introduces the semantics of the lattice-valued modal propositional logic. It is pointed out that this semantics generalizes the semantics of both classical modal propositional logic and $[0, 1]$-valued modal propositional logic. The definition of the QMR_0-algebra is proposed, and both the Boole-typed lattice-valued modal propositional logic system $\mathcal{B}$ and the QMR_0-typed lattice-valued modal propositional logic system QM$\mathcal{L}^*$ are constructed by use of Boole-algebras and QMR_0-algebras, respectively. The main results of the paper are the completeness theorems of both the system $\mathcal{B}$ and QM$\mathcal{L}^*$.

Keywords latticed-valued modal propositional logic, modal model, QMR_0-algebra, validity, completeness