论文

低磁雷诺数不可压缩磁流体湍流的非线性涡黏性 $k-\omega$ 封闭模型

陈智*, 李椿萱, 张劲柏

北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

*E-mail: chenzhi110@gmail.com

收稿日期: 2011-01-21; 接受日期: 2011-03-17; 网络出版日期: 2011-07-05

国家自然科学基金资助项目(批准号: 10272105, 10602006)

摘要 在低磁雷诺数近似下, 通过逐项模化湍动能输运方程的磁流体源项, 提出一个适于任意的磁场布置形式的非线性涡黏性的磁流体湍流 $k-\omega$ 模型. 在该模型中, 使用 Kenjeres-Hanjalic 模型和 Song 的非线性涡黏性模型分别模化脉动电场-速度相关量及各向异性的雷诺正应力, 并采用 Wilcox 低雷诺数 $k-\omega$ 模型对层流化进行估计. 通过与直接数值模拟结果和实验结果比较, 表明本文模型给出的速度型误差小于 5%, 摩擦阻力系数误差小于 10%, 能够满足工程需要.

关键词 不可压缩流动, 磁流体力学, 湍流模型

PACS: 47.65.-d, 47.27.em, 47.27.nd

磁流体湍流模型研究始于 20 世纪 60 年代. 具有代表性的有 Lykoudis 和 Brouillette^[1]提出的基于混合长度理论的低速模型, 该模型通过两个衰减函数计入磁场对涡黏性系数的影响. 此后的半个世纪中主要的工作集中在液态金属磁流体湍流的研究上. Ji 和 Gardner^[2]提出适用于磁场沿壁面法向布置时的 $k-\varepsilon$ 湍流模型, 并应用该模型研究了磁场作用下液态金属的管道流动特性. 但该模型使用流动的全局无量纲参数而非当地无量纲量来表征磁场对湍流场的作用, 因此不适用于非均匀磁场作用下的流动. Kenjeres 和 Hanjalic^[3]以当地无量纲量替代流动的全局无量纲参数对该模型进行了改进, 但其改进模型仍仅适用于处理磁场沿壁面法向布置的流动. Dietiker^[4]提出了一个两方程 $k-\varepsilon$ 磁流体湍流模型, 但是由于在其瞬时流

动方程中已认为电场为外加场, 因而在其模型中, 也略去了电场的脉动. Smolentsev^[5]为模拟核聚变反应堆冷却器中液态金属的流动, 发展了磁场沿槽道流向、展向、壁面法向布置的 $k-\varepsilon$ 磁流体湍流模型. 虽然该模型对于磁场沿槽道流向、展向、壁面法向布置的流动均可给出理想的模拟结果, 但其模型系数依赖于磁场布置方向, 且因其衰减函数的形式依赖于全局无量纲参数, 同样不适用于非均匀的磁场布置形式. 2004 年, Kenjeres 和 Hanjalic^[6]提出一种封闭电场-速度相关的模型, 并基于该模型建立了相应的磁流体湍流雷诺应力模型. 由于雷诺应力的引入, 该模型可处理任意磁场布置形式下的复杂流动. 然而采用雷诺应力模型进行数值模拟需要投入大量机时, 不利于工程应用.

引用格式: 陈智, 李椿萱, 张劲柏. 低磁雷诺数不可压缩磁流体湍流的非线性涡黏性 $k-\omega$ 封闭模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 995–1002
Chen Z, Lee C H, Zhang J B. Nonlinear eddy viscosity $k-\omega$ turbulence model for incompressible low Re_M magnetohydrodynamic flows (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 995–1002, doi: 10.1360/132011-98

为建立适于工程应用的, 并可应用于任意磁场布置形式的二方程磁流体湍流模型, 本文提出将 Kenjeres 和 Hanjalic 的电场-速度相关封闭形式^[6]应用于二方程模型中, 并结合非线性涡黏性湍流模型和可预测转捩的低雷诺数 $k-\omega$ 湍流模型建立了一非线性涡黏性的磁流体湍流封闭模型. 所建立的模型可对磁流体湍流层流化过程进行估计. 与此同时, 模型系数并不依赖于磁场布置形式, 从而放宽了模型的适用范围.

1 非线性涡黏性低磁雷诺数磁流体湍流模型

理论研究导电流体运动与电磁场相互作用的宏观特性需要联立求解 N-S 方程及 Maxwell 方程. 该两组方程通过欧姆定律相耦合, 构成一个包含 5 个流体动力学方程和 3 个广义磁感应方程的 8 方程系统. 对于低磁雷诺数流动 ($Re_m = \mu_0 \sigma U \delta \ll 1$, σ 为电导率, μ_0 为磁导率, U 为流动特征速度, δ 为流动特征长度), 感应磁场相对于外加磁场可以忽略不计, 此时 8 方程系统将退化为含电磁源项的 N-S 方程和电流螺旋条件的 5 方程系统. 本文将以此系统作为起点开展建模.

1.1 雷诺平均模型方程

本文暂考虑不可压缩低磁雷诺数磁流体湍流, 并假设流体电导率为常值. 则对于不可压缩磁流体, 5 方程系统为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} j_j B_k, \\ j_i = \sigma (e_i + \varepsilon_{ijk} u_j B_k), \\ \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0, \\ e_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 u_i 为速度矢量, p 为压力, ν 为运动黏性系数, $\varepsilon_{ijk} j_j B_k$ 为洛伦兹力矢量, ε_{ijk} 为置换符号, j_i 为电流密度矢量, B_i 为外加磁场的磁感应强度矢量, σ 为流体电导率, e_i 为电场强度矢量, φ 为电势. 方程组

3~5 式分别为欧姆定律方程、电流守恒方程、电场无旋条件.

对(1)式进行雷诺平均可给出磁流体平均流场控制方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_j} \right] \\ \quad + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} J_j B_k, \\ J_i = \sigma (E_i + \varepsilon_{ijk} U_j B_k), \\ \frac{\partial J_k}{\partial x_k} = 0, \\ E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \end{cases} \quad (2)$$

可见由于欧姆定律方程、电流守恒方程、电场无旋条件均为线性方程, 进行雷诺平均后其形式与瞬时方程一致. 方程(2)中增加了雷诺应力项 $-\overline{u_i u_j}$, 需利用湍流模型加以封闭.

1.2 磁流体湍流模型建模分析

当前工程实践中最常用的湍流模型是二方程湍流模型, 本文也在二方程模型体系下进行讨论. 沿用与传统湍流湍动能输运方程相似的推导方法可以得到如下的雷诺平均下不可压磁流体湍流的湍动能输运方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u_j'} \right] + S_k^M, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 S_k^M 为磁流体源项, 可表达为

$$\begin{aligned} S_k^M = & -\frac{\sigma}{\rho} \left\{ B_x (\overline{e_y w} - \overline{e_z v}) + B_y (\overline{u e_z} - \overline{e_x w}) \right. \\ & + B_z (\overline{e_x v} - \overline{e_y u}) + (\overline{v^2} + \overline{w^2}) B_x^2 + (\overline{u^2} + \overline{w^2}) B_y^2 \\ & \left. + (\overline{v^2} + \overline{u^2}) B_z^2 - 2\overline{uv} B_x B_y - 2\overline{uw} B_x B_z - 2\overline{vw} B_y B_z \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

以上源项包含两种相关量: 电场-速度相关 $\overline{u_i e_j}$ 和雷诺应力 $\overline{u_i u_j}$.

为封闭湍动能输运方程, 需要给出源项中电场-

速度相关与雷诺应力的模型. 对于雷诺应力, 虽然所有湍流模型均给出了模型, 但从 MHD 耗散项的形式中可以看到, 在磁流体湍流流动中, 磁场选择性的同与其方向垂直的正应力分量发生作用, 形成耗散. 由于实际湍流流动中正应力是各向异性的, 因此当磁场布置方向不同时, MHD 耗散项的大小并不相同, 为体现磁场这种方向选择性特性, 在湍流模型给出的雷诺应力中需要体现正应力的各向异性.

此外, 由于源项 S_k^M 的效应是通过焦耳热效应将湍动能转化为热能, 为耗散性源项, 同时其大小又与外加磁场的磁感应强度呈线性关系, 因此随着外加磁场磁感应强度的增强, 这一耗散性源项的值将线性增大, 则存在一极限磁感应强度, 使得湍动能的耗散大于生成项, 湍流流动向层流转化. 实验与直接数值模拟中均观察到了这一层流化现象^[1,7].

综上所述, 在两方程框架下磁流体湍流模型建模需要解决以下三个问题: (1) 脉动电场与脉动速度相关量项的封闭; (2) 正应力各向异性的模化; (3) 磁流体湍流的层流化过程的模拟.

以下就这三个问题分别进行讨论:

(1) 脉动电场与脉动速度相关量项的封闭. Kenjeres 和 Hanjalic^[6]为建立磁流体湍流雷诺应力模型, 提出该相关量的一种封闭形式:

$$u_i e_j = -C_\lambda \varepsilon_{jkl} B_l u_i u_k, \quad (5)$$

其中 $C_\lambda = 0.6$. 文献[8]通过直接数值模拟验证了该封闭形式的有效性. 本研究提出将该封闭形式引入两方程模型中, 此时磁流体源项为

$$S_k^M = -\frac{\sigma(1-C_\lambda)}{\rho} [(\overline{v^2} + \overline{w^2})B_x^2 + (\overline{u^2} + \overline{w^2})B_y^2 + (\overline{v^2} + \overline{u^2})B_z^2 - 2\overline{uv}B_x B_y - 2\overline{uw}B_x B_z - 2\overline{vw}B_y B_z]. \quad (6)$$

为说明本文采用的湍动能方程的磁流体源项形式(6)与现有两方程磁流体湍流模型的区别, 将其整理为如下形式:

$$S_k^M = -\frac{\sigma(1-C_\lambda)}{\rho} (S_1 + S_2 + S_3), \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 &= 2k(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2), \\ S_2 &= -(\overline{u^2}B_x^2 + \overline{v^2}B_y^2 + \overline{w^2}B_z^2), \\ S_3 &= -(2\overline{uv}B_x B_y + 2\overline{uw}B_x B_z + 2\overline{vw}B_y B_z). \end{aligned}$$

可见, 湍动能方程的磁流体源项由三部分组成: S_1 是各向同性的湍动能的贡献, S_2 是因磁场不与同方向正应力相作用的而应从各向同性的 S_1 中减去的部分, S_3 为切应力的贡献. 已有两方程磁流体湍流模型中, 认为正应力是各向同性的, 即有

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{2}{3}k,$$

同时总是沿着磁场的方向建立坐标系, 则此时 $S_3=0$, 从而将方程(7) 写成如下的形式:

$$S_k^M = -C \left\{ \frac{4}{3}k(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right\}, \quad (8)$$

这也是已有两方程磁流体湍流模型普遍采用的形式. 该形式意味着现有磁流体湍流模型隐含了以下两个假设: (i) 正应力是各向同性的; (ii) 坐标轴沿着磁场方向建立. 本文认为, 由于各向异性是磁流体湍流的本质特性之一^[9], 因此有必要在式(7)中保留正应力的各向异性. 另一方面, 实际流动中磁场是存在弯曲的, 不可能建立一沿着磁场方向的坐标系. 当磁场存在两个分量时, 切应力的贡献 S_3 不为 0, 且其贡献与正应力贡献同量级, S_3 应予以保留. 此外, S_2, S_3 项的存在保证了湍动能方程源项是保坐标变换的, 这是湍流模型建模的要求之一. 因此本文采用完整的湍动能输运方程磁流体源项形式(6)式.

(2) 正应力各向异性的模化. 涡黏性模型认为雷诺正应力是各向同性的, 为在两方程模型体系下体现正应力的各向异性, 需要采用非线性涡黏性模型, 以引入对雷诺正应力的预估.

(3) 磁流体湍流层流化过程的模化. 本文认为磁流体湍流的层流化过程是一种转捩过程, 只不过与一般转捩过程相反, 湍流脉动逐渐减小, 流动由湍流转捩为层流. 为模拟这一过程, 应要求湍流模型具备预测转捩的能力. 需要指出的是, 在已有的磁流体湍流模型中, 针对磁场沿壁面法向布置(即平均洛伦兹力不为零)的状态均进行了特殊的处理, 引入了预测转捩的修正. 如 Ji 和 Gardner^[2]在涡黏性系数表达式中引入 $e^{-C_m N}$ 形式的衰减函数, Smolentsev^[5]在湍动能输运方程中引入相对于实际磁流体源项更大的耗散项等. 上述模型进行这些特殊处理是由于 $k-\varepsilon$ 模型中并不包含预测转捩的机制^[10], 需要人为地添加包含磁场强度的衰减函数, 在磁场强度足够大时, 将湍流涡黏性系数衰减为 0. 使用包含转捩预测能力的湍

流模型时, 无须使用特殊处理.

1.3 非线性涡黏性 $k-\omega$ 磁流体湍流模型

基于以上讨论, 作为初步研究, 本文采用了 Wilcox^[10]于 2006 年提出的含转捩预测的低雷诺数修正 $k-\omega$ 湍流模型作为基础模型. 选用 $k-\omega$ 模型而不是 $k-\varepsilon$ 模型作为建模的基础是基于以下两方面的考虑: (1) $k-\varepsilon$ 模型需要使用壁函数(高雷诺数 $k-\varepsilon$ 模型)或壁面衰减函数(低雷诺数 $k-\varepsilon$ 模型)处理壁面边界条件, 但目前并没有包含磁场效应的壁函数和壁面衰减函数的相关研究; (2) 由于 $k-\varepsilon$ 模型在壁面处存在奇性, 不适用于转捩的预测^[10].

将 Wilcox 的模型引入(3)式并整理后可导出本文所发展的非线性涡黏性 $k-\omega$ 磁流体湍流模型如下:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \alpha^* \sigma_k \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + S_k^M, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\alpha \omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \alpha^* \sigma_\omega \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + S_\omega^M, \quad (10)$$

其中 S_k^M , S_ω^M 为因磁场存在而引入的源项, 其余系数定义参见文献[10]. 在本模型方程(9)和(10)中, 雷诺应力引用了 Song 等人^[11]提出的 $k-\omega$ 非线性涡黏模型. 略去表达曲率效应的三次项有

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{2}{3} \delta_{ij} k - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & + C_1 \frac{\nu_t}{\omega} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \\ & + C_2 \frac{\nu_t}{\omega} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) \\ & + C_3 \frac{\nu_t}{\omega} \left(\Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i},$$

其模型系数分别取 $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2.5$.

在湍动能方程源项中, 速度-电场相关项的封闭引用了 Kenjeres-Hanjalic 模型:

$$S_k^M = (1 - C_\lambda) S_k^{\text{Diss}}, \quad C_\lambda = 0.6, \quad (12)$$

其中 S_k^{Diss} 定义为

$$S_k^{\text{Diss}} = -\frac{\sigma}{\rho} [(\overline{v^2} + \overline{w^2}) B_x^2 + (\overline{u^2} + \overline{w^2}) B_y^2 + (\overline{v^2} + \overline{w^2}) B_z^2 - 2\overline{uv} B_x B_y - 2\overline{uw} B_x B_z - 2\overline{vw} B_y B_z]. \quad (13)$$

ω 方程的源项 S_ω^M 则沿用了通常湍流建模所采用的方式, 将 k 方程源项 S_k^M 乘以适当的修正因子, 即

$$S_\omega^M = C \frac{\omega}{k} S_k^M,$$

若用 S_k^{Diss} 表示, 可以写为

$$S_\omega^M = C_\omega^M \frac{\omega}{k} S_k^{\text{Diss}}, \quad (14)$$

其中包含了有待于标定的模型系数 C_ω^M .

1.4 数值方法及湍流封闭模型的系数标定

已有的磁流体湍流实验主要在槽道中进行, 如图 1 所示. 为减少侧壁对实验的干扰, 大多数实验中槽道的长宽比均很大 ($w/\delta > 5$), 则此时槽道流动可近似为一展向为周期性边界条件的平面流动, 同时由于实验测量的是流动充分发展的部分, 因此在数值模拟中为减少计算量, 可进一步假设流向也满足周期性边界条件. 本文为使用湍流模型数值求解这一问题, 也假设流向和展向满足周期性边界条件, 则此时方程组(2), (9)和(10)中对流项为 0, 并且可以证明^[8], 此时电势方程存在解析解, 可以显式给出槽道中的平均电场:

$$E_x = 0, \quad E_y = UB_z, \quad E_z = -\frac{1}{2} B_y \int_{-\delta}^{\delta} U dy. \quad (15)$$

从而方程组(2), (9)和(10)简化为一仅含时间方向

图 1 平行槽道流动

Figure 1 Plane channel flow.

和一个空间方向(y 方向)的带有源项的扩散型方程组.

为节约计算量, 数值试验将通过直接求解这一简化的方程组来进行. 其数值离散采用空间二阶中心差分 and 显式时间推进.

在计算中, 流场法向网格数为 129, 并按文献[11]的要求保证第一层网格 $y^+ < 1$, 且在黏性底层中保有 10 层以上网格. 计算的收敛准则定为当两时间步间基于平均速度的雷诺数之差小于 10^{-8} 且摩擦阻力系数之差小于 10^{-10} .

应指出, 本文虽然已对湍流模型的近壁特性进行了低雷诺数修正, 但所建立的模型仍更适合于模拟高雷诺数湍流, 在模拟较低雷诺数流动时的精度较差. 表 1 给出了无磁场作用时, 本文所建立的模型对基于槽道流量的雷诺数 Re_Q ($Re_Q = 2U_M \delta / \nu$, U_M 为平均流速) 相对于直接数值模拟^[12,13]的预测精度. 可以看到, 随着雷诺数的降低, 其预测精度明显下降.

表 1 无磁场作用下封闭模型对不同雷诺数槽道湍流预测精度的比较

Table 1 Comparison of present model's and DNS' prediction on Re_Q for channel flow without magnetic field

Re_τ	Re_Q (DNS)	Re_Q (本文模型)	误差
150	4586 ^[12]	4336.86	5.44%
180	5585 ^[13]	5464.14	2.17%
395	13763 ^[13]	13895.72	0.96%
590	21907 ^[13]	22010.41	0.47%

因此, 本文模型在系数拟合时并没有采用低雷诺数($Re_\tau=150$)的磁流体湍流直接数值模拟数据库^[12], 而是采用了文献[14]给出的 $Re_M = 22909$ (Re_M 为参考速度取槽道平均流速的雷诺数, 定义为 $Re_M = U_M \delta / \nu$), 磁场沿法向作用时的直接数值模拟结果. 经数值试验优化, 给出了上述模型的模型系数为 $C_\omega^M = 0.1$.

2 模型的验证

本节给出了应用本文模型对平行槽道流动在磁场沿壁面法向和展向布置下的数值模拟结果, 并与现有试验和数值模拟结果进行了对比分析. 因目前并没有公开的磁场沿流向布置的高雷诺数下的槽道流动直接数值模拟结果或实验结果, 本文并未在该布置条件下进行模型的验证.

2.1 磁场沿壁面法向布置

首先给出本文模型对标定算例的预测结果. 该算例为磁场沿壁面法向布置, 雷诺数 $Re_M=22909$, Ha 数分别为 16.25, 32.5 (Ha , Re_M 参考长度均取为半槽宽 δ) 时的槽道流动. 图 2 给出了本文模型计算、直接数值模拟以及文献[14]使用 Kenjeres-Hanjalic 模型和 Smolentsev 模型所得到的速度剖面. 可以看到, 本文模型给出了最接近直接数值模拟结果的速度型.

图 2 $Re_M = 22750$ 时本文模型结果与 DNS 结果比较

(a) $Ha=16.25$; (b) $Ha=32.5$

Figure 2 Comparison of present model's and DNS' prediction on velocity profile with $Re_M = 22750$. (a) $Ha=16.25$; (b) $Ha=32.5$.

图 3 给出了 Re_M 分别为 29000, 50000 和 90000 时, 本文模型所计算的阻力系数随着 Ha/Re 的变化及与 Lykoudis 的实验结果^[1]的对比. 可以看到, 随着 Ha 数的提高, 摩擦阻力系数逐渐向层流 Hartmann 流动摩擦阻力系数逼近, 并最终与层流解重合, 表明层流化过程的完成. 虽然流动层流化的 Ha/Re 阈值并

非确切等于 Lykoudis 提出的 $Ha/Re=1/225$ ^[1], 但本文提出的模型可正确反映流动随 Ha/Re 的提高而趋于层流化的过程. 同时, 所预测的摩擦阻力系数误差在 10% 以内, 可以满足工程需要. 图 3 还显示, 本文模

图 3 本文模型计算结果与实验结果的比较

(a) $Re_M=29000$; (b) $Re_M=50000$; (c) $Re_M=90000$

Figure 3 Comparison of present model's prediction of C_f to experiment result. (a) $Re_M=29000$; (b) $Re_M=50000$; (c) $Re_M=90000$.

型所给出的层流化过程并不光滑, 且在趋于层流化时所预测的摩擦阻力系数偏大. 其原因是本文模型选用的 Wilcox 低雷诺数修正 $k-\omega$ 湍流模型中所引入的转捩效应未能完整涵盖转捩的全部机理, 不能准确预测转捩的过程. 为提高层流化过程的预测精度, 需选用更精确的转捩模型.

2.2 磁场沿展向布置

其次考虑磁场展向布置下的算例. 表 2 和表 3 给出了 Re_c 分别取 10000 和 20000 时 (Re_c 为特征速度取层流中心线速度的雷诺数), 不同 Ha 数下本文模型所计算摩擦阻力系数的结果及其与文献[13]的直接数值模拟结果的对比. 本文计算结果与直接数值模拟结果均显示摩擦阻力系数随 Ha 数的提高而单调减小. 这是由于湍流脉动速度与磁场相互作用, 通过湍动能输运方程的磁流体源项将部分湍动能转化为热能, 从而减小了摩擦阻力. 本文模型给出了相同的趋势, 同时相对于直接模拟的结果, 其摩擦阻力误差小于 10%.

表 2 $Re_c=10000$ 时本文模型与 DNS 结果^[15]对比

Table 2 Comparison of present model's prediction on C_f to DNS result with $Re_c=10000$

Ha	C_f (DNS)	C_f (Model)	误差
0	6.543	6.634	1.39%
10	6.265	6.449	2.94%
20	5.519	5.851	6.02%
30	4.232	4.623	9.24%

表 3 $Re_c=20000$ 时本文模型与 DNS 结果^[15]对比

Table 3 Comparison of present model's prediction on C_f to DNS result with $Re_c=20000$

Ha	C_f (DNS)	C_f (Model)	误差
0	5.544	5.461	1.50%
20	5.043	5.167	2.46%
30	4.517	4.746	5.07%
40	3.966	3.918	1.21%

磁场沿展向布置下 Re_M 分别为 3890, 7650 和 22750 时, 摩擦阻力系数与无磁场时摩擦阻力系数之比 C_f/C_{f0} 随 Ha 数的变化如图 4 所示. 图中同时也给出了 Branover 的实验结果^[16]. 可以看到, 随着 Ha 数的提高, 摩擦阻力系数同样随 Ha 数的提高而单调减小, 本文模型给出了与实验相一致的趋势. 并且在高雷诺数下 ($Re_M=22750$) 本文模型所计算的结果与实验吻合得很好. 而在低雷诺数下 ($Re_M=3890$ 和 7650) 模

型计算结果与试验数据的偏离度随 Re_M 的下降而增大. 究其原因主要有: (1) 如前所述, 模型对低雷诺数流动预测精度不足造成对 C_{f0} 的计算存在误差; (2) 文献[15]指出磁场沿展向作用时, 由于磁场方向与槽道截面的长边一致, 与磁场法向作用沿槽道截面短边布置相比较, 在实验中更难保证磁场的均匀性. 因此, 文献[15]也未对其直接数值模拟与实验结果进行对比.

图 4 磁场沿展向布置时 C_f/C_{f0} 随 Ha 数的变化

Figure 4 C_f/C_{f0} variation with Ha for a spanwise magnetic field.

3 结论

本文通过分析研究磁流体湍流湍动能输运方程, 提出了基于非线性涡黏性的 $k-\omega$ 磁流体湍流模型. 所采用的具体措施如下:

(1) 采用经直接数值模拟所检验的 Kenjeres-Hanjalic 模型封闭脉动速度-电场相关项.

(2) 在两方程模型体系下引入非线性涡黏性模型来模拟雷诺正应力, 以体现磁场的不同布置形式对湍动能方程中磁流体源项的影响.

(3) 引入可以估计转捩的低雷诺数 $k-\omega$ 湍流模型对层流化过程进行估计.

(4) 使用一组磁场沿法向作用时的高雷诺数直接数值模拟数据对所建立的非线性涡黏性磁流体湍流模型进行模型系数的标定.

应用所建立的模型对磁场沿壁面法向和展向布置的平行槽道磁流体湍流进行了数值模拟, 并与 3 组直接数值模拟和 2 组实验结果进行了对比. 结果表明, 所得到的模型可较好地预测在不同磁场布置下不同磁感应强度的磁流体湍流流动特性, 所得到的阻力系数误差在 10% 以内, 速度型误差小于 5%, 可以满足工程需要.

参考文献

- 1 Lykoudis P S, Brouillette E C. Magneto-fluid-mechanic channel flow. II. Theory. Phys Fluids, 1967, 10(5): 1002–1007
- 2 Ji H C, Gardner R A. Numerical analysis of turbulent pipe flow in a transverse magnetic field. Int J Heat Mass Trans, 1997, 40(8): 1839–1851
- 3 Kenjeres S, Hanjalic K. On the implementation of effects of Lorentz force in turbulence closure models. Int J Heat Fluid Flow, 2000, 21(3): 329–337
- 4 Dietiker J F. Numerical Simulation of Magnetohydrodynamic flows. Dissertation for the Doctoral Degree. Wichita, KS: Wichita State University, 2001
- 5 Smolentsev S, Abdou M, Morley N, et al. Application of the “ $k-\epsilon$ ” model to open channel flows in a magnetic field. Int J Eng Sci, 2002, 40(6): 693–711
- 6 Kenjeres S, Hanjalic K, Bal D. A direct-numerical-simulation-based second-moment closure for turbulent magnetohydrodynamic flows. Phys Fluids, 2004, 16(5): 1229–1241
- 7 Lee D, Choi H. Magnetohydrodynamic turbulent flow in a channel at low magnetic Reynolds number. J Fluid Mech, 2001, 439: 367–394
- 8 Chen Z, Zhang J B, Lee C H. Direct numerical simulation of the turbulent MHD channel flow at low magnetic Reynolds number for electric correlation characteristics. Sci China Phys Mech Astron, 2010, 53(10): 1901–1913
- 9 Knaepen B, Moreau R. Magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number. Annu Rev Fluid Mech, 2008, 40(1): 25–45
- 10 Wilcox D C. Turbulence Modeling for CFD. 3rd ed. La Canada, CA: DCW Industries, Inc., 2006. 200–210
- 11 Song B, Amano R S, Liu G R. On computations of complex turbulent flow by using nonlinear $k-\omega$ model. Numer Heat Transfer Part B, 2001(39): 421–434
- 12 Ohtsubo Y, Noguchi H, Kasagi N. DNS database of turbulence and heat transfer. <http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/>, 2004-09-16

- 13 Moser R D, Kim J, Mansour N N. DNS data for turbulent channel flow. http://turbulence.ices.utexas.edu/MKM_1999.html, 2007-02-01
- 14 Yamamoto Y, Kunugi T, Satake S, et al. DNS and k - ε model simulation of MHD turbulent channel flows with heat transfer. *Fusion Eng Design*, 2008, 83(7-9): 1309–1312
- 15 Krasnov D, Zikanov O, Schumacher J, et al. Magnetohydrodynamic turbulence in a channel with spanwise magnetic field. *Phys Fluids*, 2008, 20(9): 95–105
- 16 Branover G G, Vasil'ev A S, Gel'fgat Y M, et al. Turbulent flow in a plane perpendicular to a magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 1966, 78(4): 46–49

Nonlinear eddy viscosity k - ω turbulence model for incompressible low Re_M magnetohydrodynamic flows

CHEN Zhi^{*}, LEE ChunHian & ZHANG JinBai

School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China

By modelling the magnetic source term in transporting equation of turbulent kinetic energy in a term by term manner, a nonlinear-eddy-viscosity k - ω model suitable for arbitrary magnetic field orientation was proposed at low magnetohydrodynamic Reynolds number assumption. In the present model, Kenjeres-Hanjalic model and Song's nonlinear viscosity model were employed to close the velocity-electric field correlations and the turbulent normal stresses respectively. The relaminarization process was modeled by the low Reynolds number k - ω model meanwhile. The model was then validated with DNS and experiment results. The relative error was below 5% for the velocity profile and 10% for the friction coefficient, proving the applicability of the present model for engineering applications.

incompressible flow, magnetohydrodynamic, turbulence model

PACS: 47.65.-d, 47.27.em, 47.27.nd

doi: 10.1360/132011-98