多变量有限元: 相容性与模式优化*

吴 长 春

(中国科学技术大学近代力学系, 合肥 230026)

Hans Bufler

(斯图加特大学, 结构力学研究所, 联邦德国)

摘 要

本文给出基于非协调试解函数的多变量有限元的非线性相容分析, 导出能量相容条件和单元优化条件. 提出了实施这些条件的杂交元的优化方法, 建立了单元优化格式和多变量参数匹配原理. 研究结果已应用于弹性力学等问题.

关键词: 能量相容条件, 单元优化条件, 优化应力格式, 最佳参数匹配

一、引 言

多变量有限元的数值性能可以借助于对单元引入非协调位移函数而改进^[1-3]. 一个合理的假设应力杂交元的方法曾由卞和 Samihara^[4] 提出, 其中与单元内位移相关的平衡方程弱形式被用作约束条件对应力试解进行前处理, 结果得到一个性能优越的 5β 平面杂交元. 该方法需要对单元作附加的几何摄动处理, 这就复杂化了列式过程. 其后不久, 关于杂交元优化设计的新概念提出来了^[5], 一个更广义的 5β 杂交元被推导出来, 而不用摄动等凑试处理. 新方法优点对轴对称体元也充分体现出来^[6]. 卞和吴^[7] 给出了新方法中关于单元应力选择等问题的一般讨论. 本文借助离散系统的相容分析及单元的刚-柔性分析将提供上述单元优化设计的理论基础. 事实上关于多变量元模式优化有许多问题需要作进一步地、系统地研究. 例如, 怎样才能得到那些作为单元优化设计依据的条件? 为什么这些条件可以用来优化单元的数值性能? 收敛与优化条件的非线性形式如何? 不同类型参数之间的何种匹配才是最佳的? 等等, 都是本文关心的问题.

二、能量相容分析

我们将从非线性弹性力学中的 Hellinger-Reissner 原理的离散形式^[8]开始讨论. 如果位移边界条件已满足, 一离散系统的能量泛函可表为

$$\Pi_R = \sum \Pi_R^e = \sum_e \left\{ \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{2} (u_{i,i} + u_{j,j} + u_{m,i} u_{m,i}) \sigma_{ij} - B(\sigma_{ij}) \right] dv - \int_{\Gamma_e} \bar{T}_i u_i ds \right\}, \quad (1)$$

本文 1989 年 10 月 18 日收到, 1990 年 3 月 1 日收到修改稿.

* 本工作在联邦德国亚历山大·冯·洪堡基金会支持下完成.

其中单元余能函数 $B(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 为第二 Piola-Kirchoff 应力张量。记号 v^e 表示单个元素的体积, 而 $\bar{T}_i$ 是单元表面 s_a^e 上的已知力。

通常(1)式中的位移试解 u_i 对系统全域 $v = \bigcup_e v^e$ 而言应当是协调的, 即 $u_i \in C^0(v)$ 。另一方面, 应力试解 σ_{ij} 则被允许是分片连续的。现在的问题是, 当 $u_i \in C^0(v)$ 时情况如何? 类似于非协调元的分析方法^[9,10], 先略去单元之间位移间断性影响, 直接定义系统的能量泛函为各单元泛函之和:

$$\Pi = \sum_e \left\{ \int_{v^e} \left[\frac{1}{2} (u_{i,i} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) \sigma_{ij} - B(\sigma_{ij}) \right] dv - \int_{s_a^e} \bar{T}_i u_i^0 ds \right\}, \quad (2)$$

其中 u_i^0 是由单元节点位移定义的插值函数, 它是单元位移试解 u_i 的协调部分。我们的目的是要找到某个条件, 在此条件下有限元试解组 (σ_{ij}, u_i) 按变分意义收敛于真解。无疑地, 这个要求的条件必须与泛函 Π 的驻值条件相一致, 使得虚功方程 $\delta \Pi = 0$ 能够成立。

把单元位移 u_i 分离为协调部分 u_i^0 和非协调部分 $u_i^{\wedge}$, 而有

$$u_i = u_i^0 + u_i^{\wedge}, \quad (3)$$

这里 u_i^0 和 $u_i^{\wedge}$ 必须是线性独立的。把(3)式代入(2)式, 对泛函作关于 σ_{ij} , u_i^0 和 $u_i^{\wedge}$ 的变分计算而有

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\sigma_{ij}, u_i^0, u_i^{\wedge}) = & \sum_e \int_{v^e} \left\{ \left[\frac{1}{2} (u_{i,i} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) - \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} B(\sigma_{ij}) \right] \delta \sigma_{ij} \right. \\ & \left. - (\sigma_{mi} + \sigma_{ij} u_{m,j}),_i (\delta u_m^0 + \delta u_m^{\wedge}) \right\} dv \\ & + \sum_e \left(\oint_{\partial v^e} T_i \delta u_i^0 ds + \oint_{\partial v^e} T_i \delta u_i^{\wedge} ds - \int_{s_a^e} \bar{T}_i \delta u_i^0 ds \right), \quad (4) \end{aligned}$$

这里, 单元表面牵引力

$$T_i = n_j \sigma_{mj} (\delta_{im} + u_{i,m}) \quad \text{on } \partial v^e. \quad (5)$$

注意到, 对单个元素有关系 $\partial v^e = s_a^e \cup s_a^e \cup s_{ab}^e$, 其中 s_a^e 为规定了位移的单元表面域, 而 $s_{ab}^e = v_{(a)}^e \cap v_{(b)}^e$ 为相邻单元 (a), (b) 的交界。注意到, 位移边界条件总是由 u_i 的协调部分实现的, 即 $u_i^0 = \bar{u}_i$ 在 s_a^e 上, 如此, 变分 $\delta u_i^0|_{s_a^e} = 0$ 。根据以上关系以及 u_i^0 在 s_{ab}^e 上的连续性, (4)式可改写成下面形式:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_e \int_{v^e} \left\{ \left[\frac{1}{2} (u_{i,i} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) - S_{ijkl} \sigma_{kl} \right] \delta \sigma_{ij} \right. \\ & \left. - [\sigma_{ij} (\delta_{mj} + u_{m,j})],_i (\delta u_m^0 + \delta u_m^{\wedge}) \right\} dv \\ & + \sum_{ab} \int_{s_{ab}^e} (T_i^{(a)} + T_i^{(b)}) \delta u_i^0 ds \\ & + \sum_e \int_{s_a^e} (T_i - \bar{T}_i) \delta u_i^0 ds \\ & + \sum_e \oint_{\partial v^e} T_i \delta u_i^{\wedge} ds, \quad (6) \end{aligned}$$

其中 $T_i^{(a)}$ 和 $T_i^{(b)}$ 是单元交界 s_{ab}^e 上的一对牵引力。由驻值条件 $\delta \Pi = 0$ 可得 v^e 内和 s_{ab}^e 上的平衡方程, u_i - σ_{ij} 关系和 s_a^e 上的力边界条件 $T_i = \bar{T}_i$ 。除此以外我们还得到了另一类条件, 即

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} T_i \delta u_i^e ds = \sum_e \oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{mj} (\delta_{im} + u_{i,m}) \delta u_i^e ds = 0. \quad (7)$$

这意味着广义牵引力 T_i 对于间断虚位移 δu_i^e 在各单元表面 ∂v^e 上所做虚功之和必须为零。对于一个非协调离散系统而言, (7) 式是泛函 Π 取驻值的必要条件, 因此也是近似解合理逼近真解的必要条件。鉴于 (7) 式的能量本质, 称之为具有非协调位移的多变量有限元的能量相容条件。可以证明, 对基于非线性 Hu-Washizu 原理^[8] 的三类变量有限元而言, 如果非线性位移试解被引用的话, 条件 (7) 对保证解的合理性同样是必要的。

三、分片检验的非线性形式

如果只考虑离散解的收敛性问题, 则上述能量相容条件可简化为另一形式。在有限元网格不断细分的极限情况下, 即当网格步长 $h \rightarrow 0$ 时, 各单元内的应力 σ_{ij} 将趋于常量态, σ_{ij}^e , 相应地, 条件 (7) 取一极限形式:

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{mj}^e (\delta_{im} + u_{i,m}) \delta u_i^e ds \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} 0, \quad (8)$$

对不含零能模式的混合/杂交元系统而言, (8) 式是离散解收敛的充分必要条件。但是它的应用往往需要抽象的数学分析, 很不方便。我们可取它的齐封闭形式作为收敛准则, 即

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{mj}^e (\delta_{im} + u_{i,m}) \delta u_i^e ds = 0, \quad (9)$$

在线弹性的情况下 (9) 式简化为

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{ij}^e \delta u_i^e ds = 0. \quad (10)$$

(10) 式即是 Irons 的分片检验^[9], 而 (9) 式则是它的非线性形式。在非线性离散模式设计中, 条件 (9) 应当得到满足。条件 (9) 和 (10) 可以写成单个元的强形式, 例如, 对 (10) 式有

$$\oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{ij}^e \delta u_i^e ds = 0$$

或等价地

$$\oint_{\partial v^e} n_j \delta u_i^e ds = 0. \quad (11)$$

四、单元优化条件

现考虑一个更为实际的情况: $h \rightarrow 0$, 即离散网格是有限的。显然, 这时能量相容条件 (7) 不可能仅由收敛准则 (9) 来实现。记单元高阶应力

$$\sigma_{ij}^h = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e, \quad (12)$$

则有附加条件

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{mj}^h (\delta_{im} + u_{i,m}) \delta u_i^e ds = 0. \quad (13)$$

该条件与单元组合方式相关, 我们还是取它的单个元强形式:

$$\oint_{\partial v^e} n_j \sigma_{mj}^h (\delta_{im} + u_{i,m}) \delta u_i^e ds = 0. \quad (14)$$

对满足了收敛准则的单元而言, 即使单元尺寸是有限的、离散网格是粗糙的, 方程 (14) 也能使

能量相容条件(7)严格实现以致改进或优化了单元的数值性能。(14)式被称之为多变量有限元的单元优化条件,对一个线弹性元,它简化为

$$\oint_{\partial v, e} n_i \sigma_{ij}^h \delta u_i^h ds = 0. \quad (15)$$

五、杂交元的优化方法

现将上述所得收敛条件(11)和单元优化条件(15)应用于弹性杂交元的优化设计,给出单元优化方法。定义单元位移试解

$$u = u_q + u_i = N_q q + N_i \lambda, \quad (16)$$

这里 q 是协调位移 u_q 的节点参数, λ 是用以定义非协调位移 u_i 的单元内部参数。通常单元内位移 $u_i = N_i \lambda$ 并不通过分片检验,但我们借助虚参数法^[11]可以方便地把它修改为满足强收敛条件(11)的形式,记之为

$$u_i^* = N_i^* \lambda. \quad (17)$$

另一方面,单元优化条件(15)可由一个所谓的优化应力格式 σ^* 来接受,现说明如下:

定义初始应力试解为

$$\sigma = \phi \beta \quad (\beta \text{ 为单元内的应力参数}), \quad (18)$$

改写为常应力 σ_c 和高阶应力 σ_h 之和的形式:

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_h = \phi_c \beta_c + \phi_h \beta_h = \beta_c + [\phi_i \phi_{ii}] \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_{ii} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中我们规定 $\dim(\beta_{ii}) = \dim(\lambda)$ 。对应试解(17)和(19),单元优化条件(15)有离散型

$$\oint_{\partial v, e} \delta u_i^* n_i \sigma_{ij}^h ds = \oint_{\partial v, e} \delta u_i^{*T} n \sigma_h ds = \delta \lambda^T M \beta_h = 0, \quad (20a)$$

$$M = \oint_{\partial v, e} N_i^{*T} n [\phi_i \phi_{ii}] ds = [M_i \ M_{ii}], \quad (20b)$$

上式提供了一组关于 β_h 的约束方程,即

$$M \beta_h = [M_i \ M_{ii}] \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_{ii} \end{bmatrix} = 0.$$

若行列式 $|M_{ii}| \neq 0$, 则 β_{ii} 可由 β_i 表示以致可以从(19)式中消去。最终,要求的优化应力格式可表示为

$$\sigma^* = \sigma_c + \sigma_h^* = [I \ \phi_h^*] \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_i \end{bmatrix} = \phi^* \beta^*, \quad (21)$$

$$\phi_h^* = \phi_i - \phi_{ii} M_{ii}^{-1} M_{i.}$$

如果不计入含已知外力的项,对应于 u_i^* 和 σ^* , 单元的能量泛函可以表为

$$\begin{aligned} \Pi^e(\sigma^*, u_q, u_i^*) &= \int_{v, e} \left[\sigma^{*T} (Du_q + Du_i^*) - \frac{1}{2} \sigma^{*T} S \sigma^* \right] dv \\ &\quad - \int_{v, e} \left[\sigma^{*T} (Du_q) + \sigma_h^{*T} (Du_i^*) - \frac{1}{2} \sigma^{*T} S \sigma^* \right] dv, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 D 为线性应变算子, S 为材料弹性矩阵。

与(22)式相对应,存在着另一种可供选择的单元优化列式。取代上述事先满足了分片检

验的内位移 $\mathbf{u}_i^*$, 一个不满足分片检验的单元内位移 $\mathbf{u}_i$ 将被直接采用。这时, 单元边界积分

$$\oint_{\partial v^e} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}_e)^T \mathbf{u}_i ds \neq 0 \quad (23)$$

不满足收敛条件 (11)。为了保证系统泛函的驻值特性不受破坏, 以致保证有限元解的收敛, (23) 式中的非零积分必须从相关的能量泛函中删去。如是得到修正的能量公式

$$\begin{aligned} \Pi^e(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_i) &= \int_{v^e} \left[\boldsymbol{\sigma}^{*T} (D\mathbf{u}_q + D\mathbf{u}_i) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{*T} S \boldsymbol{\sigma}^* \right] ds - \oint_{\partial v^e} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}_e)^T \mathbf{u}_i ds \\ &= \int_{v^e} \left[\boldsymbol{\sigma}^{*T} (D\mathbf{u}_q) + \boldsymbol{\sigma}_h^{*T} (D\mathbf{u}_i) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{*T} S \boldsymbol{\sigma}^* \right] dv, \end{aligned} \quad (24)$$

其中优化应力格式 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 仍然由 (21) 式定义, 只需将 (20b) 式中的形函数 $\mathbf{N}_i^*$ 替换为 $\mathbf{N}_i$ 即可。在第二种优化方法中, 一个常应力乘子技巧被用来放松约束条件 (11)。

注意到在 (24)/(21) 式中, 内位移 $\mathbf{u}_i/\mathbf{u}_i^*$ 的阶次总是高于插值函数 $\mathbf{u}_q$ 的阶次; 同时, $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ 是 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 的高阶部分。因此, 相对于 (24)/(22) 式中的第一项而言, Π^e 中含有非协调位移的积分项是高阶微量而可以略去不计。这样可得到一个简化泛函式:

$$\Pi^e(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{u}_q) = \int_{v^e} \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{*T} S \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\sigma}^{*T} (D\mathbf{u}_q) \right] dv, \quad (25)$$

其中单元内位移 $\mathbf{u}_i/\mathbf{u}_i^*$ 不再出现。至此, 杂交元的优化设计仅归结为一个问题: 怎样建立单元的优化应力格式 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 。

六、最佳参数匹配

许多年前人们已经意识到杂交元中应力参数的合理个数应当是^[12]

$$n_\beta \approx \dim(\mathbf{q}) - \text{单元刚体自由度}.$$

但是, 关于单元参数匹配问题的一个完整的论述一直是需要的, 这对发展和完善多变量有限元理论、指导模式设计都很有意义^[13]。

考虑一个典型单元, 其中与单元刚体自由度相关的节点位移已从位移向量 $\mathbf{q}$ 中删去, 下余的节点位移记作 $\mathbf{q}^*$ 。对此无刚体位移的单元而言, 能量公式 (22), (24) 和 (25) 可表示为一个统一的离散形式:

$$\Pi^e(\boldsymbol{\beta}^*, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\beta}^{*T} \mathbf{G} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^{*T} \mathbf{H} \boldsymbol{\beta}^*, \quad (26)$$

其中单元变形自由度

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^* \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} & \text{对应 (22)/(24) 式,} \\ \mathbf{q}^* & \text{对应 (25) 式.} \end{cases}$$

熟知, (26) 式中的 $\mathbf{H}$ 由单元变形余能所定义, 是一个正定矩阵。以下讨论中先设定 $\mathbf{G}$ 是一个满秩阵, 并采用记号: $n_d = \dim(\mathbf{d})$ 和 $n_{\beta^*} = \dim(\boldsymbol{\beta}^*)$ 。

由泛函 (26) 式的驻值条件 $\delta \Pi^e = 0$ 得一组虚功方程:

$$\delta \boldsymbol{\beta}^{*T} (\mathbf{G} \mathbf{d} - \mathbf{H} \boldsymbol{\beta}^*) = 0, \quad (27a)$$

$$\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{C}^T \boldsymbol{\beta}^*) = 0. \quad (27b)$$

对应虚应力参数 $\delta \boldsymbol{\beta}^*$, (27a) 式提供了单元几何方程

$$\mathbf{C}\mathbf{d} = \boldsymbol{\beta}^*, \quad (28a)$$

其中 $\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}$ 是一个 $n_{\beta^*} \times n_d$ 阶的满秩阵。如果 (28a) 式对 $\mathbf{d}$ 提供了过多的约束, 单元的某些变形受阻而不能发生, 以致放大了单元的刚度。相反, 如果 (28a) 式中关于 $\mathbf{d}$ 的约束方程数少于 n_d , 单元变形不定, 单元刚度将被松弛。另一方面, 由 (27b) 式我们得到对应于虚位移 $\delta\mathbf{d}$ 的单元平衡方程

$$\mathbf{G}^T\boldsymbol{\beta}^* = 0. \quad (28b)$$

如果 (28b) 式提供 $\boldsymbol{\beta}^*$ 过多的平衡关系, 一些单元变形约束可能被解除, 使得单元柔度增大。反之, 单元柔度将减小。由此可见, 对杂交元存在着两种不同的倾向: 单元被刚化或被柔化。

现在考虑下面三种情况:

情况 I $n_{\beta^*} > n_d, \quad (29)$

这时 (28a) 式对位移参数 $\mathbf{d}$ 的几何约束过分, 而 (28b) 式对应力参数 $\boldsymbol{\beta}^*$ 的平衡约束不足, 这就从两个方面同时刚化了杂交元。更有甚者, 当 $n_{\beta^*} \gg n_d$ 时, 单元极度刚化, 将导致位移解的闭锁现象^[12]。

情况 II $n_{\beta^*} < n_d, \quad (30)$

这时 (28a) 式提供 $\mathbf{d}$ 的几何约束不足, 而 (28b) 式却提供 $\boldsymbol{\beta}^*$ 过多的平衡约束, 这就从另外两个方面同时地柔化了单元。实际上, 相应于 (30) 式的应力杂交元含有 $n_d - n_{\beta^*}$ 个零能位移模式。

情况 III $n_{\beta^*} = n_d, \quad (31)$

现在的情况下, 两类单元参数 $\mathbf{d}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^*$ 可以分别由 (28a) 和 (28b) 式唯一确定。(31) 式即是要求的最佳参数匹配, 在此条件之下, 单元的几何与平衡方程可以同时得到满足。如是, 所得单元既不会过分刚化也不会过分柔化, 一个理想的中性逼近可望实现。可以验证, 许多优秀的杂交/混合元^[14,15,4,5]都是满足这种最佳参数匹配的。

从上节建立优化应力格式 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 的过程可知, $n_{\beta^*} = \dim(\boldsymbol{\beta}) - \dim(\boldsymbol{\lambda})$ 。因此, 对 (18) 式中的单元初始应力参数 $\boldsymbol{\beta}$ 而言, 条件 (31) 可取另一种形式:

$$\dim(\boldsymbol{\beta}) = n_d + \dim(\boldsymbol{\lambda}). \quad (31)'$$

在单元优化设计中, 参数匹配 (31)/(31)' 应当尽可能地得到实现。

上述最佳参数匹配使得优化试解组 $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{u})$ 能够同时满足 (27a) 和 (27b) 式, 即虚力原理和虚位移原理能够同时成立。胡^[13]称这样的试解是一组相称的假设, 这是广义变分原理合理应用于近似解的基础。应当指出, 条件 (31)/(31)' 对于寻求相称试解组是必要的, 但可能是不充分的。考虑到 (26) 式中 $\mathbf{G}$ 矩阵缺秩的可能性, 获得相称试解组的充分条件应当是

$$|\mathbf{G}| \neq 0. \quad (32)$$

这个试解匹配条件不但要求单元的参数匹配是最佳的, 而且要求所选用的对偶试解的各个基函数都具有做功的本领, 以致 $\mathbf{G}$ 是满秩的。

七、对三维体元的应用

我们将把与简化能量公式 (25) 相关的杂交元优化方法应用于三维弹性分析。考虑一个 8 节点 6 面体元^[16]和常规的位移法等参元一样, $\mathbf{u}_q$ 在单元等参坐标系 $\xi-\eta-\zeta$ 中被定义为一组三线性插值函数。相对于系统坐标 $X-Y-Z$ 的等参变换的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_4\eta + a_5\zeta + a_7\eta\zeta \\ a_2 + a_4\xi + a_6\zeta + a_7\xi\zeta \\ a_3 + a_5\xi + a_6\eta + a_7\xi\eta \end{bmatrix} (a_i \rightarrow b_i) (b_i \rightarrow c_i), \quad (33)$$

其中各系数由单元节点坐标 (x_i, y_i, z_i) 定义如下:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_7 & b_7 & c_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

为了保持单元位移试解的完备性^[7], 内位移取作

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^2 \eta^2 \zeta^2 & & \\ & \xi^2 \eta^2 \zeta^2 & \\ & & \xi^2 \eta^2 \zeta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_9 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_1 \boldsymbol{\lambda}. \quad (35)$$

如是 $\mathbf{u}_q + \mathbf{u}_1$ 构成一组完全二次函数。另一方面, 在一组完全线性函数的基础上, 单元初始应力试解被定义为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yx} \tau_{xz} \tau_{xy}]^T = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{\beta}_c + [\boldsymbol{\phi}_I \boldsymbol{\phi}_{II}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_I \\ \boldsymbol{\beta}_{II} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\beta}_c = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_I = \begin{bmatrix} \beta_7 \\ \vdots \\ \beta_{18} \end{bmatrix} \text{ and } \boldsymbol{\beta}_{II} = \begin{bmatrix} \beta_{19} \\ \vdots \\ \beta_{27} \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{\phi}_I | \boldsymbol{\phi}_{II}] = \begin{bmatrix} \eta \zeta \eta \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \xi \zeta \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \eta \xi \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这里 3 个双线性项 $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ 和 $\xi\eta$ 被叠加到 $\boldsymbol{\sigma}$ 中去, 旨在抑制可能发生的单元零能模式^[17]. 考察一下单元参数的匹配情况

$$n_s = \dim(\mathbf{q}) - \text{刚体自由度} = 3 \times 8 - 6 = 18,$$

$$\dim(\boldsymbol{\lambda}) = 9 \text{ 和 } \dim(\boldsymbol{\beta}) = 27.$$

可见最佳参数匹配(31)'式得到严格地实现。

为了便于积分, 将 $\mathbf{M}$ 的表达式(20)改写为体积分形式

$$\mathbf{M} = \int_{\nu} [(\mathbf{D}\mathbf{N}_1)^T [\boldsymbol{\phi}_I | \boldsymbol{\phi}_{II}] + \mathbf{N}_1^T [\mathbf{D}^T \boldsymbol{\phi}_I | \mathbf{D}^T \boldsymbol{\phi}_{II}]] d\nu = [\mathbf{M}_I | \mathbf{M}_{II}], \quad (37)$$

可以验证 $|M_{II}| \neq 0$, 单元优化应力格式可按标准列式(21)写出。不过, (37) 式中的被积函数十分复杂, 难以导出 σ^* 的显式。若对 Jacobi 矩阵(33) 仅在单元中心取其值, 则得一常量阵

$$J(\xi, \eta, \zeta) = J_c(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

以致 M 的显式积分容易完成。实际计算表明, 既使在单元发生严重畸变的情况下, 是否采用简化假设(38)对解的影响也极其微小。对(38)式有

$$J_c^{-1} = \frac{1}{|J_c|} \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J_c|} \begin{bmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ c_2 a_3 - c_3 a_2 & c_3 a_1 - c_1 a_3 & c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

至此, M_I , M_{II} 和 M_{II}^{-1} 容易显式导出, 进而要求的优化应力格式之显式即可按(21)式建立如下:

$$\sigma^* = \phi^* \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & j_{22}\eta & j_{33}\zeta & \eta\zeta & 0 & j_{21}\xi & 0 \\ (6 \times 6) & j_{12}\eta & 0 & 0 & j_{33}\zeta & j_{11}\xi & \zeta\xi \\ & 0 & j_{13}\zeta & 0 & j_{23}\xi & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -j_{23}j_{33}\zeta & 0 & 0 \\ & 0 & -j_{13}j_{33}\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -j_{12}j_{22}\eta & 0 & 0 & 0 & -j_{21}j_{11}\xi & 0 \\ j_{31}\xi & 0 & 0 & 0 & 2j_{21}j_{31}\xi & 0 & \beta_1 \\ 0 & j_{32}\eta & 0 & 0 & 0 & 2j_{12}j_{23}\eta & \vdots \\ j_{11}\xi & j_{22}\eta & \xi\eta & 2j_{13}j_{23}\zeta & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & -j_{32}j_{22}\eta & 0 & -j_{13}j_{33}\zeta & j_{11}\xi & -j_{12}j_{22}\eta & \vdots \\ j_{31}j_{11}\xi & 0 & 0 & -j_{23}j_{33}\zeta & -j_{21}j_{11}\xi & j_{22}\eta & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & j_{33}\zeta & -j_{31}j_{11}\xi & -j_{32}j_{22}\eta & \beta_{18} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

单 元	情 况 ①		情 况 ②	
	w_A	$\sigma_{x,B}$	w_A	$\sigma_{x,B}$
DM8	43.24	-1732	48.43	-2412
本文解	96.05	-3016	98.01	-4076
理论解	100	-3000	102.6	-4050

图 1 端部荷载作用下的悬臂梁的挠度和应力解

当单元为平行 6 面体, 且单元局部坐标系 $\xi-\eta-\zeta$ 与系统坐标系 $X-Y-Z$ 一致平行时, 系数 $j_{kl}=0$ ($k \neq l$), 格式(40)将蜕变为 Loikkanen 和 Irons 的结果^[18].

将三线性位移试解 u_q 和这里导出的优化应力格式 σ^* 代入列式(25)就导得杂交元的特性矩阵。下面给出几个关于该优化杂交元的数值简例。例 1 是一个常截面悬臂梁受两组不同

单 元	$u_{r,A}$	$u_{r,B}$	σ_{r1}	$\sigma_{\phi 1} = \sigma_{\theta 1}$	σ_{r2}	$\sigma_{\phi 2} = \sigma_{\theta 2}$
DM 8	25.80	9.88	-512.6	587.6	-425.4	334.9
本文解	26.27	9.99	-545.4	528.0	-365.0	329.3
理论解	26.67	10	-576.8	502.7	-339.3	383.9

图 2 内压力 q 作用下的厚壁圆球的径向位移和应力

($E = 3000$, $\nu = 0.3$, $q = 1000$)

(a)

(b)

(c)

图 3 单元畸变试验 I

(a)

(b)

(c)

图 4 单元畸变试验 II

荷载作用。其中,5个不规则体元被采用(图1)。另一个例子为一厚壁圆球受内压力 q 作用(图2)。以上二例中的优化杂交元解均和相应的8节点位移等参元DM8的解进行了比较。

最后考察一下单元几何畸变对有限元解的影响。在如图3(a)~(c)和图4(a)~(c)的数值试验中,一个由一对体元组成的梁被考察。单元畸变的程度由度量“ a ”表示,图中L08:7-APC和L08:7-APR是依据对称群理论建立的两个杂交元^[19]。我们看到,本文的优化杂交元对单元的几何畸变是不敏感的,在相比较的4种元素中,它提供了最佳的数值解曲线。

八、讨论和结论

基于非线性离散系统的变分分析,一个关于具有间断位移场的多变量元能量相容条件被建立。在网格步长 $h \rightarrow 0$ 的意义下,该条件成为离散解之收敛准则——分片检验的非线性形式。另一方面,在粗网格($h \rightarrow 0$)的情况下,仅仅通过分片检验是不足以保证非协调系统虚功方程成立的(除非采用的是常应力元),还必须同时满足优化条件才行。让位移试解通过分片检验(或是借助于常应力乘子技巧),同时让应力试解吸收单元优化条件,这就是本文的模式优化设计思想。三种可能的杂交元优化方法已经提出,它们分别对应于能量公式(22)中的 $\Pi^e(\sigma^*, u_q, u_\lambda^*)$, (24)中的 $\Pi^e(\sigma^*, u_q, u_\lambda)$ 和(25)中的 $\Pi^e(\sigma^*, u_q)$ 。

关于优化单元的数值稳定性问题,我们必须考虑出现零能模式的可能性^[17,20]。实际上,一个满足了试解匹配条件(32)的混合/杂交元是不含零能模式的。值得强调的是,在采用(22)/(24)式的情况下,内位移 u_λ^*/u_λ 可能给优化单元带来额外的零能模式,以致对内参 λ 的静力凝聚不能进行。记(22)/(24)式中含内位移的项为

$$\int_{V_e} \sigma_\lambda^{*T} (D u_\lambda^*) dv \quad \left(\text{或} \quad \int_{V_e} \sigma_\lambda^{*T} (D u_\lambda) dv \right) = \beta_i^T G_i \lambda, \quad (41)$$

那么我们有含内位移的优化杂交元的静力凝聚条件:

$$G_i \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0. \quad (42)$$

可以验证,(42)式对于 λ 的元级凝聚是充分必要的。

有关模式优化的原理已经应用于各种弹性力学问题^[5,6,16,21,22],尚有待于进一步应用于大变形一类非线性问题。本文建立的多变量元收敛和优化条件的非线性形式将提供非线性模式设计一个有益的指导。

文章第一作者除了感谢 Alexander von Humboldt 基金会的资助外,要特别感谢卞学锁教授和黄茂光教授的指导帮助。

参 考 文 献

- [1] Wolf, J. P., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 9(1975), 601—615.
- [2] 陈万吉、唐立民,大连工学院学报,20(1981),63—74.
- [3] Pian, T. H. H. & Chen, D. P., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18(1982), 1679—1684.
- [4] Pian, T. H. H. & Sumihara, K., *ibid.*, 20(1984), 1685—1695.
- [5] Wu, Changchun, Di Shenglin & Huang Maoguang, *KEXUE TONGBAO*, 32(1987), 1236—1239.
- [6] 吴长春、狄生林、卞学锁,航空学报,8A (1987),439—447.
- [7] Pian, T. H. H. & Wu Changchun, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26(1988), 2331—2343.
- [8] Buefler, H., *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 19(1979), 235—255.
- [9] Strang, G. & Fix G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [10] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland Publishing Company, 1978.

- [11] Wu Changchun, Huang Maoguang & Pian, T. H. H., *Computers & Structures*, 27(1987), 639—644.
- [12] Henshell, R. D., On Hybrid Finite Elements, in *Mathematics of Finite Element Methods and Applications* (Ed. Whiteman), 1973.
- [13] Hu Haichang, On the Rational Utilization of Generalized Variational Principles for Approximate Solutions, in *Proc. of Invi. Symp. on F. E. M.*, Science Press, Beijing, 1982, 370—408.
- [14] Pian, T. H. H., *AIAA J.*, 2(1964), 7: 1333—1336.
- [15] Herrmann, L. R., *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 98, EM5(1967), 13—26.
- [16] Jiao Zhaoping & Wu Changchun, Optimizing formulation of three-dimensional isoparametric hybrid finite element, *Proc. of 2nd Int. Conf. EPMESC*, Guangzhou, China, Nov. 27—29, 1987.
- [17] Pian, T. H. H. & Chen, D. P., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19(1983), 1741—1752.
- [18] Loikkanen, M. J. and Irons, B. M., *ibid.*, 20(1984), 523—528.
- [19] Punch, E. F. & Atluri, S. N., Applications of isoparametric three dimensional hybrid-stress finite elements with least order stress fields, *Computers & Structures*, 19(1984), 409—430.
- [20] Wu Changchun, Dual zero energy modes in mixed hybrid elements—definition, analysis and control, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 80(1990).
- [21] Wu Changchun, Dong Yufeng & Huang Maoguang, Optimization of stress models of hybrid elements and its application to torsion of shafts, *Proc. of 2nd Int. Conf. EPMESC*, Guangzhou, China, Nov. 27—29, 1987, 224—226.
- [22] Di Shenlin, Wu Changchun & Song Qigen, Model optimization of hybrid stress general shell element, *Acta Mechanica Solida Sinica* (English Ed.), 2(1989), 1—18.