中国科学
1992 年 2 月　　A 辑　　第 2 期

# 气泡幕中的声传播及其反演*

钱祖文　李保文　郑晓瑜　邵道远
(中国科学院声学研究所，北京 100080)

**摘　　要**

本文提出了用声学反演法测量气泡幕中气泡尺寸分布参数、气体的体积分数(浓度)以及气幕的有效厚度的方法. 根据文献[3]引入的等效入射场的概念插写气泡多次散射相互作用的方法，考虑到气泡尺寸分布，得到了气泡介质的复声传播常数的表达式，并将它应用到气泡幕情况. 实验测出气泡幕的反射透射数据，应用最优化方法反演得到气泡幕的上述几个参数，理论与实验符合得较好.

**关键词：气泡幕，声反演，声衰减，气泡相互作用**

## 一、引　　言

声波在气泡介质中传播时，其频率接近气泡共振频率时受到很强的衰减. 单个气泡理论表明[1]，气泡与水介质之间的热交换是主要衰减的原因，其次是粘滞损耗及气泡自己的辐射损失. 文献[2]测量了气泡幕的声衰减，得到的共振阻尼常数比单个气泡理论值大得多. 文献[3]考虑了气泡之间的多次散射相互作用，解释了上述阻尼增大的原因. 由于气泡幕中的气泡尺寸不同，本文进一步计及其分布影响，首先得到气泡介质的复传播常数，将气泡幕看成是三层介质，进一步得到其对声波的反射和透射表达式，结合实验数据，应用最优化方法，可以反演出气泡幕的气泡分布参数、气体的体积分数及气泡幕的有效厚度. 值得强调的是，这些参数的测量是很重要的，例如气泡的尺寸分布，当气泡个数很多，光学照相法几乎无法进行，特别是在某些特定的环境下，故本文的方法是一种方便的实用方法，本文的理论与实验也比较符合.

## 二、不同尺寸气泡的声相互作用

与颗粒的情况类似[4-7]，水中气泡的尺寸并不相同，例如在水中用人工产生的气泡其尺寸服从 Poisson 分布[8,9]和伽马分布[10]，文献[11]研究了 $\phi(\phi=-\log_2(2R))$ 作正态分布的情况，显然，这些分布对 $R$ 来说都不是对称的. 这里我们讨论气泡作伽马分布[12]，即

$$n(R)=N_0R^A e^{-AR/R_0}, \tag{1}$$

$$N_0=\tau_N\Big/\left\{\int_0^\infty \frac{4}{3}\pi R^{3+A}e^{-AR/R_0}dR\right\}, \tag{2}$$

本文 1990 年 10 月24日收到，1991 年 5 月 28 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金和中国船舶总公司资助项目.

式中 $n(R)$ 表示单位体积介质中半径在 $R$ 和 $R+dR$ 中的气泡个数. 应用文献[3—7]中的方法,任意点 $P$ 处的第一次散射合势可表为

$$\bar{\Phi}_0^{(1)}(P)=\iiint_{V_p}\int_0^\infty n(R)\bar{A}_0^{(1)}e^{-j(kr_0\cos\theta_0+kr_s\cos\theta_s)}h_0^{(2)}(kr_s)dRdV_s$$

$$=j\frac{\pi}{k^3}\bar{A}_0^{(1)}e^{-jkr_0\cos\theta_0},$$

式中

$$\bar{A}_0^{(1)}=\int_0^\infty n(R)A_0^{(1)}dR, \tag{3}$$

$$A_0^{(1)}=-kR\frac{\delta_0-j(1-\omega_r^2/\omega^2)}{\delta_0^2+(1-\omega_r^2/\omega^2)^2},\quad \delta_0=\frac{b_0}{\omega m_0}.$$

根据同样的道理,第 $n$ 次散射合势为

$$\bar{\Phi}_0^{(n)}(p)=\left(j\frac{\pi}{k^3}\bar{A}_0^{(1)}\right)^n e^{-jkr_0\cos\theta_0}.$$

因此,入射波与多次散射波的和构成了等效入射势为

$$\bar{\Phi}_0(p)=-[1-j\pi\bar{A}_0^{(1)}/k^3]^{-1}e^{-jkr_0\cos\theta_0}. \tag{4}$$

将等效入射场引入气泡振动方程,可以得到不同尺寸气泡相互作用情况下的振动方程

$$m_0\ddot{v}+b_0\dot{v}+K_0v=-p_0[1-j\pi\bar{A}_0^{(1)}/k^3]^{-1}e^{j\omega t}. \tag{5}$$

令气泡介质的等效密度、复压缩率、复声速及复波数分别为 $\rho^*,\beta^*,c^*$ 及 $k^*$,于是有

$$\rho^*=\rho(1-\tau_N)+\rho_0\tau_N=\rho(1-\tau_N),$$

$$\beta^*=\beta_0+\frac{1}{V_0}\int_0^\infty n(R)V_0\frac{\partial v}{\partial P}dR,$$

$$c^{*2}=\frac{1}{\rho^*\beta^*},\quad k^*=\frac{\omega}{c^*}=k_r^*-jk_i^*. \tag{6}$$

$$\begin{cases}k_r^*=\dfrac{1}{\sqrt{2}}k\sqrt{\sqrt{Q_0^2+Q_1^2}+Q_0},\\ k_i^*=\dfrac{1}{\sqrt{2}}k\sqrt{\sqrt{Q_0^2+Q_1^2}-Q_0}.\end{cases} \tag{7}$$

$$Q_0=1-\int_0^\infty 4\pi R^3n(R)\frac{1-y^2}{(1-y^2)^2+\delta^2}\frac{dR}{k^2R^2}, \tag{8}$$

$$Q_1=\int_0^\infty 4\pi R^3n(R)\frac{\delta}{(1-y^2)^2+\delta^2}\frac{dR}{k^2R^2}. \tag{9}$$

$$Y=\Omega_r/\omega,\quad \Omega_r=\sqrt{K/m},\quad \delta=\frac{b}{\omega m}, \tag{10}$$

$\beta_0$ 为水的压缩率, $K,m$ 和 $b$ 可以从(15)式求得,同算得(7)—(9)式一样,它们满足

$$m\ddot{v}+b\dot{v}+Kv=-p_0e^{j\omega t}.$$

## 三、气泡幕中的声传播

水中出现一层气泡,它们对声波形成一道屏障,通常称它为气泡幕. 文献[2,13]唯象地研究过这个问题,文献[14,15]用匹配近似研究了幕的非线性性质. 本文将水中气泡幕当作三层

介质来处理，幕中的传播常数用(6)，(7)式来描述，其几何表示见图 1，这里气泡幕处在 $0<x<d$ 之间，平面波从它的左边入射，于是有

入射波　$\varphi_i = e^{-ik_0x},\ x<0,$

反射波　$\varphi_r = Re^{ik_0x},\ x<0,$

透射波　$\varphi_t = De^{-ik_0x},\ x>d,$

幕中的波　$\varphi^* = A_1e^{-ik^*x} + B_1e^{ik^*x},\ 0<x<d.$

边界连续条件

$$\varphi_i + \varphi_r \simeq \varphi^*,\ \nabla(\varphi_i + \varphi_r) \simeq \nabla\varphi^*,\ x=0,$$
$$\varphi^* = \varphi_t,\ \nabla\varphi^* = \nabla\varphi_t,\ x=d.$$

很易解出

$$R = \frac{(1-K_1^2)(e^{-ik^*d} - e^{ik^*d})}{(1-K_1)^2e^{-ik^*d} - (1+K)^2e^{ik^*d}}, \tag{11}$$

$$D = \frac{1}{2}\{[K_1(1-R)+(1+R)]e^{-ik^*d} - [K_1(1-R)-(1+R)]e^{ik^*d}\}e^{ik_0d} \tag{12}$$

$$K_1 = k_0/k^*. \tag{13}$$

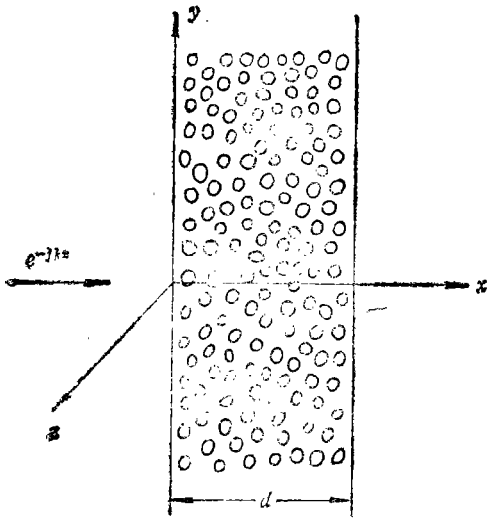


图 1　气泡幕声传播示意图

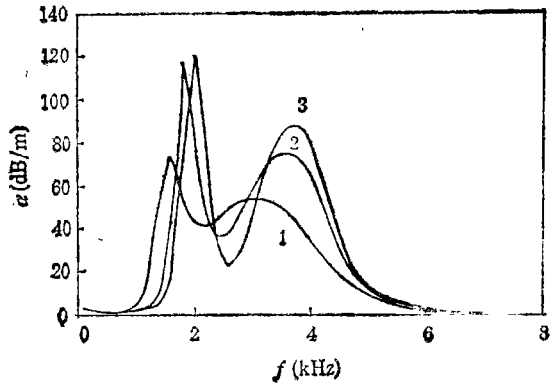


图 2　水中气泡的声衰减与频率的关系(伽马分布)
($\tau_N = 5\times10^{-5}, R_0 = 0.1$cm; 1——$A=10$, 2——$A=20$, 3——$A=30$)

## 四、数 值 计 算

为了对气泡介质的声衰减和声速进行数值计算，必须选用气泡尺寸的分布函数，文献[6,7,11]中选用了 $\phi$ 正态分布；文献[8-11, 12]选用了 Poisson 或伽马分布，本文讨论 $\phi$ 正态分布及伽马分布。

**1. 水中气泡的声衰减和声速**

图 2,3 表示了在伽马分布时声衰减与频率的关系。这些结果表明，随着 $A$ 和 $\tau_N$ 的增大，

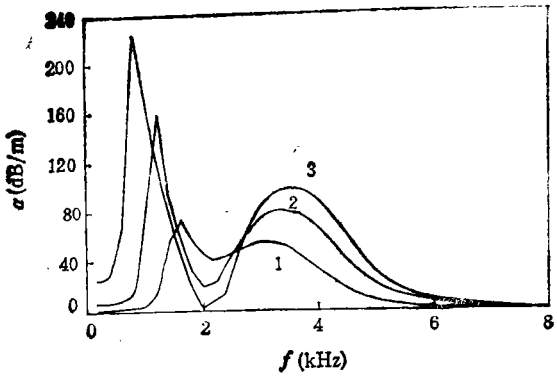


图 3 水中气泡的声衰减与频率的关系(伽马分布)
($A = 10, R_0 = 0.1\text{cm}$; 1——$\tau_N = 5 \times 10^{-5}$, 2——$\tau_N = 8 \times 10^{-5}$, 3——$\tau_N = 10^{-4}$)

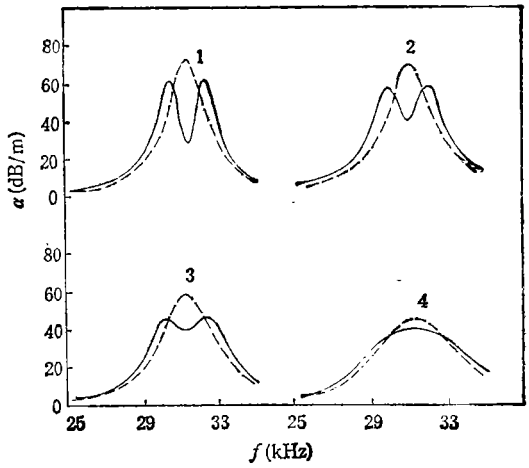


图 4 水中气泡的声衰减与频率的关系($\phi$正态分布)
($\tau_N = 6 \times 10^{-7}, \bar{R} = 0.01\text{cm}$; 1——$D = 7 \times 10^{-3}$, 2——$D = 2 \times 10^{-2}$, 3——$D = 5 \times 10^{-2}$, 4——$D = 7 \times 10^{-2}$)

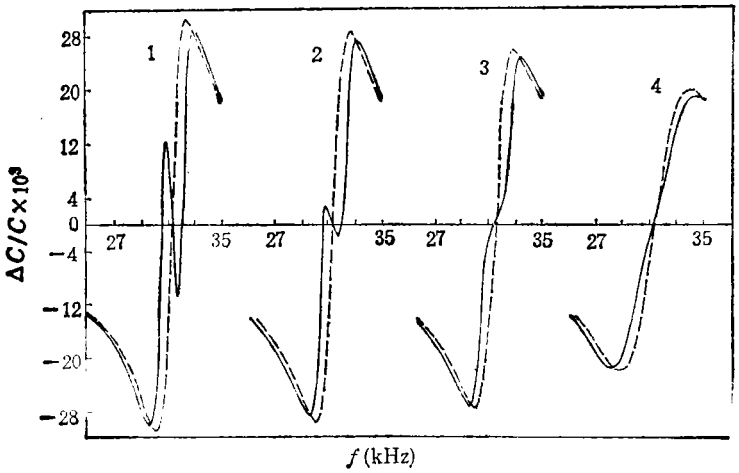


图 5 气泡介质中声速与频率的关系($\phi$ 正态分布)
(参数同图 4)

共振双峰现象愈来愈明显，存在双峰这个问题将在以后详细讨论. 双峰现象早在 Silberman 的实验中[16]已略见端倪，由于当时的知识所限，并未引起注意. 图 4 和图 5 表示了正态分布下的衰减和声速对频率的关系[11]. 这里

$$\bar{\phi} = -\log_2(2\bar{R}),$$

$$n(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}D} e^{-(\phi-\bar{\phi})^2/2D^2}.$$

显然，这些结果表明，随着 $D$ 的增大(分布变宽)和 $\tau_N$ 的减小双峰现象愈来愈退化，这些与伽马分布的结果是一致的，因为分布愈宽，衰减峰和谷互相补平，致使双峰模糊. 另一方面，由于双峰现象起源于相互作用，故气泡浓度(或体积分数)愈大双峰越明显.

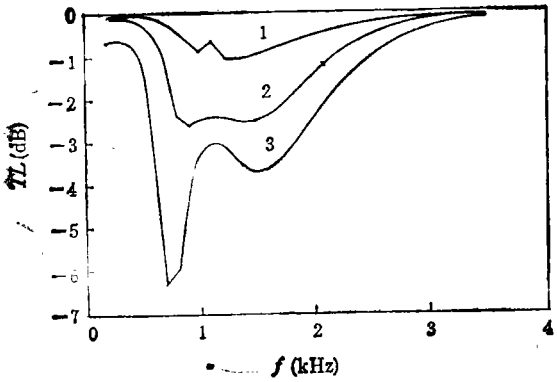


图 6　气泡幕的透过损失与频率的关系
($A = 10, d = 15\text{cm}, R_0 = 0.2\text{cm}$; 1——$\tau_N = 1 \times 10^{-5}$, 2——$\tau_N = 3 \times 10^{-5}$, 3——$\tau_N = 5 \times 10^{-5}$)

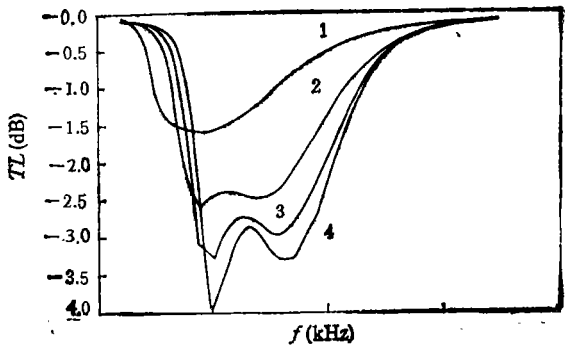


图 7　气泡幕的透过损失与频率的关系
($\tau_N = 3 \times 10^{-5}$, $R_0 = 0.2\text{cm}$, $d = 15\text{cm}$; 1——$A = 5$, 2——$A = 10$, 3——$A = 15$, 4——$A = 20$)

**2. 气泡幕对声波的透过损失**

图 6 表示透过损失对频率的关系，图 7 表示了类似的关系，这些结果也显示了 $A, \tau_N$ 减小双峰模糊，此外，增大 $A$(分布变窄)最大损失移向高频。另一个现象是 $\tau_N$ 增大，双峰分得越开。

## 五、实　　验

**1. 高频声波的反射**

实验是在 $3 \times 0.6 \times 0.8\text{m}^3$ 的水槽中进行，电解法产生气泡，气泡幕产生器的尺寸为 $0.6 \times 0.12\text{m}^2$，一个换能器既作发射又作接收用，另一个水听器放在气幕所在处测量入射波的强度，反射波与入射波之比用分贝表示，这组数据与频率的关系表示于图 8。

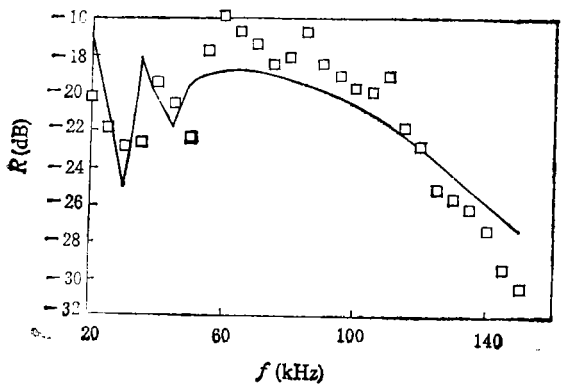


图 8　气泡幕的声反射与频率的关系(理论与实验的比较)
(□为实验数据，实线为理论曲线)

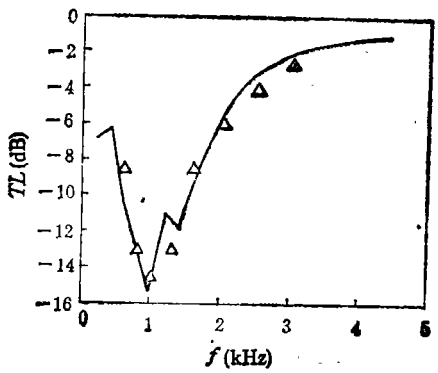


图 9　气泡幕的透过损失与频率的关系(理论与实验的比较)
(△为实验数据，实线为理论曲线)

**2. 低频声透过损失**

低频声透过损失的实验是在 $5 \times 7 \times 15\text{m}^3$ 的水池中进行的，用一根长为 3.6m 的金属管上面有许多规则的小孔，孔径 1mm，由一台空气压缩机供气，发射、接收换能器置于气幕的两

侧，彼此距离 6m，前者离气幕中心 1m，为了减小气幕边缘的绕射．有无气幕时的接收声压之比(以分贝计)作为声透过损失，图 9 中的三角符号是一次实验的结果，详细的实验结果将在另文中介绍[17]．

## 六、气泡幕有关参数的声学反演

水中气泡幕(特别流动水中的气泡幕如船舶尾流等)的厚度、气泡尺寸的分布以及气体的体积分数(浓度)等的测量是一项既重要又困难的工作． 文献[18-22]初步研究海水中的气泡随深度的变化，这些工作仅当气泡体积分数很小(小于 $10^{-7}$)时成立，因为正如文献[3]指出，当气泡含量超过上述值时，气泡多次散射效应不可忽略，按照单个气泡理论得到的反演结果不能应用．而在量子力学和孤子理论中，人们根据 Gelfand-Levitan-Marchenko 定理对散射数据进行反演，本文将根据多次散射解和宽带声学测量数据应用最优化方法进行反演[23]，为了检查这个反演方法的可靠性和稳定性，图 10 表示了反演理论曲线与“实验”数据(方块)的比较；图 11 的结果是当“实验”数据有 0.2 的随机误差．这里所谓的“实验”数据是预先给定 $d$，$R_0$，$A$ 和 $\tau_N$，利用它们来算出反射和透过损失，然后在指定的一组频率上取样出来的相应值作为“实验”

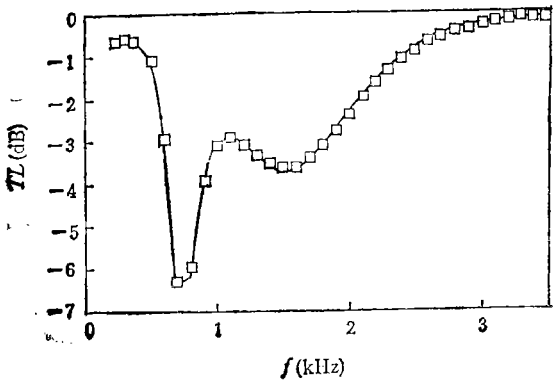


图 10 反演可靠性
(□为实验数据，实线为反演理论曲线)

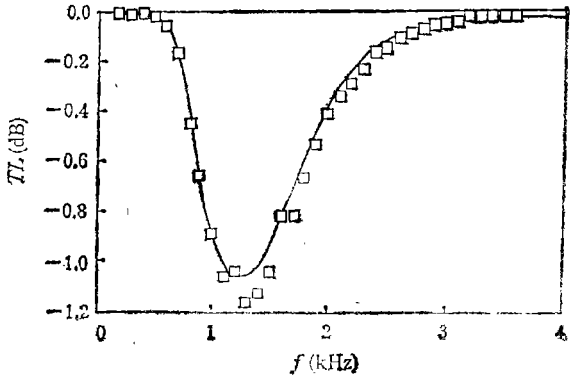


图 11 反演稳定性
(□为实验数据(有 0.2 的误差)，实线为反演理论曲线)

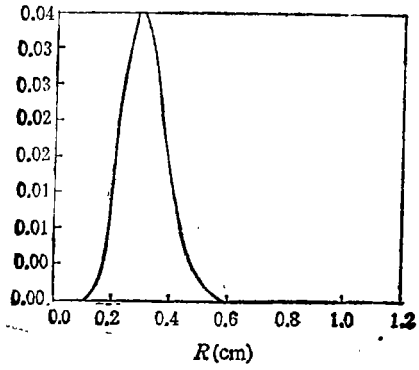


图 12 对应于图 9 的气泡伽马分布曲线
($A = 16.7$, $R_0 = 0.3$cm)

数据，再按这组数据进行反演。从这两张图上的结果可知，即使实验数据有0.2的误差，反演结果只在峰值附近有 0.2 左右的误差，这表明本文的方法是可靠和稳定的。

图 8 表示了电解法产生的气泡幕声反射的实测数据与反演理论曲线的比较，图中的方块是实验结果。图 9 中的三角是长管（其中小孔的孔径是 1mm）产生的气泡幕对声波的透过损失的实测数据(放气压差很小)，图中的曲线是反演理论结果，理论预测出来的几个数据为：$\tau_N = 0.0012$，$R_0 = 0.3\text{cm}$，$A = 16.7$，$d = 4.8\text{cm}$。图 12 是根据得到 $R_0$ 和 $A$ 作出了相应于伽马分布的曲线。这个结果表明，即使使用单一孔径，它产生的气泡也具有一定的分布。我们的研究结果还表明，随着放气压差的增大，$R_0$ 将趋小，而分布将更宽。

## 参　考　文　献


[1] Devin, C. Jr., *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**(1959), 1654.
[2] Carstensen, E. L. & Foldy, L. L., *ibid.*, **19**(1947), 481.
[3] 钱祖文，物理学报，**30**(1981)，442.
[4] Twersky, Vic, *J. Acoust. Soc. Am.*, **24**(1952), 42.
[5] 钱祖文，物理学报，**30**(1981)，433.
[6] Qian, Z. W., *J. Sound Vib.*, **103**(1985), 427.
[7] ——————, *ibid.*, 198(1986), 147.
[8] Davids Norman & Thurston, E. G., *J. Acoust. Soc. Am.*, 22(1950), **20**.
[9] Fox, F. E. et al., *ibid.*, **27**(1950), 534.
[10] Gazanhes, Par C. et al., *Acustica*, 55(1984), 113.
[11] Li, Baowen & Qian, Z. W., *Proc. China-Japan Joint Conference on Ultrasonics, Nanjing*, 1987, **171**.
[12] ——————, *Westpac III*, Shanghai, 1988, 61.
[13] Commander, K. W. & Prosperetti A., *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1989), **723**.
[14] Ng, K. C. & Ting, L., *ibid.*, **79**(1986), 924.
[15] Miksis, M. J. & Ting, L., *ibid.*, **86**(1989), 2349.
[16] Silberman Edward, *ibid.*, 29(1957), 925.
[17] 邵道远等，声学学报，**16**(1991)，6：**444**.
[18] Medwin, H., *J. Geophys. Research*, **75**(1970), 599.
[19] ——————, *J. Acoust. Soc. Am.*, **56**(1974), 1100.
[20] ——————, *ibid.*, **62**(1977), 1041.
[21] ——————, *J. Geophys. Research*, 82(1977), 971.
[22] Akulichev, V. A. et al., *Sov. Phys. Acoust.*, 32(1986), **177**.
[23] Qian, Z. W. & Li, Baowen, *Westpac III*, Shanghai, 1988, **81**.