线性反馈系统空间中的正则点

刘先平^{1,2}, 徐运阁^{1*}

1. 湖北大学数学与统计学学院, 应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062;

2. 湖北民族学院理学院, 恩施 445000

E-mail: 2002010@hbmy.edu.cn, xuy@hubu.edu.cn

收稿日期: 2018-01-10; 接受日期: 2018-07-04; 网络出版日期: 2018-11-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11571341) 资助项目

摘要 本文首先建立线性反馈动力系统与输入 - 状态微分双箭图的表示之间的对应关系, 然后通过计算该双箭图表示的 Belitskii 典范形, 用表示论的方法完全决定了线性反馈动力系统空间的正则点.

关键词 线性反馈动力系统 微分双箭图 Belitskii 典范形 正则点

MSC (2010) 主题分类 16G20, 15A21, 93C05

1 引言

线性时不变系统常由如下常微分方程来描述^[1]:

$$\begin{cases} \frac{d(x(t))}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

其中, u 、 x 和 y 是关于 $t \in \mathbb{R}$ 的向量复值函数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别记实数域和复数域. 该系统可简记为 (B, A, C) . Hazewinkel^[2] 首先注意到该系统对应于如下“输入 - 状态 - 输出”箭图 Q :

的表示 V , 其中 $V_1 = \mathbb{C}^m$, $V_2 = \mathbb{C}^n$, $V_3 = \mathbb{C}^l$, 且取定 V_1 、 V_2 和 V_3 的一组基后, $V_\alpha = A$ 、 $V_\beta = B$ 和 $V_\gamma = C$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times m$ 和 $l \times n$ 矩阵. 基于箭图的表示理论, Han 和 Liu^[3] 利用 Schur 表示和 Kac 定理等方法刻画了系统空间正则点的维数向量和系统空间的某些几何性质. 然而, 迄今为止, 运

英文引用格式: Liu X P, Xu Y G. Regular points in linear feedback system spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1075–1086, doi: 10.1360/N012018-00009

用表示论的方法研究线性动力系统的文献尚不多见. 为方便, 本文仅考虑线性反馈动力系统的“输入对” (B, A) . 本文总假定 k 是一个数域, 记

$$\Sigma_{m,n} := k^{n \times m} \times k^{n \times n}$$

是维数向量为 (m, n) 的线性反馈系统空间. 线性反馈群 $\mathbb{F}_{m,n}$ 由如下三种变换生成:

- (1) 状态空间的基变换: $(B, A) \mapsto (Q^{-1}B, Q^{-1}AQ)$, 其中 Q 是可逆矩阵;
- (2) 输入空间的基变换: $(B, A) \mapsto (BP, A)$, 其中 P 是可逆矩阵;
- (3) 反馈: $(B, A) \mapsto (B, A + BF)$, 其中反馈矩阵 $F \in k^{m \times n}$.

线性反馈群 $\mathbb{F}_{m,n}$ 通过共轭作用作用在系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 上, 使得系统 (B, A) 反馈等价于 (B', A') 当且仅当 $(B', A') \in \mathcal{O}_{(B,A)}$ (参见文献 [4]). 更恰切地, 如果我们将反馈群 $\mathbb{F}_{m,n}$ 与一般线性群的子群

$$\Lambda_{m,n} = \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix} \mid P \in k^{m \times m}, Q \in k^{n \times n}, \det(P) \neq 0, \det(Q) \neq 0 \right\}$$

等同, 则系统 (B, A) 的反馈等价类恰好是分块矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在共轭作用

$$\begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix}$$

下的共轭类. 系统 $(B, A) \in \Sigma_{m,n}$ 称为 $\Sigma_{m,n}$ 中的正则点, 如果它的轨道维数 $\dim \mathcal{O}_{(B,A)}$ 取得极大值. 本文的目的是完全确定反馈系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 中的正则点.

当 k 是一个域时, Brunovsky [5]、Kalman [6] 以及 Wonham 和 Morse [7] 给出了系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 的反馈等价分类, 他们证明了 $\Sigma_{m,n}$ 中的反馈等价类一一对应于整数 n 的分划 (partition). 如果 k 是主理想整环, 文献 [4] 仅对某些特殊的情形讨论了 $\Sigma_{m,n}$ 的反馈等价分类问题. 本文将首先证明 $\Sigma_{m,n}$ 中的反馈等价类一一对应于如下“输入 - 状态”微分双箭图 (Q, δ) 的表示的同构类:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightleftharpoons[b]{v} & 2 \quad a \\ \delta(b) = 0, & & \text{其中 } b \prec a. \\ \delta(a) = vb, & & \end{array}$$

然后, 利用 Belitskii 算法, 得到 (Q, δ) 的所有 (不可分解) 表示同构类的典范形, 从而得到系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 中所有 (不可分解) 系统在反馈等价意义下的典范形, 使得两个系统有相同的典范形当且仅当它们反馈等价. 进一步地, 利用 Belitskii 典范形, 完全确定反馈系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 中的正则点.

2 线性反馈系统与微分双箭图

回顾一下, 由 Crawley-Boevey^[8] 引入的微分双箭图 (Q, δ) 是由次数为 0 的实箭与次数为 1 的虚箭组成的箭图, $\delta: kQ \rightarrow kQ$ 是定义在路代数 kQ 上的微分, 满足

- (1) δ 的次数为 1, 且 $\delta^2 = 0$;
- (2) 对所有的平凡路 e , $\delta(e) = 0$;
- (3) 如果 a 的次数是 i , 则 $\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^i a\delta(b)$;
- (4) (线性) 每个箭向的微分都是一些长度至多为 2 的路的线性组合;
- (5) (三角性) 给定箭图 Q 中的箭向集合一个定序, 使得每个箭向的微分仅包含比它小的箭向.

微分双箭图 (Q, δ) 的表示范畴记为 $R(Q, \delta)$, 其对象为实箭箭图 (仅由 Q 的顶点与实箭组成的箭图) 的表示, 即 Q 的每个顶点对应一个线性空间, 每个实箭对应一个线性映射. 为了给出表示之间的态射, 我们先作一个二分 (bipartite) 箭图 $\bar{Q}$, 该箭图的左右两侧都是 (Q, δ) 的实箭箭图, 用实箭 ω_i 连接左右两侧的顶点 i , 若 (Q, δ) 中有虚箭 $v: i \dashrightarrow j$, 则我们在 $\bar{Q}$ 中用虚箭 v 连接左侧的顶点 i 与右侧顶点 j . 那么, 从 (Q, δ) 的表示 V 到 V' 的态射 F 是 $\bar{Q}$ 的一个表示, 它限制在左侧箭图是表示 V , 限制在右侧箭图是表示 V' , 且满足关系

$$a\omega_j - \omega_i a = \delta(a), \quad \text{任意实箭 } a: i \rightarrow j.$$

注意到 (Q, δ) 的实箭箭图的表示范畴是 $R(Q, \delta)$ 的子范畴, 它们有相同的对象, 但一般不是满子范畴, 即虚箭用来增加 $R(Q, \delta)$ 中可能的态射的数目. 关于更多微分双箭图的表示理论, 参见文献 [8].

本文总考虑如下的微分双箭图 (Q, δ) :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xleftarrow{v} & 2 \\ & \searrow b & \nearrow a \end{array} \quad \begin{array}{l} \delta(b) = 0, \\ \delta(a) = vb, \end{array} \quad \text{其中 } b \prec a.$$

$R(Q, \delta)$ 中的对象是实箭箭图的表示 $V = (k^m, k^n, V_b, V_a)$, 从表示 V 到 V' 的态射由 $f = (f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, f_v)$ 给出, 满足

$$V_b f_{\omega_2} - f_{\omega_1} V'_b = 0, \quad V_a f_{\omega_2} - f_{\omega_2} V'_a = f_v V_b, \quad (2.1)$$

其中映射按从右到左的顺序合成. 记 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 为 (Q, δ) 的维数向量为 (m, n) 的表示组成的 $R(Q, \delta)$ 的满子范畴.

如果将线性反馈系统空间 $\Sigma = \bigcup_{m,n} \Sigma_{m,n}$ 看作一个范畴, 那么它的对象是系统 (B, A) , 从 (B, A) 到 (B', A') 的态射是矩阵三元组 (P, Q, F) 满足

$$BP = QB', \quad AQ + BF = QA', \quad (2.2)$$

则有如下结论:

命题 2.1 $\Phi: R(Q, \delta) \rightarrow \Sigma$ 是一个等价函子, 因此, $\Sigma_{m,n}$ 中的反馈等价类一一对应于 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 中表示的同构类.

证明 给定 (Q, δ) 的表示 $V = (k^m, k^n, V_b, V_a)$, 分别固定线性空间 k^m 和 k^n 的一组基, 则线性映射 V_b 和 V_a 分别由 $n \times m$ 阶矩阵 B 和 $n \times n$ 阶矩阵 A 给出, 从而表示 V 可简记为 (B, A) . 定义 $\Phi(V) = (B, A)$.

设 $V' \in R(Q, \delta)_{m', n'}$. 如果 $f = (f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, f_v)$ 是从表示 V 到 V' 的态射, 我们分别固定 $k^{m'}$ 和 $k^{n'}$ 的一组基, 使得 V' 简记为矩阵对 (B', A') , 则 (2.1) 表明态射 f 可由 $m \times m'$ 阶矩阵 P 、 $n \times n'$ 阶矩阵 Q 和 $m \times n'$ 阶矩阵 F 给出, 且满足

$$QB' - BP = 0, \quad QA' - AQ = BF.$$

定义 $\Phi(f) = (P, Q, F)$, 则 Φ 显然是稠的; 由 (2.1) 和 (2.2) 知 Φ 是满的且是忠实的, 所以, Φ 是一个等价函子. 表示 (B, A) 与 (B', A') 同构当且仅当矩阵 P 与 Q 是可逆矩阵. 所以, $\Sigma_{m, n}$ 中的反馈等价类一一对应于 $R(Q, \delta)_{m, n}$ 中表示的同构类. $\square$

给定表示 $(B, A) \in R(Q, \delta)_{m, n}$, 利用 Belitskii 算法, 我们可以计算表示 (B, A) 在同构意义下的典范形. Belitskii 算法是由 Belitskii^[9, 10] 引入的约化分块矩阵到其相似标准形的有效算法, 也可参见文献 [11, 第 2.3 小节] 或 [12]. 粗略地讲, 设表示 (B, A) 同构于 (B', A') , 我们可以将它们组装成分块矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 0 & B' & A' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

使得 $(B, A) \cong (B', A')$ 等价于

$$\begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{\Lambda} \begin{bmatrix} 0 & B' & A' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$\Lambda = \Lambda_{m, n} = \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix} \mid P \in k^{m \times m}, Q \in k^{n \times n}, \det(P) \neq 0, \det(Q) \neq 0 \right\},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & B' & A' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix},$$

或简记为

$$[B', A'] = Q^{-1}[B, A] \begin{bmatrix} P & F \\ Q \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

由于子块 B 满足 $QB' = BP$, 我们首先将 B 约化为标准形 $B' = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $r_B = \text{rank}(B)$. 此时, 根据 B' 的稳定子群的分块方法, 我们可以将矩阵 A 分块成 $A = [A_{ij}]$, 然后对子块 A_{ij} 按从下到上、从左到右的顺序定序. 接下来利用 B' 的稳定子群约化 A 的第一个子块 A_{21} 到其标准形 A'_{21} , A 的剩余子块可能根据 B' 和 A'_{21} 的稳定子群的分块方法重新细分, 然后再用 B' 和 A'_{21} 的稳定子群约化 A 的接下来的第一个未约化子块. 如此继续下去, 由于矩阵 A 的型号是固定的, 而每一步约化都将 A 的一

个小子块约化成标准形 $\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 或零矩阵, 有限步后 A 的所有子块将都被约化, 我们最终得到 (B, A) 的典范形, 记作 $[B^\infty | A^\infty]$, 称为表示 (B, A) 的 Belitskii 典范形. 显然, $[B^\infty | A^\infty]$ 的稳定化子恰好是它的自同态环, 记作 Γ^∞ ; 而 $[B^\infty | A^\infty]$ 的稳定子群 Λ^∞ 正是它的自同构群.

文献 [13] 利用 Belitskii 算法计算了低维无反馈线性动力系统 (B, A, C) 的典范形. 下面的定理事实上给出了线性系统的反馈等价典范形.

定理 2.1 设 $(B, A) \in R(Q, \delta)_{m,n}$, 则 (B, A) 的 Belitskii 典范形具有如下形式:

$$[B^\infty | A^\infty] = \left[\begin{array}{c|cccccccc} 0 & I_{r_B} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_1} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{r_2} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{r_t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right],$$

其中 $r_B = r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_t$, 符号 $\emptyset$ 记 (由正则化约化得到的) 零矩阵块.

证明 (2.3) 可重写为

$$Q[B', A'] = [B, A] \begin{bmatrix} P & F \\ & Q \end{bmatrix}.$$

对应于矩阵 B 的约化方程为 $QB' = BP$, 于是可通过选取合适的可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$B' = Q^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_B = \text{rank}(B) = r_0.$$

这种约化称为边约化 (edge reduction) [11]. 接下来构造 B' 的稳定子群

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ & P & F \\ & & Q \end{bmatrix} \mid Q \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ & P & F \\ & & Q \end{bmatrix} \mid Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ & Q_{11} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

根据 $\Lambda^{(1)}$ 的分块方式, 将矩阵 A 分块成 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 并且子块 A_{ij} 按如下方式定序:

$$A_{ij} \preceq A_{i'j'}, \text{ 如果 } i > i', \text{ 或 } i = i' \text{ 且 } j < j'. \quad (2.4)$$

接下来, 利用 Belitskii 算法, 根据 A 的约化方程

$$QA' = BF + AQ. \quad (2.5)$$

按如上顺序依次约化 A 的每一个子块到其标准形, 该约化方程可被重写为

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A''_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

于是,

$$\begin{aligned} Q_{22}A'_{21} &= A_{21}Q_{11}, \quad (2,1)\text{-位置}; \\ Q_{22}A'_{22} &= A_{21}Q_{12} + A_{22}Q_{22}, \quad (2,2)\text{-位置}; \\ Q_{11}A'_{11} + Q_{12}A'_{21} &= F_{21} + A_{11}Q_{11}, \quad (1,1)\text{-位置}; \\ Q_{11}A'_{12} + Q_{12}A'_{22} &= F_{22} + A_{11}Q_{12} + A_{12}Q_{22}, \quad (1,2)\text{-位置}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6) 的第一个方程蕴含着可通过边约化将 A_{21} 约化为 $A'_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r_1 = \text{rank}(A_{21})$. 构造 B' 和 A'_{21} 的稳定子群 $\Lambda^{(2)}$, 并根据 $\Lambda^{(2)}$ 的分块方式将 A 的分块重新加细, 记作 $A^{(1)}$, 则 A 的子块 A_{22} 被分块为 $\begin{bmatrix} A_{22}^3 & A_{22}^4 \\ A_{22}^2 & A_{22}^1 \end{bmatrix}$. 现在用稳定子群 $\Lambda^{(2)}$ 约化下一个子块 A_{22}^4 到其标准形, 并将 A 重新分块, 记作 $A^{(2)}$. 重复上述过程, 假定第 $t+1$ 个已约化子块是 $\begin{bmatrix} 0 & I_{r_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $A^{(t)}$ 的最后 $n - \sum_{i=0}^t r_i$ 行全为零行. 如下式, 空白处是尚未约化的部分:

$$(B', A^{(t)}) = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & I_{r_0} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_1} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{r_2} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{r_t} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

我们断言: 在进一步的约化中, 尚未约化的子块 (位于每个分块行中单位矩阵 I_{r_i} 后面的子块) 将全部被约化为零块. 事实上, 当 $i = 0$ 时, 由于第一步边约化时没有涉及反馈矩阵 F , 所以, 子块 F_{21} 和 F_{22} 在 (2.6) 中的第三、四个公式中仍是自由变量矩阵, 因此, 无论子块 A_{21} 和 A_{22} 约化到何种形式 (事实上, 根据 (2.4) 中的定序, A_{21} 和 A_{22} 在约化 A_{11} 和 A_{12} 之前已被约化), 我们都可以适当地选取子块 Q_{11} 、 Q_{12} 和 F_{21} 使得 $A'_{11} = 0$; 适当地选取 Q_{11} 、 Q_{12} 、 Q_{22} 和 F_{22} 使得 $A'_{12} = 0$. 这种约化在文献 [11] 中被称为正则化 (且正则化所得的零块记为 $\emptyset$, 以示与其他零块的区别). 这样, $A'_{11} = \emptyset$, $A'_{12} = \emptyset$, 即第一个分块行中 I_{r_0} 后面的子块都被约化为零块. 类似地, 第二步边约化之后, A 的子块 A'_{22} 被分块为 $\begin{bmatrix} A_{22}^3 & A_{22}^4 \\ A_{22}^1 & A_{22}^2 \end{bmatrix}$, 同时 (2.6) 的第二个公式中 Q_{12} 是自由变量矩阵, 且 A_{21} 已被约化为 $\begin{bmatrix} 0 & I_{r_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 即 (2.6) 的第二个公式可重写为

$$\begin{bmatrix} Q_{22}^1 & Q_{22}^2 \\ & Q_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22}'^3 & A_{22}'^4 \\ A_{22}'^1 & A_{22}'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12}^3 & Q_{12}^4 \\ Q_{12}^1 & Q_{12}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22}^3 & A_{22}^4 \\ A_{22}^1 & A_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22}^1 & Q_{22}^2 \\ & Q_{22}^3 \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$Q_{22}^1 A_{22}'^3 + Q_{22}^2 A_{22}'^1 = Q_{12}^1 + A_{22}^3 Q_{22}^1, \quad Q_{22}^1 A_{22}'^4 + Q_{22}^2 A_{22}'^2 = Q_{12}^2 + A_{22}^3 Q_{22}^2 + A_{22}^4 Q_{22}^3.$$

由 Q_{12}^1 和 Q_{12}^2 的自由性, 且根据 (2.4) 的定序, A'_{22}^1 和 A'_{22}^2 在 A'_{22}^3 和 A'_{22}^4 之前已被约化, 我们可以通过选取适当的 Q_{22}^1 、 Q_{22}^2 、 Q_{22}^3 、 Q_{12}^1 和 Q_{12}^2 使得 $A'_{22}^3 = \emptyset$, $A'_{22}^4 = \emptyset$, 即第二个分块行中 I_{r_1} 后的所有子块全被正则化为零块. 如此继续, 直到第 $t+1$ 分块行中 I_{r_t} 后的子块也被正则化为零块. $\square$

结合命题 2.1、定理 2.1 和文献 [11, 定理 1.3], 我们有下面的推论:

推论 2.1 线性系统 (B, A) 反馈等价于 (B', A') 当且仅当它们有相同的 Belitskii 典范形 $[B^\infty | A^\infty]$.

接下来确定微分双箭图 (Q, δ) 的不可分解表示的 Belitskii 典范形.

分块矩阵 $[M_{ij}]$ 与 $[N_{ij}]$ 的直和定义为 $[M_{ij} \oplus N_{ij}]$, 参见文献 [11]. 定理 2.1 中的 Belitskii 典范形 $[B^\infty | A^\infty]$ 中, 由边约化得到的子块 $\begin{bmatrix} 0 & I_{r_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($0 \leq i \leq t$) 中“1”的数目之和 $\sum_{i=0}^t r_i$ 称为 $[B^\infty | A^\infty]$ 的链环数, 参见文献 [14]. 利用链环数, 文献 [14] 给出了如下不可分解性的简便判则.

引理 2.1 表示 $(B, A) \in R(Q, \delta)_{m,n}$ 是不可分解的当且仅当它的 Belitskii 典范形 $[B^\infty | A^\infty]$ 的链环数等于 $m+n-1$.

定理 2.2 表示 $(B, A) \in R(Q, \delta)_{m,n}$ 是不可分解的当且仅当

$$[B^\infty | A^\infty] = \left[\begin{array}{c|cccccc} 1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 1 & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & 1 & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \emptyset \end{array} \right].$$

证明 设 (B, A) 是 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 中的不可分解表示. 像在定理 2.1 的证明中, 我们假定矩阵 B 已被约化为

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

接下来根据约化方程 (2.5) 有 $QA' = BF + AQ$, 按照 (2.4) 的顺序约化子块 A_{ij} .

情形 1 如果 $r_B < m$, 则在稳定子群 $\Lambda^{(1)}$ 中, 子块 P 将被分块成

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ & P_{22} \end{bmatrix}.$$

若 $r_B = n$, 则 $Q = P_{22}$; 若 $r_B < n$, 则 $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix}$, 且 $Q_{11} = P_{22}$. 此时, 上述约化方程可重写为

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

由于该约化方程中并没有涉及子块 P_{11} , 因此, 在随后的约化中, P_{11} 在 $\Lambda^{(i)}$ 中将始终保持为自由变量矩阵, 于是在它的自同态环 Γ^∞ 中也是自由变量矩阵. 由约化过程知 Γ^∞ 是上三角矩阵代数的子代数, 所以 Γ^∞ 不是局部的, 因而 (B, A) 不是不可分解的, 矛盾.

情形 2 若 $r_B = m = n > 1$, 则 $B' = I_n$, 从而上面的约化方程蕴含着可通过选取合适的 Q 和 F 使得 A' 被正则化为 $A' = \emptyset$. 故 (B, A) 的自同态环 $\Gamma^\infty = \text{diag}(Q, Q, Q)$ 不是局部的, 因而 (B, A) 是可分解的, 矛盾.

情形 3 若 $r_B = m < n$, 则 $B' = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$, 从而,

$$\Lambda^{(1)} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ & P & F \\ & & Q \end{bmatrix} & Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix}, Q_{11} = P \end{array} \right\}.$$

则约化方程 (2.5) 变为

$$\begin{bmatrix} P & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} [F_1 \ F_2] + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q_{12} \\ & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

于是,

$$Q_{22}A'_{21} = A_{21}Q_{11}, \quad (2,1)\text{-位置};$$

$$Q_{22}A'_{22} = A_{21}Q_{12} + A_{22}Q_{22}, \quad (2,2)\text{-位置};$$

$$PA'_{11} + Q_{12}A'_{21} = F_1 + A_{11}P, \quad (1,1)\text{-位置};$$

$$PA'_{12} + Q_{12}A'_{22} = F_2 + A_{11}Q_{12} + A_{12}Q_{22}, \quad (1,2)\text{-位置}.$$

类似于定理 2.1 的证明中的分析, 由于 F_1 和 F_2 是自由变量矩阵, A_{11} 和 A_{12} 将被正则化为零块, 而无关子块 A_{21} 和 A_{22} 的约化. 如果 $\text{rank} A_{21} < m$, 那么, 类似于情形 1 的分析, 自同态环 Γ^∞ 将不是局部的, 从而导致 (B, A) 可分解, 矛盾. 所以, $A'_{21} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$, 且在稳定子群 $\Lambda^{(2)}$ 中, $Q_{22} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ & Q_{22}^1 \end{bmatrix}$. 重复上述约化过程, 我们最终可得到 (B, A) 的 Belitskii 典范形

$$[B^\infty \mid A^\infty] = \left[\begin{array}{c|cccccc} I_m & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & I_m & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & I_m & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & \emptyset \end{array} \right].$$

注意到该典范形中的链环数等于 n , 由引理 2.1 知, (B, A) 不可分解蕴含着 $n + m - 1 = n$, 所以, $m = 1$. $\square$

3 线性反馈系统空间中的正则点

众所周知, 微分双箭图 (Q, δ) 的维数向量为 (m, n) 的表示组成的满子范畴 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 同构于 $k^{mn} \times k^{n^2}$, 从而可看作一个代数簇, 线性代数群

$$\Lambda = \Lambda_{m,n} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ & P & F \\ & & Q \end{bmatrix} & P \in k^{m \times m}, Q \in k^{n \times n}, \det(P) \neq 0, \det(Q) \neq 0 \end{array} \right\}$$

通过共轭作用作用在

$$R(Q, \delta)_{m,n} \cong \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid B \in k^{n \times m}, A \in k^{n \times n} \right\}$$

上, 即

$$\left(\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ P & F \\ Q \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

这样, Λ -轨道恰好是 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 中的同构类, 因此, 系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 中的反馈等价类一一对应于 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 中的 Λ -轨道. 给定

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

应用 Belitskii 算法, 我们可得到一个约化序列

$$(M, \Lambda), (M^{(0)}, \Lambda^{(0)}), (M^{(1)}, \Lambda^{(1)}), \dots, (M^{(u)}, \Lambda^{(u)}) = (M^\infty, \Lambda^\infty), \quad (3.2)$$

其中, 第 i -步约化产生了一个型号为 $s_i \times t_i$ 的形如 $\begin{bmatrix} 0 & I_{r_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的子块 ($i = 0, 1, \dots, t$) 或形如 $\emptyset$ 的零块 ($i = t+1, \dots, u$). 由稳定子群 $\Lambda^{(i)}$ 的构造过程知, 稳定子群维数的减少量为

$$\sigma_M(i) = \dim \Lambda^{(i-1)} - \dim \Lambda^{(i)} = \begin{cases} s_i t_i, & \text{若 } M_i = \emptyset, \\ r_i(s_i + t_i - r_i), & \text{若 } M_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (3.3)$$

显然, (3.1) 中的共轭作用诱导了一个自然同构 $\mathcal{O}_M \cong \Lambda / \Lambda^\infty$, 其中 $\Lambda^\infty = \text{stab}_\Lambda(M)$. 于是,

$$\dim \mathcal{O}_M = \dim \Lambda - \dim \Lambda^\infty.$$

所以,

$$\dim \mathcal{O}_M = \sum_{i=1}^u \sigma_M(i).$$

这样, 由 (3.3), 我们就可以通过计算 M 的典范形中子块 M_i 的型号来计算 Λ -轨道 $\mathcal{O}_M$ 的轨道维数了, 参见文献 [15].

为方便, 我们仍将

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

记作 $[B, A]$. M 称为 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 中的正则点, 如果它的轨道维数 $\dim \mathcal{O}_M$ (即轨道 $\mathcal{O}_M$ 的闭包 $\overline{\mathcal{O}}_M$ 的维数) 取极大值.

定理 3.1 (B, A) 是 $R((Q, \delta))_{m,n}$ 中的正则点当且仅当它的 Belitskii 典范形具有如下形式:

(1) 若 $m \geq n$, 则

$$[B^\infty \mid A^\infty] = [0_{(m-n) \times n}, I_n \mid 0_{n \times n}];$$

(2) 若 $m < n$, 则

$$[B^\infty \mid A^\infty] = \left[\begin{array}{c|cccccc} I_m & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & I_m & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & I_m & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & \emptyset \end{array} \right].$$

从而, 所有维数向量为 $(1, n)$ 的不可分解表示都是 $R(Q, \delta)_{1,n}$ 中的正则点.

证明 设 $M = (B, A) \in R(Q, \delta)_{m,n}$ 是 $R(Q, \delta)_{m,n}$ 中的正则点, 假定序列 (3.2) 是将 M 约化为它的 Belitskii 典范形的约化序列. 由定理 2.1 的证明中的约化过程知, 前 $t+1$ 步约化是边约化, 即

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{s_i \times t_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, t,$$

后 $u-t$ 步约化是正则化, 即 $M_j = [\emptyset]_{s_j \times t_j}$, $j = t+1, t+2, \dots, u$. 由 (3.3) 知,

$$\sigma_M(i) = \begin{cases} s_i t_i - (s_i - r_i)(t_i - r_i), & 0 \leq i \leq t, \\ s_i t_i, & t+1 \leq i \leq u. \end{cases}$$

所以,

$$\sum_{i=1}^u \sigma_M(i) = n^2 - \sum_{i=1}^t (s_i - r_i)(t_i - r_i),$$

从而,

$$\dim \mathcal{O}_M = \sum_{i=0}^u \sigma_M(i) = mn - (m - r_0)(n - r_0) + n^2 - \sum_{i=1}^t (s_i - r_i)(t_i - r_i),$$

其中 $r_B = r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_t$, $r_i \leq \min\{s_i, t_i\}$. 故 $\dim \mathcal{O}_M$ 取极大值当且仅当 $r_i = \min\{s_i, t_i\}$, $i = 0, 1, \dots, t$. 此时, $\dim \mathcal{O}_M = mn + n^2$.

如果 $m \geq n$, 则 $r_0 = \min\{m, n\} = n$, 此时, (B, A) 的典范形为

$$[B^\infty \mid A^\infty] = [0_{(m-n) \times n}, I_n \mid 0_{n \times n}].$$

如果 $m < n$, 则 $r_0 = \min\{m, n\} = m$, 且 $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是型号为 $(n-m) \times m$ 的子块. 若 $n-m \leq m$, 则 $t=1$, $r_1 = n-m$; 否则, $r_1 = m$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是型号为 $(n-2m) \times m$ 由边约化得到的子块. 类似地, 若 $n-2m \leq m$, 则 $t=2$, $r_2 = n-2m$; 否则, $r_2 = m$ 且 M_3 是型号为 $(n-3m) \times m$ 由边约化得到的子块. 如此下去, 我们最终得到

$$M_t = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是最后一个边约化子块, $r_t = m$, 且剩余子块将全部被正则化. 所以, (B, A) 的典范形为

$$[B^\infty \mid A^\infty] = \left[\begin{array}{c|cccccc} I_m & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & I_m & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & I_m & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & \emptyset \end{array} \right].$$

由定理 2.2 知, 所有维数向量为 $(1, n)$ 的不可分解表示都是 $R(Q, \delta)_{1,n}$ 中的正则点. $\square$

再回到线性反馈系统, 回顾一下, 线性反馈群 $\mathbb{F}_{m,n}$ 通过共轭作用作用在系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 上, 一个系统 (B, A) 是系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 中的正则点, 如果它的 $\mathbb{F}_{m,n}$ - 轨道维数取极大值. 文献 [1, 3, 16] 完全刻画了无反馈线性动力系统空间的正则点. 由于 $\mathbb{F}_{m,n} \cong \Lambda_{m,n}$, 且由线性系统的反馈等价类与微分双箭头图 (Q, δ) 的表示的同构类之间的一一对应成立, 即可得下面的推论:

推论 3.1 系统 (B, A) 是系统空间 $\Sigma_{m,n}$ 中的正则点当且仅当它的 Belitskii 典范形具有如下形式:

(1) 若 $m \geq n$, 则

$$[B^\infty \mid A^\infty] = [0_{(m-n) \times n}, I_n \mid \emptyset_{n \times n}];$$

(2) 若 $m < n$, 则

$$[B^\infty \mid A^\infty] = \left[\begin{array}{c|cccccc} I_m & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & I_m & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & I_m & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & \emptyset \end{array} \right].$$

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Tannenbaum A. On the stabilizer subgroup of a pair of matrices. *Linear Algebra Appl*, 1983, 50: 527–544
- 2 Hazewinkel M. Representations of quivers and moduli of linear dynamical systems. In: Martin C F, Herman R, eds. *Proceedings of the Ames Research Center (NASA) Conference on Geometric Control Theory*. Amsterdam: Math Sci Press, 1977, 277–290
- 3 Han Y, Liu M L. Regular points in system spaces. *Linear Algebra Appl*, 2003, 365: 201–213
- 4 Hermida-Alonso J A, Perez M P, Sanchez-Giralda T. Feedback invariants for linear dynamical systems over a principal ideal domain. *Linear Algebra Appl*, 1995, 218: 29–45
- 5 Brunovsky P A. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 1970, 3: 173–187
- 6 Kalman R E. Kronecker invariants and feedback. In: *Ordinary Differential Equations*. Amsterdam: Academic Press, 1972, 459–471
- 7 Wonham W A, Morse A S. Feedback invariants of linear multivariable systems. *Automatica*, 1972, 8: 33–100
- 8 Crawley-Boevey W W. Matrix problems and Drozd's theorem. *Banach Center Publ*, 1990, 26: 199–222
- 9 Belitskii G R. Normal form in a space of matrices (in Russian). In: *Analysis in Infinite-dimensional Space and Operator Theory*. Kiev: Naukova Dumka, 1983, 3–15
- 10 Belitskii G R. Normal forms in matrix spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 2000, 38: 251–283
- 11 Sergeichuk V V. Canonical matrices for linear matrix problems. *Linear Algebra Appl*, 2000, 317: 53–102

- 12 Chen Y, Xu Y G, Li H H, et al. Belitskii's canonical forms of upper triangular nilpotent matrices under upper triangular similarity. *Linear Algebra Appl*, 2016, 506: 139–153
- 13 Chen Y, Nie L J, Xu Y G. Belitskii's canonical forms of linear dynamical systems. *Linear Algebra Appl*, 2017, 531: 533–536
- 14 Xu Y G, Zhang Y B. Indecomposability and the number of links. *Sci China Ser A*, 2001, 44: 1515–1522
- 15 刘先平, 徐运阁. 基于 Belitskii 典范形的参数数的计算. *中国科学: 数学*, 2018, 48: 879–892
- 16 Hinrichsen D, Prätzel-Wolters D. A wild quiver in linear systems theory. *Linear Algebra Appl*, 1987, 91: 143–175

Regular points in linear feedback system spaces

Xianping Liu & Yunge Xu

Abstract In this paper we first give a one-to-one correspondence between linear feedback dynamical systems and representations of “input-state” differential biquiver, and then characterize regular points in linear feedback dynamical system spaces in terms of Belitskii's canonical forms by using representation theory of differential biquiver.

Keywords linear feedback dynamical system, differential biquiver, Belitskii's canonical form, regular point

MSC(2010) 16G20, 15A21, 93C05

doi: 10.1360/N012018-00009