

求解雷达群监视目标群问题的拟物算法

冯玉才 黄文奇 周 旋

(华中理工大学计算机科学系, 武昌 430074)

摘要 解决了雷达群监视目标群这一国际军事学术界一直关注的基本问题。基于拟物的思路为求解三维的监视问题建立了数学模型, 找到了快速实用的近似算法。以此算法为基础可以设计出一种为雷达部队和有关行政商业部门服务的跟踪和监视系统。

关键词 NP 难度 拟物 雷达

在现代科学技术、军事、政治及工商管理业务中, 涌现出大量具有 NP 难度的问题。然而数学及计算机科学近 20 年的研究表明, 对于这些问题客观上根本就不存在既完整精确而又快速实用的求解算法^[1, 2]。

面临这种情况, 人们着手研究非绝对完整但是快速实用的近似算法, 即所谓启发式算法。如何寻求启发? 这是根本的困难。不过, 自然界中的各种现象, 人类生活中的社会经验都是很好的借鉴, 即在面临给定的 NP 难度问题时, 利用它们作比拟可启发出种种策略以制定近似的求解方法。更有甚者, 当得知算法在某个特例之下的疲软表现时, 还可以利用它们十分自然地有针对性地对算法加以改进, 从而得到更强有力的算法。纯粹数学递归论方面的卓越专著, 文献[3]中的许多策略事实上即来源于自然现象与人类的社会经验^[4]。利用这些策略, 数学家们对递归可枚举集作了深入研究, 得到了大量严格的定理。本文就是根据这种思想, 利用拟物方法解决了雷达群监视目标群这一军事上困难而基本的问题, 建立了数学模型, 设计了有效而快速的算法, 并在计算机上计算成功。大量的例子说明, 效果十分理想。

1 问题及其精确提法

炮兵的基本任务之一是要击中飞行着的敌机。其基本思路是先假定飞机是静止目标, 找出解决静止目标的方法后, 再使用外推技术求解运动目标, 这样将一个复杂问题分两步解决可使复杂度大大下降。而这两步中最困难的也是最关键的一步是解决静止目标。炮击飞机的基本问题是已知炮的上前方有一静止目标, 它距炮的水平距离为 l , 垂直高度为 h , 问该炮欲击中此目标, 其炮管高低角 α 应为何值。由于地球引力的存在, $\alpha > \text{tg}^{-1}h/l$ 。又由于空气阻力的存在, 对于函数 $\alpha = \alpha(h, l)$ 不存在有限的解析表达式。因此炮兵的基本问题对于数学家是困难的。经过最近百年来的努力, 最后按实验及数据整理的方式, 此问题得到了妥善解决。注意

在此基本问题中,目标是静止的,而不是运动的.对于运动的飞机,还需加用外推技术,才可解决炮击运动飞机的实际问题.

本文在探寻解决雷达群监视飞机群目标时采用了类似的思路.因此本文只讨论雷达群监视静止目标群的方法,而不涉及外推的有关技术,后一问题将由军事工业部门及应用部门在前一问题的基础上加以解决.

雷达监视目标的基本问题对于空中的 n 个静止目标(飞机),地面上的 m 个雷达如何调整各自的方向,使 n 个目标中的每一个都至少被一个雷达罩住.

为研究方便,我们将对实际问题进行理想抽象,如飞机为一点,雷达的波锥构成一个圆锥,这些圆锥可在空中自由调整方向,以便捕捉目标.其数学模型可描述如下:

在静止的三维 Descartes 坐标系 $o-xyz$ 中任意给定了一个正整数 m , m 个点 (a_1, b_1, c_1) , $(a_2, b_2, c_2), \dots, (a_m, b_m, c_m)$, m 个小于 π 的正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 又给定另一正整数 n 及 n 个点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$. 其中 m 为雷达个数, (a_i, b_i, c_i) , $1 < i < m$, 为第 i 个雷达波锥的顶点坐标; α_i 为雷达波锥的张角; n 为空中静止目标(飞机)的个数; (x_j, y_j, z_j) , $1 < j < n$ 为第 j 个目标的坐标.

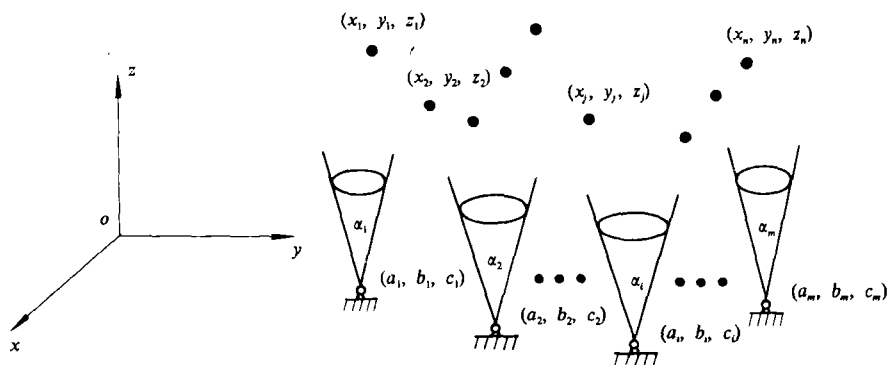


图1 m 个雷达与 n 个飞机的模型图

问题是能否及如何调整 m 个圆锥的方向,使 n 个目标中的每一个都处于某个圆锥之内,即这 m 个圆锥并起来覆盖住 n 个点.由于此问题具有 NP 难度^[2],对它不存在绝对完整而又不是太慢的求解算法,并且迄今为止国内外也未出现大致完整而满意实用的求解这一问题的近似算法.我们亦可称此问题为监视问题.雷达群对敌机群的捕捉问题事实上就是外推化和实时化了的监视问题,另外它在国外一些国家艺术博物馆及超级市场的管理中亦已被作为重要的悬问题(Open Problem)而提出^[9].

2 拟物的想法^[6]

将点 $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ 视为固死在空间的 n 个单位负点电荷,将锥 $1, \dots, m$ 想象为 m 个金属铜质的无穷圆锥,每一锥面上处处都分布着自由的正电荷(电荷密度的分布方式自然地使得锥面为等电势面).锥顶为位置固定的旋转自由的铰支点,于是在静电引力的作用下,有如下的运动景象:

每个未被锥覆盖的点都会按静电引力的规律吸引所有的锥来覆盖自己.但由于屏蔽作用,

当这个点被覆盖时它就立刻对各锥失去吸引力了,而当它又裸露出来时,又及时恢复了对所有铜锥的吸引作用. 在这种引力的驱使下,经过一段时间的往复运动,每一个锥都会被吸引到合适的位置,使每一个点都至少被一个铜锥所罩住.

将以上运动景象精确化、数学化后即可得出求解问题的形式化算法,此时再没有物理的痕迹了.

在以上景象中,锥体沿所受各引力合力的方向运动的法则与计算机科学算法设计与分析中的贪心策略的精神是一致的,而屏蔽现象与纯粹数学现代递归论中专门用于满足许多表面看来互相矛盾的要求的“有穷损害优先方法”的精神是一致的. 按此方法,当一个要求一旦被满足后,它立即停止争夺,并将资源与机会让给别人.

3 算法的导出

3.1 一点一锥系统中的势函数

令无穷铜锥之轴为 z 轴,锥之张角为 α ,铜锥带正电荷,则由于铜为导体,整个锥上电势为常数,不妨设之为 0. 由静电学理论知在锥的外部空间电势 $U(x, y, z)$ 满足 Laplace 偏微分方程式:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

在球坐标下此方程变为

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2)$$

考虑到球坐标下的对称形式, $U(x, y, z) = U(r, \theta, \varphi) = U(\theta)$, 即 U 仅由一个变元 θ 的值确定, 于是方程 (2) 中的第一、第三项为 0, 它被简化为常微分方程:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dU(\theta)}{d\theta} \right) = 0. \quad (3)$$

解之得

$$\sin \theta \cdot \frac{dU(\theta)}{d\theta} = c,$$

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = \frac{c}{\sin \theta},$$

$$U(\theta) = \int \frac{c}{\sin \theta} d\theta = c \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + c_1.$$

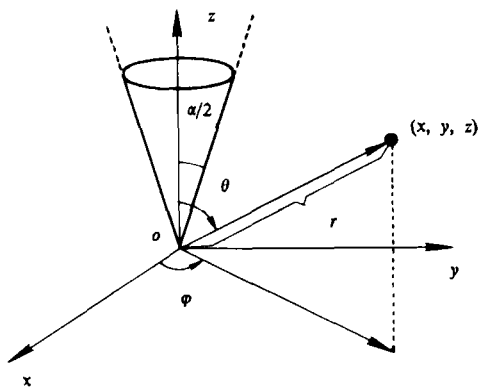


图 2

考虑到锥面上 $U=0$ 的边界条件

$$U\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0.$$

定出常数 $c_1 = -c \cdot \ln \lg \frac{\alpha}{2}$, 再令 $c=1$, 得锥外的静电势 U 的表达式:

$$U = \ln \frac{\lg \frac{\theta}{2}}{\lg \frac{\alpha}{2} / 2}. \quad (4)$$

于是, 由第 j 个点与第 i 个锥构成的系统的静电势函数 U_{ij} 的表达式:

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{若 } \theta_{ij} \leq \frac{\alpha_i}{2}, \\ \ln \frac{\lg \frac{\theta_{ij}}{2}}{\lg \frac{\alpha_i}{2} / 2}, & \text{若 } \theta_{ij} > \frac{\alpha_i}{2}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 θ_{ij} 为第 i 个锥的锥顶射向第 j 个点的射线与第 i 个锥的轴向量间的夹角.

3.2 全系统的势函数

由 m 个锥 n 个点构成的整个系统的势函数如下:

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_j U_{ij}, \quad (6)$$

其中 $\sum_j$ 表示对尚未被任何锥覆盖的诸点求和, U_{ij} 的物理意义与计算按 (5) 式.

3.3 优化计算

问题事实上已转化为对 (6) 式中的势函数 U 求最小值点, 其中

$$U = U(a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_m, \psi_m), \quad (7)$$

其中 a_1 至 z_n 为描写雷达和飞机的已知参数; φ_i, ψ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为变元, 其几何意义为第 i 个锥在空间的 Euler 角 (见图 4).

由 (5), (6) 两式知, (7) 式所表示的 $2m$ 元函数 U 为恒非负的分片光滑的已知可计算函数. 设此势函数 U 的最小值点 $\varphi_1^*, \psi_1^*, \dots, \varphi_m^*, \psi_m^*$ 已经求出, 显然, 若在其上的势函数值 $U^* > 0$, 则问题无解; 若 $U^* = 0$, 则问题已经解决, $\varphi_1^*, \psi_1^*, \dots, \varphi_m^*, \psi_m^*$ 即描写了能完成监视任务的一种对各个锥的方向的布局方式.

3.4 计算程序

以 (7) 式中的 U 求最小值的计算程序很多, 也都品质良好^[7], 其本质都是基于 Cauchy 提出的最陡下降的贪心思想. 这些计算在迭代过程中每前行一步都有鲜明的物理意义, 即每个铜锥都同时沿其所受各未被覆盖的诸点对它的诸吸引力的合力的方向转动一步.

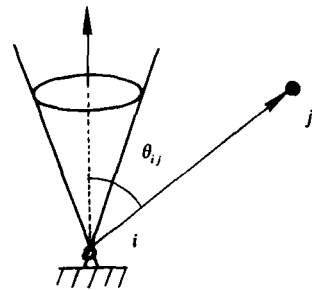
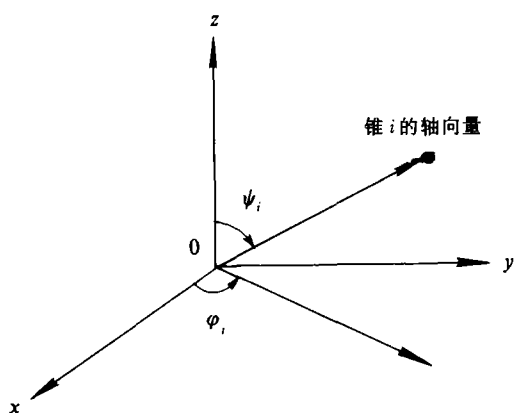


图 3

图 4 φ_i, ψ_i 的几何意义

ψ_i 及 φ_i ($i=1, \dots, n$) 的初值选取分别是用的区间 $[0, 45]$ 及 $[0, 360)$ 中的伪随机数。

表 1 ~ 3 是该算法的计算程序所算出的三个典型实例。它分为三部分：

(1) 雷达固有参数, 其中包括 ① 雷达个数, ② 雷达编号, ③ 雷达位置 (a, b, c) , ④ 雷达张角 α 。

表 1

参数含义		参数值					
雷达固有参数	雷达个数 m	5					
	雷达编号 i	1	2	3	4	5	
	a	1	0	2	3	3	
	雷达位置 b	2	0	1	3	2	
	c	0	0	0	0	0	
	雷达张角 α/rad	0.5	0.6	0.6	0.4	0.7	
飞机固有参数	飞机个数 n	6					
	飞机编号 j	1	2	3	4	5	6
	x	1	4	3	4	2	0
	飞机位置 y	0	1	0	3	4	2
	z	4	4	4	4	4	4
雷达群罩住飞机群时的结果值	最早罩住飞机群的雷达数 m'	4					
	停机时的势能 U	0					
	迭代次数 K	13					
	初值选取次数 K_0	1					
	计算所用时间 t/s	0.274 725					
	雷达编号	1	2	3	4	5	
	雷达波锥轴向量的 Euler角/ $(^\circ)$	φ_i	1.65	25.56	6.38	13.51	2.14
	ψ_i	249.7	351.8	76.49	166.5	309.5	
	雷达号	2	5	2	5	4	1
	罩住了飞机的雷达号码及雷达波锥轴向量与飞机矢径的夹角 θ_{ij} 和雷达的半张角 $(\alpha_i/2)/(^{\circ})$	飞机号	1	2	3	4	5
$\theta_{ij}/(^{\circ})$	11.8	17.3	12.0	19.8	10.5	13.5	
		17.2	20.0	17.2	20.0	11.5	14.3

4 算例与评论

作者在 IBM-PC386 机上算了几十个例子, 本文挑选 3 个有代表性的例子(见表 1 ~ 3), 其具体所用的计算程序是文献[7] 中的 Newton 切线法程序。不过由于所面临的函数存在间断, 为使计算有较好的平稳性, 我们将步长缩小到原始 Newton 切线法步长的 $1/8$ 。当然, 这种种作法都只不过是 Cauchy 最陡下降策略在具体情形下的变态。另外, 势函数的间断性与分片调和的性质还使得我们在求函数梯度时没有使用数值差商以代替微商的技术, 而是直接推导出梯度值。对自变量

表 2

	参数含义	参数值				
雷达固有参数	雷达个数 m	5				
	雷达编号	1	2	3	4	5
	a	0	4	4	0	2
	雷达位置 b	0	0	4	4	2
	c	0	0	0	0	0
	雷达张角 α/rad	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
飞机固有参数	飞机个数 n	5				
	飞机编号	1	2	3	4	5
	x	0	4	4	0	2
	飞机位置 y	0	0	4	4	2
	z	4	4	4	4	4
雷达群罩住飞机群时的结果值	最早罩住飞机群的雷达数 m'	4				
	停机时的势能 U	0				
	迭代次数 K	11				
	初值选取次数 K_0	1				
	计算所用时间 t/s	0.329 670				
	雷达编号	1	2	3	4	5
	雷达波锥轴向量的 Euler角/ $^\circ$ φ_i	42.84	65.35	46.72	48.31	20.71
	ψ_i	43.25	134.4	223.2	323.8	314.5
	雷达号	3	4	1	2	1
	罩住了飞机的雷达号码及雷达波锥轴向量与飞机矢径的夹角 θ_y 和雷达的半张角 $(\alpha_i/2)/^\circ$	1	2	3	4	5
	$\theta_y/^\circ$	8.12	9.44	11.95	10.63	7.66
	$(\alpha_i/2)/^\circ$	14.3	14.3	14.3	14.3	14.3

(2) 飞机固有参数, 其中包括①飞机个数, ②飞机编号, ③飞机位置 (x, y, z) 。

(3) 雷达群罩住飞机群时的各种结果参数值, 包括①实际用到的雷达数, ②停机时的势能总和, ③迭代次数 K , ④初值选取次数 K_0 , ⑤计算所用时间, ⑥雷达罩住飞机时的锥轴向量的 Euler角 (φ, ψ) , ⑦飞机与罩住它的雷达对应号, ⑧锥轴向量(罩住时)与飞机矢径的夹角, ⑨雷达锥的半张角。

前两部分参数为已知数, 第三部分参数为计算结果, 即雷达罩住飞机时的各种参数。其中以锥轴向量的 Euler角 φ_i 及 ψ_i 为所要获得的最关键的数据, 它即表示为了使 m 个雷达罩住 n 个飞机, 各雷达应如何调整自己的方向。当然其计算的迭代次数、初值选取及计算时间也是非常重要的参数, 它表明该算法的优劣。从我们计算的全部例子可以看出该算法确实又快又好, 不失为进行自动调节雷达装置的一种依据。

例 1 表明 5 个雷达监视 6 个飞机, 其参数如表 1, 计算结果, 实际用了 4 个雷达, 迭代次数 13, 初值选取 1 次, 计算时间 0.27 s。注意表中长度单位未指定, 因此, 其中的 1 可代表 1 m, 也可代表 10^3m 或 10^4m 等。

表 1 ~ 3 说明, 本文算法是求解雷达群监视目标群的快速实用近似算法。相关的这些例子中飞机有 2 个到 6 个不等, 雷达有 2 个到 5 个不等, 完成计算的时间为 0.05 s ~ 0.33 s 不等。考虑到 386 机仅为个人电脑, 在实际应用中, 若用更高档计算机, 可获得更快速的时间效果。在本算法基础上, 加以外推与实时化处理, 可以设计出一种为雷达部队及有关行政

表 3

	参数含义	参数值						
雷达固有参数	雷达个数 m	2						
	雷达编号	1	2					
	a	-1	-1					
	雷达位置	b	0	3				
	c	0	0					
	雷达张角 α/rad	0.7	0.7					
飞机固有参数	飞机个数 n	6						
	飞机编号	1	2	3	4	5	6	
	x	-2	0	-2	0	-2	0	
	飞机位置	y	-1	0	1	2	3	4
	z	4	4	4	4	4	4	
雷达群罩住飞机群时的结果值	最早罩住飞机群的雷达数 m'	2						
	停机时的势能 U	0						
	迭代次数 K	8						
	初值选取次数 K_0	1						
	计算所用时间 t/s	0.054 945						
	雷达编号	1	2					
	雷达波锥轴向量的 Euler 角/ $(^\circ)$	φ_i	0.23	1.02				
	ψ_i	251.7	25.56					
	雷达号	1	1	1	2	2	2	
	罩住了飞机的雷达号码及雷达波锥轴向量与飞机矢径的夹角 θ_y 和雷达的半张角	飞机号	1	2	3	4	5	6
$\theta_y/(^\circ)$	19.2	14.1	19.6	19.2	14.9	18.5		
$(\alpha_i/2)/(^\circ)$	20.1	20.1	20.1	20.1	20.1	20.1		

商业部门服务的高效的跟踪及监视系统.

参 考 文 献

- 1 Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP Completeness. San Francisco: Freeman, 1978
- 2 Dorit S. Hochbaum and wolfgang maass, approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI. J of the Association for computing Machinery, 1985, 32(1): 130 ~ 136
- 3 Robert I. Soare, Recursively Enumerable Sets and Degrees, Berlin: Springer Verlag, 1987. 75 ~ 279
- 4 黄文奇. 推测 Sacks 策略的提出. 微电子学与计算机(计算理论专辑), 1988, 3: 1 ~ 4
- 5 O'Rourke J. Art Gallery Theorems and Algorithms. Oxford: Oxford Univ Press, 1987
- 6 黄文奇. 求解 Covering 问题的拟物方法——NP 难度问题的一个处理途径. 计算机学报, 1989, 12(8): 610 ~ 616
- 7 中国科学院数学研究计算站. DJS-21 机标准程序汇编(第二分册). 北京: 科学出版社, 1974