

波动控制中的递减法及谐波滤波器*

王 泉 王大钧

(北京大学力学系, 北京 100871)

梁以德

(香港大学土木及结构工程系, 香港)

摘要 提出了波动控制的递减法并应用于对任意扰动的波动控制, 分析了递减法的溢出问题, 提出谐波滤波器概念以解决溢出问题, 用模态方法和用递减法处理频率密集结构控制的算例表明, 递减法有其发展前景。

关键词 钾分子-原子 扩散带 受激辐射

波动控制的研究在航天结构领域中逐渐引起人们的重视, 可归纳成两方面的原因。

(1) 工程中需要提出新方法。随着航天科学和技术的发展, 出现了一些难于用传统方法, 例如模态方法^[1-3], 解决的振动控制问题。例如, 一些大型柔性结构的扰动传播呈现明显的波动现象; 在一些特殊工作状况下, 某些区域要求始终不受扰动影响; 由于一些材料阻尼的非线性机制, 使并非高阶模态都可忽略。因此, 经典的模态控制方法受到挑战, 需要人们研究新的方法。

(2) 在波动控制研究中需要建立体系。关于波动控制的研究, 已有不少工作。Von Flotow^[4-6]和其他一些研究者^[7,8]提出了新的方法和方向, 但后续工作显得零散而不成体系。需要建立系统的理论体系, 以推动波动控制研究的发展。

本文提出一种波动控制的新方法——递减法。它适用于一系列谐波以及任意波。本文还分析了该方法的溢出问题, 给出了谐波滤波器的方法以解决溢出问题。这一套方法具有下列意义: 从另一角度来解决振动控制问题; 对解决波动控制问题具有一定普遍性; 利用此法可能解决一些结构振动控制中的难题, 如频率密集的结构振动控制。数值算例表示, 在某些情况下, 递减法比模态控制法有效。本文还是初步的, 有待完善和推广。

1 波动中的递减法^[9-11]

考虑如下分布参数系统

$$\ddot{u} + L_n u = 0, \quad (1)$$

其中 L_n 是一线性算子, 对均弦法或杆, $L_n = -\partial^2/\partial x^2$, 对均匀梁, $L_n = \partial^4/\partial x^4$ 。

方程 (1) 的谐波解的向右传播部分表示为

$$u(x, t) = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)}, \quad (2)$$

1995-04-02 收稿, 1995-09-16 收修改稿

* 国家自然科学基金和高等学校博士点专项基金资助项目

其中 λ 是波长, c 是波速, $i = \sqrt{-1}$.

在方程 (1) 的右端引入反馈算子,

$$\dot{w} + L_n w = L' w. \quad (3)$$

令

$$w(x, t) = A(x)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)} = A(x)u(x, t), \quad (4)$$

其中 $A(x)$ 是解的衰减系数.

表达式 (4) 表示新系统的波动解, 它的波幅沿空间衰减.

将 (4) 式代入方程 (3), (2) 式代入方程 (1) 后, 有

$$u \left[L_n A(x) + C_n^j (jk)^{n-j} \sum_{j=1}^{n-1} L_j A(x) \right] = L' A(x) u, \quad (5)$$

其中 $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$, 对梁 $L_j = \partial^j / \partial x^j$, 对弦或杆, $L_j = -\partial^j / \partial x^j$. 方程 (5) 给出反馈算子和衰减系数间的关系. 当算子 L' 给定后, $A(x)$ 可以被确定. 反之, 也可由给定的 $A(x)$ 确定 L' .

解 $w(x, t)$ 也可写成

$$w(x, t) = B(t)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)} = B(t)u(x, t). \quad (6)$$

这意味着波幅随时间衰减.

类似于方程 (5), 关于 $B(t)$ 和反馈算子 L' 的关系是

$$2\dot{B}u + \ddot{B}u = L' Bu. \quad (7)$$

应该指出, 将上述由分布参数形式表达的控制力施加于结构上是可能的, 借助于智能材料和智能结构是一种途径. 这意味着上述理论的实际物理背景.

2 结构的波动控制^[9]

这里, 我们给出一个研究振动控制的新想法, 就是从基于递减法的波动控制方法来解决振动控制问题.

问题的提法为, 如何利用递减法控制结构中初始扰动的传播.

具有边界条件和初始条件的运动方程是

$$\begin{aligned} \dot{w} + Lw &= f(x, t), \\ B_i w &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ w(x, 0) &= a(x), \quad \dot{w}(x, 0) = b(x), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 B_i 是边界条件算子, r 是边界条件的个数.

反射波的解如下

令 $w^L(x, t)$ 和 $w^R(x, t)$ 分别是向左和向右传播的波动解, R^L, R^R 是反射算子, $P(x)$ 是传播算子. 于是

$$\begin{aligned} w^R(0, t) &= R^L w^L(0, t), \quad w^L(l, t) = R^R w^R(l, t), \\ w^R(x, t) &= P(x) w^R(0, t), \\ w^L(x, t) &= P(1-x) w^L(l, t). \end{aligned}$$

令 $w_{(1)}, w_{(2)}, \dots$ 是第一次反射、第二次反射、 \dots 后的波动解, 有

$$w_{(1)} = P(x)R^L w^L(0, t) + P(l-x)R^R w^R(l, t) = w_{(1)}^R + w_{(1)}^L, \quad (9)$$

$$w_{(2)} = P(x)R^L w_{(1)}^L(0, t) + P(l-x)R^R w_{(1)}^R(l, t) = \quad (10)$$

$$P(x)R^L P(l)R^R w^R(l, t) + P(1-x)R^R P(l)R^L w^L(0, t) = w_{(2)}^R + w_{(2)}^L,$$

等等.

初始条件能表示为谐波的级数

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{j \frac{2\pi x}{l}}, \quad b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i e^{j \frac{2\pi x}{l}}, \quad (11)$$

然后, 每一向左和向右传播的谐波可以找到.

於是, 用设计第一谐波的衰减率能控制初始扰动的传播.

3 递减法的溢出问题

递减法存在控制溢出问题. 令 $L' = g_1 + g_2 \frac{\partial}{\partial t}$, 谐波的衰减

$$B_j = e^{(p_j + i q_j)t}, \quad j = 1, 2, \dots$$

称 p_j, q_j 为谐波衰减率.

将上式代入方程(7), 有

$$p_j^2 - q_j^2 - p_j q_j + 2k_j c q_j - g_1 = 0, \quad (12)$$

$$2p_j q_j - 2k_j c p_j - g_2 q_j + g_2 k_j c = 0, \quad (13)$$

其中 $k_j = \frac{j2\pi}{l}$.

由某些指定的谐波衰减率 p_j, q_j 确定 g_1 和 g_2 后, 其他谐波的衰减率由这些 g_1 和 g_2 确定.

如果 $B_j(t)$ 中的每一 p_j 都是负的, 则不存在控制的溢出问题, 否则, 就会出现溢出.

这里给出一个例子. 对于一根弦, 两个衰减率指定为 $p_1 = -1.0, p_2 = -0.9$. 由方程(12)和(13)确定出 g_1 和 g_2 . 然后, 其他谐波的衰减率由计算得到, 如下所示

j	p	q
1	-1.000 0	-1.000 0
2	-0.896 2	0.628 3
3	-0.792 7	-0.587 8
4	0.613 4	0.420 9
5	-0.497 7	-0.270 6
6	0.417 9	0.158 4
7	-0.359 8	-0.145 9
8	0.315 7	0.089 7
9	-0.281 2	-0.089 1
10	0.253 4	0.058 4

在这种情况下, 将发生溢出.

4 谐波滤波器概念

为了从理论上解决溢出问题, 我们提出谐波滤波器概念.

方程(3)的响应可表达为谐波的级数

$$w(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(t) \varphi_j(x),$$

这里 $\Phi_j(t) = B_j(t)e^{jk_j t}$, $\varphi_j(x) = e^{jk_j x}$.

将上式代入方程(3), 于是

$$\ddot{\Phi}_j(t) + (k_j c_j)^2 \Phi_j(t) = F_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

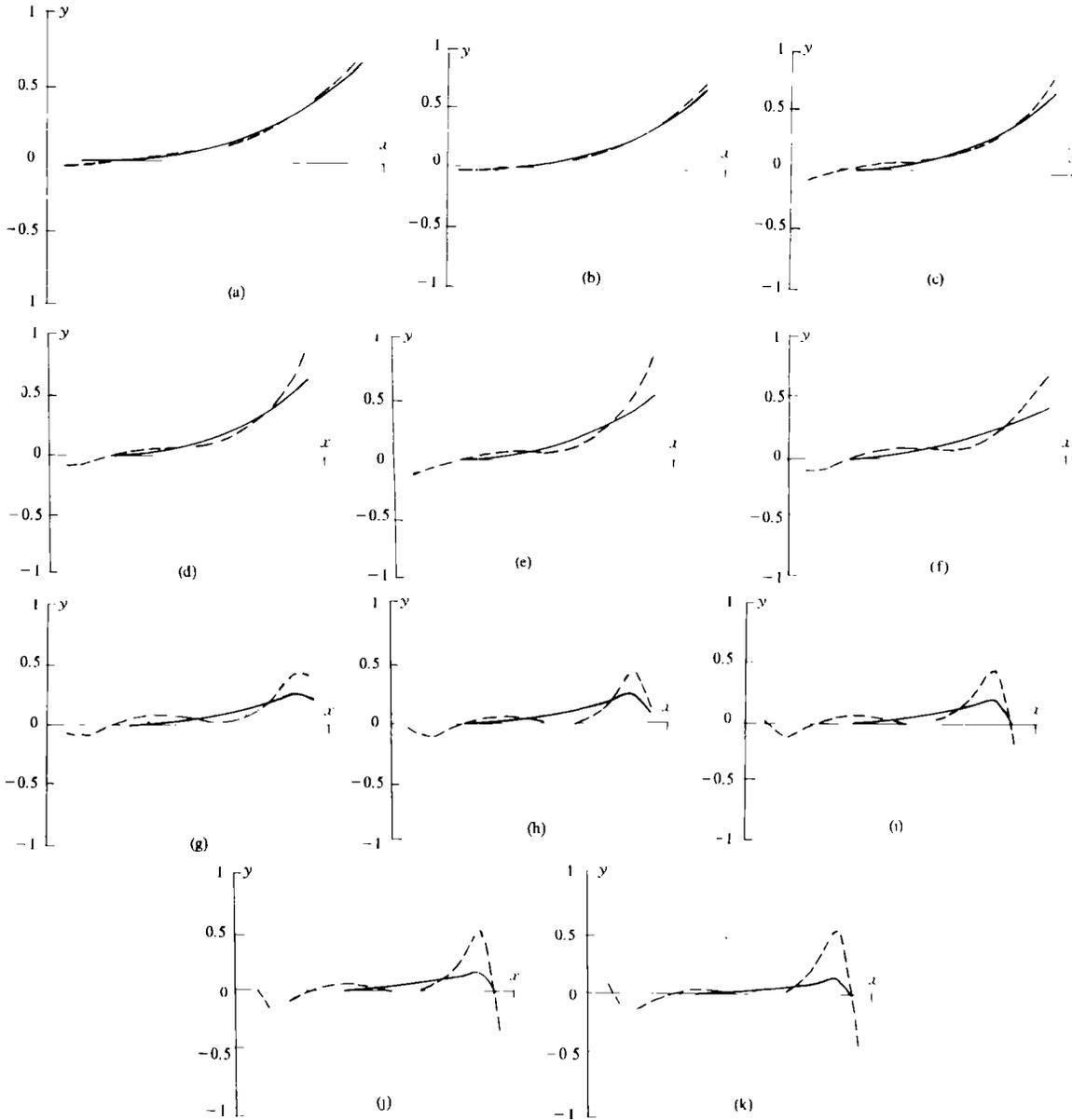


图 1 Euler 梁的振动控制
x 为梁轴, y 为梁的位移

其中 $F_j(t)$ 是谐波控制力. 系统的控制力是

$$f(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t) \varphi_j(x). \tag{15}$$

将 $F_j(t)$ 设计成 $F_j(t) = L'_j \varphi_j(t)$, 例如

$$F_j(t) = g_{1j} \Phi_j(t) + g_{2j} \dot{\Phi}_j(t). \tag{16}$$

可以看到, 不同谐波的的控制力是正交的. 所以, 可以通过设计每一谐波的的控制力以确定总的控制力, 达到避免溢出的目的.

作为一个例子, 分析一悬臂 Euler 梁, 初始条件是

$$u(x, 0) = x^3/l^3, \dot{u}(x, 0) = 0.$$

首先, 用不带谐波滤波器的递减法分析该梁的振动控制. 由前两阶谐波的衰减率设计控制力. 梁的位移由图 1(a)~(k) 中的虚线表示. 取了 11 个时间步长, 无量纲步长 $\Delta t = 0.05$. 可以看到, 由于控制溢出, 结构是不稳定的.

然后, 用谐波滤波器的概念设计控制力. 梁的位移由图 1(a)~(k) 中的实线表示. 运动得到控制. 因此, 谐波滤波器的引入是有效的.

5 解决具有密集频率的结构振动控制的一种尝试

具有密集频率的结构的振动控制问题, 用传统的模态控制法^[1] 求解, 遇到很大困难, 其原因是对应密集频率的模态对于结构参数变化特别敏感. 我们试图用波动递减法和谐波滤波器方法解决这一问题. 因为这种方法不依赖于模态.

现用图 2 所示的离散系统的例子来说明方法的运用. 离散系统的递减法可参考文献[11]. 在例中, 不失一般性, 令 $m_i = 1, (i = 1, 2, \dots, 10)$.

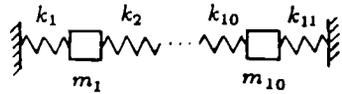


图2 频率密集的系统

如果 k_1 和 k_{11} 比 $k_i (i = 2, 3, \dots, 10)$ 大很多, 例如 $k_1 = 1, k_{11} = 0.97, k_2 = k_3 = \dots = k_{10} = 0.03$, 此时第 9 阶和第 10 阶频率非常接近.

如果 k_1 和 k_{10} 有很小的变化, 例如, k_2 至 k_{10} 不变, $k_1 = 0.95, k_{11} = 1.02$, 则第 9 阶和第 10 阶频率只有很小的变化, 但第 9 阶和第 10 阶模态发生了很大的变化, 分别如图 3(a) 和 (b) 所示, 其中原系统的模态用实线表示, 变化后的系统的模态用虚线表示.

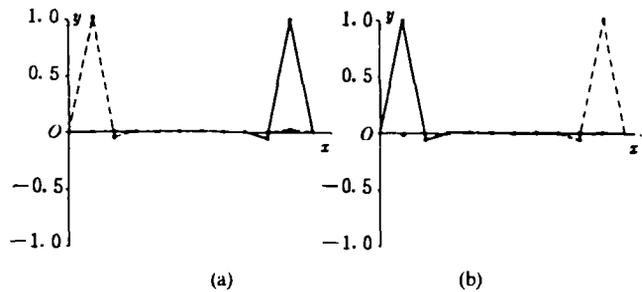


图3 第9阶和第10阶模态的变化 (a)为第9阶, (b)为第10阶

考虑在初始扰动

$$y_i = \sin i \frac{\pi}{11}, \dot{y}_i = 0, i = 1, 2, \dots, 10$$

下系统的振动控制.

首先用模态控制法, 用 10 阶模态进行控制, 令各阶模态衰减率为 -0.6 , 用变化前的参数设计控制规律, 分别作用于原系统和变化后的系统. 原系统和变化后的系统受控制后的位移

分别用实线和虚线绘于图 4 中, (a)~(f) 表示随时间增长的 6 个时刻的位移. 时间步长 $\Delta t=0.05$. 可以看出, 当系统参数有了小的扰动, 用原系统设计的控制规律作用于变化后的系统是不适合的, 可能导致系统不稳定.

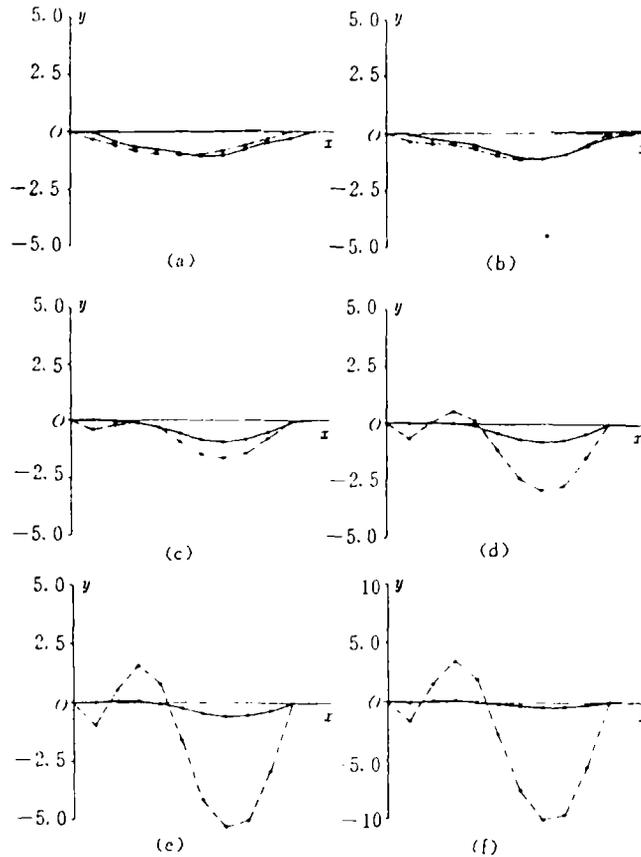


图 4 用模态控制法进行振动控制
x 为质量位置, y 为质点位移

然后, 用递减法和谐波滤波器方法分析此系统, 对前 10 阶谐波进行控制. 由原系统指定的衰减率设计的控制规律作用于变化后的系统, 得到变化后的系统的衰减率. 两者的衰减率变化也只是小量, 运动也基本相同. 图 5(a)~(j) 是 10 个时刻的位移, $\Delta t=0.05$. 两个系统的位移在图中无法辨别. 它们都得到有效的控制.

6 结论

带谐波滤波器的递减法是结构波动控制理论中一种新的、有发展前景的方法. 它也可用来处理振动控制问题, 此时, 它可以避免模态控制法的一些缺点, 尤其是在处理频率密集的结构振动控制时, 显得更为突出.

分布的控制力可以用两种方法实现, 智能材料或用许多集中力近似.

将本文方法扩展到二维结构, 如板、壳, 是有吸引力的.

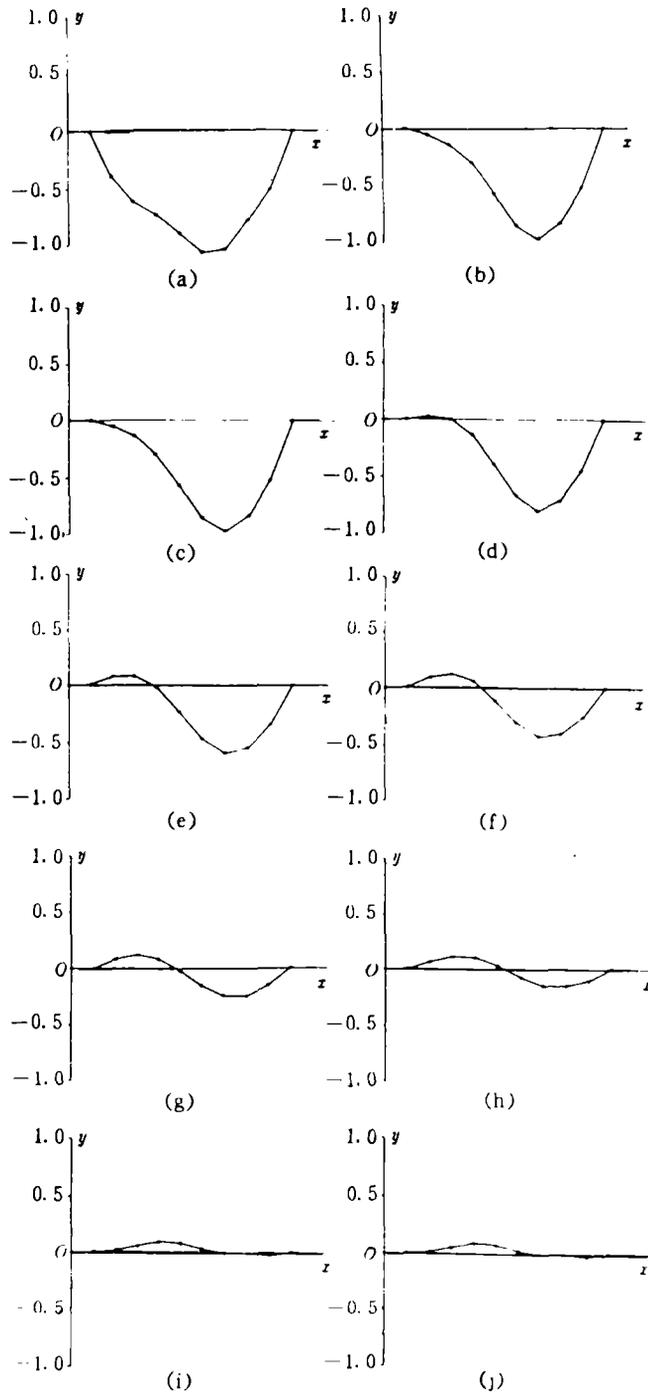


图5 用递减法进行振动控制
 x 为质点位置, y 为质点位移

参 考 文 献

- 1 Meirovitch L, Oz H. Modal space control of large flexible spacecraft possessing ignorable coordinates. *J of Guid Contr and Dyn*, 1980, 3: 569~577
- 2 Meirovitch L, Quinn R D. Maneuvering and vibration control of flexible spacecraft. *J of Astronautical Sciences*, 1987, 35: 301~328
- 3 Meirovitch L, Ghosh, D. Control of flutter in bridges. *ASCE J of Engineering Mechanics*, 1987, 113: 720~736
- 4 Von Flotow A H, Schafer B. Wave absorbing controllers for a flexible beam. *J Guid Contr and Dyn*, 1986, 9: 637~680
- 5 Signorilli J, Von Flotow A H. Wave propagation, power flow, and resonance in a truss beam. *J sound and Vibration*, 1988, 126: 127~140
- 6 Miller D W, Von Flotow A H. Power flow in structural net works. *J Sound and Vibration*, 1989, 128: 145~162
- 7 Tanaka N, Kikushima Y. Active wave control of a flexible beam (Proposition of the active sink method). *JSME Inter J Series I*, 1991, 34: 159~167
- 8 Tanaka N, Kikushima Y. Active wave control of a flexible beam (Fundamental characteristic of an active sink system and its verification). *JSME Inter J Series I*, 1992, 35: 236~244
- 9 Wang Q, Wang D J. Some methods and problems in structural wave control. *Proc of Asia and Pacific conference on Aerospace Technology and Science*, Hangzhou, Oct., 1994. Int. Academic Publishers, 1994
- 10 Wang Q, Wang D J. A Reduced order model about structural wave control based upon the concept of degree of controllability. *IEEE Trans. on Autom Control*, 1994, 39(8): 1711~1713
- 11 王 泉, 王大钧. 结构波动控制中的递减法. *自然科学进展——国家重点实验室通讯*, 1994, 4(3): 371~374