

基于冗余字典的信号超完备表示与稀疏分解

张春梅 尹忠科 肖明霞

(西北第二民族学院电信系, 银川 750021; 西南交通大学信息科学与技术学院, 成都 610031.

E-mail: zhangchm@nxyu.edu.cn)

摘要 基于冗余字典的信号稀疏分解是一种新的信号表示理论, 采用超完备的冗余函数系统代替传统的正交基函数, 从而为信号自适应地稀疏扩展提供了极大的灵活性. 稀疏扩展一方面可以实现数据压缩的高效性, 更重要的是可以利用字典的冗余特性捕捉原始信号的自然特征. 本文从超完备信号稀疏分解和非线性逼近理论的一系列最新成果出发, 综述了基追踪和匹配追踪等主流算法在信号表示方面的稀疏性与字典相干系数的关系问题, 评述了目前字典构成的发展趋势.

关键词 超完备表示 冗余字典 稀疏分解 基追踪 匹配追踪

在众多的信号处理应用中, 人们希望找到一种稀疏的数据表示, 用稀疏逼近取代原始数据表示可从实质上降低信号处理的成本, 提高压缩效率. 传统的信号表示理论基于正交线性变换, 但许多信号是各种自然现象的混合体, 这些混合信号在单一的正交基变换中不能非常有效地表现出来. 例如, 一个含有脉冲和正弦波形的混合信号, 既不能用单一的脉冲基函数, 也不能用单一的正弦基函数有效地表示. 在这个例子中, 有两种结构类型同时出现在信号里, 但它们却完全不同, 其中哪一个都不能有效地模拟另一个. 所以, 人们希望寻找一种能够同时建立在两种基函数之上的信号表示, 其结果应该比采用其中任一种基函数有效得多.

在图像和视频处理方面, 常用的信号分解方式通常是非冗余的正交变换, 例如离散余弦变换、小波变换等. 离散余弦变换其基函数缺乏时间/空间分辨率, 因而不能有效地提取具有时频局部化特性的信号特征. 小波分析在处理一维和二维的具有点状奇异性的对象时, 表现出良好的性能, 但图像边缘的不连续性是按空间分布的, 小波分析在处理这种线状奇异性时效果并不是很好. 因而说, 小波分析对于多维信号来说并不是最优的, 不能稀疏地捕捉到图像结构的轮廓特征, 因此在图像和多维编码方面的新突破, 必定取决于信号表示的深刻变革.

最近几年, 研究人员在改变传统信号表示方面取得了很大的进展. 新的信号表示理论的基本思想就是: 基函数用称之为字典的超完备的冗余函数系统取代, 字典的选择尽可能好地符合被逼近信号的结构, 其构成可以没有任何限制, 字典中的元素被称

为原子. 从字典中找到具有最佳线性组合的 m 项原子来表示一个信号, 称作信号的稀疏逼近或高度非线性逼近^[1].

从非线性逼近的角度来讲, 高度非线性逼近包含两个层面: 一是根据目标函数从一个给定的基库中挑选好的或最好的基; 二是从这个好的基中挑选最好的 m 项组合. 利用贪婪算法和自适应追踪, 从一个冗余函数系统中进行 m 项逼近或阈值逼近也属此例. 我们对高度非线性逼近方法的理解只是些零星的片段, 用高度非线性方法以指定的逼近速率来描述函数仍然是一个富有挑战的问题^[2].

从基函数的形成来讲, 在图像表示方面体现为多尺度几何分析^[3], 无论是曲波(curvelets)^[4]、带波(bandlets)^[5], 还是仿形波(contourlets)^[6], 都要求基函数应具备下述特点: () 多分辨率分析, () 时频定位能力, () 全角度分析(方向性), () 各向异性的尺度变换. 这些新的冗余函数系统的不断涌现, 使信号稀疏表示的方法更加成为研究的热点.

超完备信号稀疏表示方法肇始于 20 世纪 90 年代, 1993 年 Mallat 和 Zhang 首次提出了应用超完备冗余字典对信号进行稀疏分解的思想, 并引入了匹配追踪(marching pursuit, MP)算法^[7]. 在这篇文献中, 作者用自然语言表述浅显的类比, 说明超完备冗余字典对信号表示的必要性, 同时强调字典的构成应较好地符合信号本身所固有的特性, 以实现 MP 算法的自适应分解.

新思想的提出引起人们极大的关注, 但由于算法所涉及的计算量十分繁重, 因而早期研究的焦点集中在如何实现算法的快速计算, 降低算法的复杂

度, 以及选择何种类型原子构造合适的字典两方面. 这期间, 许多音视频信号处理方面的实验都对 MP 算法做出了有利的支持, 尤其在甚低码率视频编码方面, MP 算法更显示出极大的优越性^[8].

1999 年 Donoho 等人^[9]又另辟蹊径, 提出了基追踪(basis pursuit, BP)算法, 并从实验的角度举证了 MP, MOF^[10]和 BOB^[11]算法各自的优劣. 稍后, 又在 2001 年发表的另一篇重要文章^[12]中, 给出了基于 BP 算法的稀疏表示具有惟一解的边界条件, 并提出了字典的互不相干性的概念.

本文以稀疏信号的精确重构条件为主线, 综述了基于冗余字典的信号稀疏分解和非线性逼近领域的一系列最新理论成果.

1 信号的稀疏逼近

1.1 稀疏逼近的定义

高度非线性逼近理论主要关注下述问题: 给定一个集合 $\mathcal{D} = \{g_k, k=1, 2, \dots, K\}$, 其元素是张成整个 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ 的单位矢量, $K \geq N$, 我们称集合 $\mathcal{D}$ 为字典, 其元素为原子. 对于任意给定的信号 $f \in \mathcal{H}$, 我们预想在 $\mathcal{D}$ 中自适应地选取 m 个原子对信号 f 作 m 项逼近

$$f_m = \sum_{\gamma \in I_m} c_\gamma g_\gamma, \quad (1)$$

其中 I_m 是 g_γ 的下标集, $\text{card}(I_m) = m$, 则 $\mathcal{B} = \text{span}(g_\gamma, \gamma \in I_m)$ 就是由 m 个原子在字典 $\mathcal{D}$ 中张成的最佳子集. 我们定义逼近误差为

$$\sigma_m(f, \mathcal{D}) = \inf_{I_m} \|f - f_m\|, \quad (2)$$

由于 m 远小于空间的维数 N , 这种逼近也被称作稀疏逼近. 鉴于字典的冗余性 ($K > N$), 矢量 g_k 不再是线性独立的, 因而表达式 (1) 有多种解答, 不同组合中原子所张成的子空间 $\mathcal{B}$ 构成字典 $\mathcal{D}$ 中不同的向量基. 从稀疏逼近的角度出发, 我们希望在满足条件 (2) 的前提下, 从各种可能的组合中, 挑选出分解系数最为稀疏的一个, 或者说 m 取值为最小的一个. 当 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{H}$ 空间的一个正交基, 如何得到信号 f 的最佳 m 项逼近就是一件显而易见的事, 即保留与 f 的内积 $\langle f, g_\gamma \rangle$ 最大的 m 个基原子, 然而对于一个随机的冗余字典来说, 这是一个 NP (nondeterministic polynomial time) 难问题^[13].

1.2 非相干字典

要想在冗余字典中获得高度非线性逼近的建设性结果, 我们必须首先将注意力集中在某些特别的字典上. 许多研究人员瞄准了非相干字典, 也就是说相干系数 μ 小于某个常数的字典. 相干系数的定义为

$$\mu = \sup_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |\langle g_i, g_j \rangle|. \quad (3)$$

当相干系数较大时, 原子间的相互关联也较强. 如果 $\mu = 1$, 则意味着字典中至少包含了两个一模一样的原子. 反之, 当相干系数较小时, 我们就称字典是非相干的, 正交基的相干系数为零.

相干系数为字典的冗余性提供了另一种可能的测度手段. (3) 式说明当 μ 充分小时, 字典 $\mathcal{D}$ (虽然可能是超完备的) 接近一个正交基.

2 稀疏信号的精确重构条件

上世纪九十年代初期, MP 作为一种寻找信号稀疏表示的策略首先被引入, 以代替框架表示方法. 很快, 研究人员便在实验中发现, 如果 f 在 $\mathcal{D}$ 中有非常稀疏的扩展, 并且 $\mathcal{D}$ 是由三角函数和 Dirac 函数组成的字典, 那么通过 BP 算法, 这个稀疏扩展就可以完全重构. 实验的观察结果很快转入一系列理论的证明, 首先得到验证的是两个正交基的联合^[12,14,15], 然后是数个不相干基的联合以及更普遍的准不相干字典^[16~20].

2.1 基追踪

要找到最好的, 也就是最稀疏的信号表示, 等同于解决下述问题:

$$\min \|c\|_0 \quad \text{s. t.} \quad f = \sum_{k=0}^{K-1} c_k g_k, \quad (4)$$

其中 $\|c\|_0$ 是序列 $\{c_k\}$ 中非零项的个数. 如前所述, 从一个随机冗余字典中寻找信号的稀疏扩展是一个 NP 难问题, 为解决这一难点, Chen, Donoho 和 Saunders 提出解决下述稍有差别的问题:

$$\min \|c\|_1 \quad \text{s. t.} \quad f = \sum_{k=0}^{K-1} c_k g_k. \quad (5)$$

这一微妙的修改, 转化了问题的性质. 的确, 最小化 l_1 范数, 被称为 Basis Pursuit 或 BP, 是较为简单的问题, 可以通过线性规划的方法解决^[9,21,22]. 文献[9]所提出的 BP 算法结合了当前线性规划以及基于字典结构的特定快速变换, 但计算复杂度仍很大, 对

于结构不好的字典来说算法也不可靠. 最近, 由Tropp^[23]提出的凸松弛法和Wang等人^[24]提出的MF神经网络的方法似乎是一个很好的方向.

在Donoho和Huo^[12]的研究基础上, Elad和Bruckstein^[14]证明了下述引人注目的定理:

定理1 设 $\mathcal{D}$ 是一个相干系数为 μ 的字典, 如果一个信号 $f \in \mathbb{R}^N$ 可以表示为

$$f = \sum_{i=0}^m c_i g_i, \quad (6)$$

并且 $\|c\|_0 < 1/\mu$, 则(6)式就是 f 在 $\mathcal{D}$ 中的惟一的最稀疏扩展式.

这一结果说明, 虽然冗余性排除了扩展的惟一性, 但如果字典是不相干的, 仍然可以找到充分稀疏的惟一解. 也就是说, 如果 f 在 $\mathcal{D}$ 中有非常稀疏的扩展, 那么通过BP算法, 这个稀疏扩展就可以精确重构.

定理2 如果信号 f 在字典 $\mathcal{D}$ 中有一个稀疏表示, 并且满足

$$\|c\|_0 < \frac{\sqrt{2}-0.5}{\mu},$$

则最小化问题 l_1 有一个惟一解, 它也是最小化问题 l_0 的解.

这个结果意味着, 我们可以通过BP用较为简单的问题 l_1 , 取代原始的寻找 f 最稀疏表示的组合优化问题. 换句话说, 字典 $\mathcal{D}$ 的非相干性帮助我们解决了NP难问题.

2.2 匹配追踪及其变种

尽管使用了线性规划方法, 基追踪法由于要在所有字典向量的不同组合中寻求满足算式(5)成立的极小化 $\|c\|_1$ 的解, 其计算仍是繁琐的, 人们转而采用能够求解局部最优的贪婪算法以取代求 $\|c\|_0$ 的全局最优, 以减少计算的复杂性. MP是一个迭代的贪婪算法, 它是在每一次迭代过程中, 从字典里选择最能匹配信号结构的一个原子而构建的一种逼近过程. 在统计学界, MP被称作投影跟踪^[25,26], 在逼近学领域, 被称为纯贪婪算法^[27].

假设在 $\mathcal{D}$ 中所有原子的范数都为1, 算法在初始化时, 设 $R_0 = f$, 我们可以首先将信号分解为

$$R_0 = \langle g_{\gamma_0}, R_0 \rangle g_{\gamma_0} + R_1, \quad (7)$$

其中, $\langle g_{\gamma_0}, R_0 \rangle g_{\gamma_0}$ 是 R_0 在 $\text{span}\{g_{\gamma_0}\}$ 上的投影, R_1

是剩余量. 显然, g_{γ_0} 是与 R_1 正交的, 所以我们可以得到下式

$$\|R_0\|^2 = \left| \langle g_{\gamma_0}, R_0 \rangle \right|^2 + \|R_1\|^2. \quad (8)$$

如果我们想使剩余量 R_1 的能量最小化, 就必须使投影值 $\left| \langle g_{\gamma_0}, R_0 \rangle \right|$ 极大化. 我们简单地对剩余量实施同样的步骤, 并设定

$$\left| \langle g_{\gamma_m}, R_m \rangle \right| = \sup_{\gamma \in I} \left| \langle g_{\gamma}, R_m \rangle \right|, \quad (9)$$

$$f_{m+1} = f_m + \langle g_{\gamma_{m+1}}, R_{m+1} \rangle g_{\gamma_{m+1}}, \quad (10)$$

$$R_{m+1} = f - f_{m+1}, \quad (11)$$

则在第 M 步, 可得到下面的逼近:

$$f = \sum_{m=0}^{M-1} \langle g_{\gamma_m}, R_m \rangle g_{\gamma_m} + R_M, \quad (12)$$

其中剩余量的范数(逼近误差)满足

$$\|R_M\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{M-1} \left| \langle g_{\gamma_m}, R_m \rangle \right|^2, \quad (13)$$

对于无限维空间的字典, (9)式中的上确界不一定能达到, 因而可以考虑下述选择规则, 使 $\left| \langle g_{\gamma_m}, R_m \rangle \right|$ 几乎为最优:

$$\left| \langle g_{\gamma_m}, R_m \rangle \right| \geq \alpha \sup_{\gamma \in I} \left| \langle g_{\gamma}, R_m \rangle \right|, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (14)$$

这个算法被称为弱匹配追踪^[28], 其中, $\alpha \in (0, 1]$ 是一个最优性因子.

纯贪婪算法的一个明显缺点就是, 在已选原子组成的子空间 $\mathcal{V}_m := \text{span}(g_{\gamma_1}, \dots, g_{\gamma_m})$ 上, 信号的扩展可能不是最好的, 因为它不是一个正交投影. 正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)^[29]递归地对所选原子的集合进行正交化, 解决了这个问题. 它采用下述规则代替(10)式:

$$f_{m+1} = P_{\mathcal{V}_{m+1}} f, \quad (15)$$

其中 $P_{\mathcal{V}}$ 是到无限维子空间 $\mathcal{V}$ 上的正交投影算子.

2.3 MP的收敛与重构

在一系列精确重构稀疏信号的理论证明中, Tropp^[16]提出了一个较为通用的理论, 他将OMP和BP的重构问题统一在一个单一的充分条件中.

定理3 给定一个字典 $\mathcal{D}$, 其相干系数为 μ , 只要满足条件

$$m < \frac{1}{2}(\mu^{-1} + 1), \quad (16)$$

则OMP和BP二者都可以从字典 $\mathcal{D}$ 中重构 m 项原子

的组合.

与 OMP 比较, 在理论方面对 MP 性能的论证似乎更困难一些. 虽然在有限维空间, MP 算法的逼近误差按指数级衰减:

$$\|R_m\| \leq (1 - \alpha^2 \beta^2)^{m/2} \|f\|, \quad (17)$$

或

$$\|f_m - f\|^2 \leq \varepsilon^m \|f\|^2, \quad (18)$$

其中, 参数 β 取决于字典的结构, 它表示字典函数捕捉任意输入信号特征的能力:

$$\sup_{\gamma \in I_m} \left| \langle f, g_\gamma \rangle \right| \geq \beta \|f\|. \quad (19)$$

对于无限维空间, Jones^[30]证明 MP 仍然是收敛的, 但没给出收敛速率. DeVore 和 Temlyakov^[28]给出的反例显示: 对于一个“好”的函数, 可以找到一个“坏”的字典, 使 MP 做出很“差劲”的表现. 这说明, 需要对字典 $\mathcal{D}$ 和(或)信号 f 做某种限制, 以使 MP 具备好的逼近行为. 诚然 Villemoes^[31]给出的正面的例子验证了 MP 在 Walsh 小波包字典中表现良好, 但直到 Gribonval 和 Vanderghyest^[32]对 MP 算法在理论上做出了相应的证明, 才使 MP 算法有了充分的理论依据.

定理 4 设 $\mathcal{D}$ 是有限或无限维 $\mathcal{H}$ 空间的一个字典, 其相干系数为 μ , 对于满足任意有限下标集 $\text{card}(I_m) = m < (1 + \mu^{-1})/2$ 的函数 $f = \sum_{\gamma \in I_m} c_\gamma g_\gamma \in \text{span}(g_\gamma, \gamma \in I_m)$, MP 可以

1) 在每一步挑选出惟一“正确”的原子 g_{k_n} ($\forall n, k_n \in I_m$);

2) f_n 按指数率收敛

$$\|f_n - f\|^2 \leq [(1 - 1/m)(1 + \mu)]^n \|f\|^2. \quad (20)$$

定理 4 解释了在 f 可以表示为精确扩展的条件下 MP 的性能. 但大多数情况下, 信号或图像在实际的字典中只能表示为某些原子线性组合的逼近, 这种情况可由下述定理描述.

定理 5 设 $\{f_n\}$ 是 $f \in \mathcal{H}$ 在 MP 算法下经过 n 次迭代产生的逼近序列, 设 $m < (1 + \mu^{-1})/4$, 并且,

$\tilde{f}_m = \sum_{k \in \tilde{I}_m} c_k g_k$ 是 f 在字典 $\mathcal{D}$ 中的最佳 m 项逼近, 即 $\|\tilde{f}_m - f\| = \sigma_m(f) := \inf\{\|f - D_I c\|, \text{card}(I) \leq m, c \in \mathbb{C}^I\}$, (21)

那么, 存在一个整数 N_m , 使得

1) 在第 N_m 次迭代时, 满足

$$\|f_{N_m} - f\| \leq \sqrt{1 + 4m} \sigma_m; \quad (22)$$

2) 在第 N_m 次迭代过程中, MP 从最佳 m 项逼近 $k_n \in \tilde{I}_m$ 中挑选出相应的原子;

3) 如果 $\sigma_m^2 < 3\sigma_1^2/m$, 那么

$$N_m \leq 2 + m \cdot \frac{4}{3} \cdot \ln \frac{3\sigma_1^2}{m\sigma_m^2}. \quad (23)$$

定理 4 和 5 在稀疏逼近的收敛率上为 MP 算法提供了很好的理论依据.

3 超完备不相干级联字典

在 N 维有限空间的两个正交基级联的字典, 其相干系数 $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$, 如果两个正交基包含一个公共原子, 则其相干系数 $\mu = 1$. 因此, 如果一个完全由正交基级联而成的字典其相干系数为 $\mu = 1/\sqrt{N}$, 这个级联字典就被认为是(完全)不相干的.

Dirac 函数和三角函数是两类最基本的正交基, 任意一个 Dirac 函数与任意一个三角函数的点积等于 $1/\sqrt{N}$, 因而将这两个基联合构成一个级联字典^[12], 其相干系数为 $\mu = 1/\sqrt{N}$. 由这一对正交基联合而成的不相干级联字典, 是最早被证明符合精确重构条件的. 还有一些由其他对不相干的正交基级联的例子, 例如, 基于 $L^2(0,1)$ 空间上的 Haar 和 Walsh 函数^[33,34]. 对于由 L 个正交基联合而成的级联字典 $\mathcal{D} = [B_1, B_2, \dots, B_L]$, 存在下述定理^[35]:

定理 6 设 $\mathcal{D}$ 是一个由 L 个正交基联合而成的级联字典, $f = \sum_{k \in I} c_k g_k \in \text{span}(g_k, k \in I)$, 如果

$$\text{card}(I) < \left(\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2(L-1)} \right) \mu^{-1}, \quad (24)$$

则 $c_0(f) = c_1(f) = c$ 就同时是最小化 l_0 问题和 l_1 问题的惟一解.

与上一节讨论稀疏信号的精确重构条件一样, 定理 6 也涉及到字典的相干系数问题. 那么, 多个正交基联合组成的字典是否也是非相干的呢? 我们可以应用下述定理建立这样的字典^[36,37].

定理 7 设 $N = 2^{j+1}$, $j \geq 0$, 并且 $\mathcal{D} = [B_1, B_2, \dots, B_L]$ 是空间 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ 上的字典, 其中 $L = 2^j = N/2$, 则对任意一对原子 $u, v \in \mathcal{D}$, $u \neq v$: $|\langle u, v \rangle| \in \{0, N^{-1/2}\}$.

定理 7 说明, 对于空间维数 $N = 2^{j+1}$ 的 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$, 我们可以选取一个由 $N/2$ 个正交基联合组成的字典,

字典所包含元素的最大个数为 $N^2/2$, 其相干系数仍然为 $\mu=1/\sqrt{N}$. 然而, 对于非正交基联合而成的级联字典还有待于进一步的研究.

4 结束语

超完备表示目前所涉及的应用已扩展到很多方面. 神经科学的理论研究指出, 超完备表示更符合哺乳动物视觉系统的生物学背景^[38]; 非线性逼近理论也给出令人信服的实例, 证明超完备系统的逼近优于已知的正交基^[39]; 在图像处理方面已有报道, 使用这样的信号表示方式, 可将图像分割成互不相关的信号类型^[40,41]. 信号处理的研究表明, 稀疏分解对信号压缩和均衡都有较大改善^[42~44].

目前较为有效的算法是基追踪^[9]、匹配追踪^[7]及其变种^[28,29]. 字典所涉及的主要类型为多尺度Gabor函数^[7,16]、各向异性的精细原子^[45]、Grassmann框架^[37]、小波和正弦函数的级联^[13,16,20]、多尺度脊波函数^[39]等. 如何实现上述算法的快速计算, 降低算法的复杂度, 选择何种类型的原子构造合适的字典或级联字典族, 以及何种结构的信号适用于哪一类字典以获得好的逼近, 这些问题一直是该领域研究的热点, 学者们对此已做了一些探索^[12,14~20], 其中, 以非相干字典为基础的一系列理论证明得到了进一步改进^[14,15,18~20], 这些理论证明反过来为BP和MP算法的具体实现提供了充分的理论依据. 然而, 需要研究的问题仍很多, 除算法的改进和应用领域的开拓外, 非相干字典的理论研究虽趋成熟但远非完善; 在高度非线性逼近领域, 有关各算法的一般性理论问题的研究才刚刚开始, 误差与逼近速率的关系仍是一个开放的话题^[1,2]. 目前国内对此领域的研究主要集中在两个方面, 其一是以脊波、曲线波为主线的理论分析^[3,46]及其在图像处理方面的应用^[47,48]; 其二是以匹配追踪算法为核心, 研究其在图像处理方面的具体应用^[49~51]. 同时, 所涉及的信号处理领域的其他应用也日见广泛^[52,53].

致谢 论文得益于 Pierre Vandergheynst 和 Pascal Frossard 教授对作者在瑞士洛桑联邦理工学院访学期间的指点, 及与 Rosa M. Figueras i Ventura 博士等的学术探讨; 同时感谢焦李成先生和塞人宜教授对稿件给予的悉心指教. 该课题为2004年国家民委重点科研项目, 同时得到国家留学基金(批准号: 21864021)和教育部归国留学人员科研启动基金([2004]527)资助.

参 考 文 献

- 1 Temlyakov V. Nonlinear Methods of Approximation. IMI Research Reports, Dept of Mathematics, University of South Carolina. 2001, 01: 09
- 2 DeVore R A. Nonlinear approximation. Acta Numer, 1998, 7: 51~150
- 3 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望. 电子学报, 2003, 12A: 1975~1981
- 4 Candes E J, Donoho D. Curvelets—a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University. 1999
- 5 Pennec E, Mallat S. Sparse geometric image representation with bandelets. IEEE Trans Image Processing, 2005, 14(4): 423~438 [\[DOI\]](#)
- 6 Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation. IEEE Trans Image Processing, 2005, 14(12): 2091~2106
- 7 Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. IEEE Trans Signal Process, 1993, 41: 3397~3415 [\[DOI\]](#)
- 8 Neff R, Zakhor A. Very low bit rate video coding based on matching pursuits. IEEE Trans Circ Syst Video Techn, 1997, 7(1): 158~171 [\[DOI\]](#)
- 9 Chen S, Donoho D, Saunders M. Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM J Sci Comput, 1999, 20: 33~61 [\[DOI\]](#)
- 10 Daubechies I. Time-frequency localization operators: A geometric phase space approach. IEEE Trans Inform Theory, 1988, 34: 605~612 [\[DOI\]](#)
- 11 Coifman R, Wickerhauser M. Entropy-based algorithms for best-basis selection. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 38: 713~718 [\[DOI\]](#)
- 12 Donoho D, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions. IEEE Trans Inform Theory, 2001, 47: 2845~2862 [\[DOI\]](#)
- 13 Davis G, Mallat S, Avellaneda M. Adaptive greedy approximation. Constr Approx, 1997, 13(1): 57~98 [\[DOI\]](#)
- 14 Elad M, Bruckstein A M. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. IEEE Trans Inform Theory, 2002, 48: 2558~2567 [\[DOI\]](#)
- 15 Feuer, Nemirovsky A. On sparse representation in pairs of bases. IEEE Trans Inform Theory, 2003, 49: 1579~1581 [\[DOI\]](#)
- 16 Tropp J. Greed Is Good: Algorithmic Results for Sparse Approximation. Texas Institute for Computational Engineering and Sciences, Technical Report. 2003
- 17 Donoho D, Elad M. Maximal sparsity representation via l_1 minimization. Proc Natl Acad Sci USA, 2003, 100: 2197~2202 [\[DOI\]](#)
- 18 Gribonval R, Nielsen R. Sparse decompositions in unions of bases. IEEE Trans Inform Theory, 2003, 49: 3320~3325 [\[DOI\]](#)
- 19 Gilbert A, Muthukrishnan S, Strauss M. Approximation of functions over redundant dictionaries using coherence. In: Proceedings of the 14th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Baltimore, 2003. Philadelphia: SIAM, 2003. 243~252

- 20 Gilbert A, Muthukrishnan S, Strauss M, et al. Improved sparse approximation over quasi-coherent dictionaries. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing, Barcelona, 2003, 1: 37~40
- 21 Bertsekas D. Non-Linear Programming. 2nd ed. Belmont, MA: Athena Scientific, 1995
- 22 Shrijver A. Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley, 1998
- 23 Tropp J A. Just relax: Convex programming methods for subset selection and sparse approximation. ICES Technical Report, University of Texas at Austin. 2004
- 24 Wang Z, Cheung J, Xia Y, et al. Minimum fuel neural networks and their application to overcomplete signal representations. IEEE Trans Circ Syst- : Fund Theory Appl, 2000, 47: 1146~1159[DOI]
- 25 Friedman J H, Stuetzle W. Projection pursuit regression. J Am Stat Assoc, 1981, 76(376): 817~823
- 26 Huber P J. Projection pursuit. Ann Stat, 1985, 13(2): 435~475
- 27 Temlyakov V. Weak greedy algorithms. Adv Comput Math, 2000, 12(2,3): 213~227[DOI]
- 28 DeVore R, Temlyakov V. Some remarks on greedy algorithms. Adv Comput Math, 1996, 5: 173~187[DOI]
- 29 Pati Y C, Rezaifar, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuits: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. Proceedings of the 27th Asilomar Conference in Signals, Systems, and Computers, 1993
- 30 Jones L K. On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression. Ann Stat, 1987, 15(2): 880~882
- 31 Villemoes L. Nonlinear approximation with walsh atoms. In: Le M'ehaut'e A, Rabut C, Schumaker L, eds. Proceedings of Surface Fitting and Multiresolution Methods, Chamonix, 1996. Vanderbilt University Press, 1997. 329~336
- 32 Gribonval R, Vandergheynst P. Exponential Convergence of Matching Pursuit in Quasi-incoherent Dictionaries. IRISA Technical Report. 2003
- 33 Gribonval R, Nielsen M. Nonlinear approximation with dictionaries. II. Inverse estimates. Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, Technical Report R-02-2019. 2002
- 34 Golubov B, Emov A, Skvortsov V. Walsh Series and Transforms. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991
- 35 Gribonval R, Nielsen M. Approximation with highly redundant dictionaries. Proc SPIE'03, 5207: 216~227
- 36 Calderbank A, Cameron P, Kantor W, et al. Z4-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets. Proc London Math Soc, 1997, 75(3): 436~480[DOI]
- 37 Strohmer T, Heath R. Grassmannian frames with applications to coding and communications. Appl Comput Harm Anal, 2003, 14(3): 257~275[DOI]
- 38 Olshausen B, Field D. Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1? Vision Res, 1997, 37: 311~325
- 39 Candes E, Donoho D. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with C^2 singularities. Technical Report, Stanford University. 2002
- 40 Starck J, Elad M, Donoho D. Image decomposition: Separation of texture from piecewise smooth content. SPIE Meeting, San Diego, 2003
- 41 Starck J, Candes E, Donoho D. The curvelet transform for image denoising. IEEE Trans Image Processing, 2002, 11(6): 670~684 [DOI]
- 42 Berg A, Mikhael W. A survey of mixed transform techniques for speech and image coding. Proc IEEE Intern Symp Circ Syst, 1999, 4: 106~109
- 43 DeBrunner V, Chen L, Li H. Lapped multiple basis algorithms for still image compression without blocking effect. IEEE Trans Image Proc, 1997, 6: 1316~1321[DOI]
- 44 Cotter S, Rao B. Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization. IEEE Trans Commun, 2002, 50: 374~377[DOI]
- 45 Vandergheynst P, Frossard P. Efficient image representation by anisotropic refinement in matching pursuit. Proc IEEE Intern Conf Acoust Speech Signal Processing, 2001, 3: 1757~1760
- 46 焦李成, 侯彪, 刘芳. 基函数网络逼近-进展与展望. 工程数学学报, 2002, 19(1): 21~36
- 47 侯彪, 刘芳, 焦李成. 基于脊波变换的直线特征检测. 中国科学, E辑, 2003, 33(1): 65~73
- 48 尚晓清, 张维强, 宋国乡. 数字脊波变换及图像的稀疏表示. 工程数学学报, 2005, 22(3): 393~398
- 49 廖斌, 许刚, 王裕国. 基于非抽样小波字典的低速率视频编码. 软件学报, 2004, 15(2): 221~228
- 50 廖斌, 许刚, 王裕国. 二维匹配跟踪自适应图像编码. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(9): 1084~1090
- 51 尹忠科, 王建英, Pierre Vandergheynst. 在低维空间实现的基于 MP 的图像稀疏分解. 电讯技术, 2004, 44(3): 12~15
- 52 高鹰, 谢胜利. 基于信号稀疏特性和核函数的非线性盲信号分离算法. 计算机工程与应用, 2005, (1): 33~35
- 53 肖燕, 黄成军, 郁惟镛, 等. 波形匹配追踪算法在多局放脉冲提取中的应用. 中国电机工程学报, 2005, 25(11): 157~162

(2005-03-11 收稿, 2005-10-26 接受)