局部传输信息不等式和曲率维数条件的等价性

钱斌

常熟理工学院数学与统计学院, 常熟 215500
E-mail: binqiancn@yahoo.com.cn

收稿日期: 2012-10-12; 接受日期: 2012-12-19
国家自然科学基金 (批准号: 11201040) 资助项目

摘要 本文得到了曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 和 $CD(0, n)$ 与相应的局部传输信息不等式的等价性.

关键词 传输信息不等式 曲率维数条件 半群

MSC (2010) 主题分类 60J60, 58J35

1 引言

设 (M, d) 为完备无边 Riemann 流形, 我们首先回顾 M 上两个概率测度 μ 和 ν 之间的 Wasserstein 距离:

$$W_2(\nu, \mu) = \inf_{\pi} \sqrt{\int d^2(x, y) d\pi(x, y)},$$

其中 “inf” 是对满足如下条件的概率测度 π 取得, 对 M 上的任意有界可测函数 f, g , π 满足

$$\int f(x) + g(y) d\pi(x, y) = \int f d\mu + \int g d\nu.$$

对一个扩散算子 $L := \Delta + \nabla \phi \cdot \nabla$, 我们有如下的定义 (见文献 [1]), 对任意足够光滑的函数 f, g ,

$$\Gamma(f, g) = |\nabla f|^2 = \frac{1}{2}(Lfg - fLg - gLf),$$

$$\Gamma_2(f, f) = \frac{1}{2}(L\Gamma(f, f) - 2\Gamma(f, Lf)) = |\nabla \nabla f|^2 + (\text{Ric} - \nabla \nabla h)(\nabla f, \nabla f),$$

其中 Ric 表示流形 M 的 Ricci 曲率. 记 $\Gamma_2(f) = \Gamma_2(f, f)$.

我们称一个扩散算子 L 满足如下的曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ (见文献 [1]), 若对任意的 $f \in C_0^\infty(M)$,

$$\Gamma_2(f) \geq \rho \Gamma(f, f),$$

我们称 L 满足有限曲率维数条件 $CD(0, n)$, 若对任意的 $f \in C_0^\infty(M)$,

$$\Gamma_2(f) \geq \frac{1}{n} (Lf)^2.$$

Bakry 及其合作者 (见文献 [1–3]) 建立了众多泛函不等式和曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 和 $CD(0, n)$ 的等价性. 我们首先来回顾部分结果:

英文引用格式: Qian B. Equivalence of local transportation-information inequalities and curvature-dimension inequalities (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 43: 515–518, doi: 10.1360/012012-496

定理 A 设 P_t 为 L 生成的算子半群, ρ 为任意实数, 下列命题等价:

- (1) 曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 成立;
- (2) 对任意的 $f \in C_0^\infty(M)$, 我们有 $\Gamma(P_t f, P_t f)^{1/2} \leq \exp(-\rho t) P_t(\Gamma(f, f)^{1/2})$;
- (3) 对任意的 $f \in C_0^\infty(M)$, 我们有 $P_t(f^2) - (P_t f)^2 \leq \frac{1 - \exp(-2\rho t)}{\rho} P_t(\Gamma(f, f))$;
- (4) 对任意的 $f \in C_0^\infty(M)$, 我们有

$$\text{Ent}_{P_t}(f) := P_t(f \log f) - P_t f \log P_t f \leq \frac{1 - \exp(-2\rho t)}{2\rho} P_t \left(\frac{\Gamma(f, f)}{f} \right); \quad (1.1)$$

- (5) (见 [2, 定理 5.3]) 对任意的 $t \geq 0$, $x \in M$ 和 $f \geq 0$ 满足 $P_t f(x) = 1$, 则我们有

$$W_2^2(f P_t^x, P_t^x) \leq \frac{2(1 - \exp(-2\rho t))}{\rho} \text{Ent}_{P_t^x}(f). \quad (1.2)$$

若 $\rho = 0$, $(1 - \exp(-2\rho t))/\rho$ 由 $2t$ 代替.

同时在文献 [4] 和 [5] 中, 王凤雨得到了 Log-Harnack 不等式及某种 Harnack 不等式 (如 Wang-Harnack 不等式) 也和曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 等价, 并且王凤雨在文中指出了在某些较弱的条件下这些 Harnack 不等式可以蕴含流形边界 ∂M 的凸性.

同时我们有如下与有限曲率维数条件等价的泛函不等式:

定理 B (见文献 [3, 定理 1] 和 [2, 定理 5.3]) L 为扩散算子, 下面的命题等价:

- (1) L 满足曲率维数条件 $CD(0, n)$;
- (2) 对任意的正函数 $f \in C_0^\infty(M)$ 和任意的 $t \geq 0$,

$$P_t(f \log f) - P_t f \log P_t f \leq t L P_t f + \frac{n}{2} P_t f \log \left(1 - \frac{2t}{n} \frac{P_t(f L(\log f))}{P_t f} \right); \quad (1.3)$$

- (3) 对任意的 $t_1, t_2 \geq 0$, 对任意的 $x \in M$ 和 $f \geq 0$ 满足 $P_{t_1} f(x) = 1$, 则我们有

$$W_2^2(f P_{t_1}^x, P_{t_2}^x) \leq 4t_1 \left(\text{Ent}_{P_{t_1}^x}(f) + \frac{n}{2} A_{t_2/t_1} \right), \quad (1.4)$$

其中 $A_\lambda := \lambda - 1 - \log \lambda$.

同时在文献 [6] 中, 王凤雨得到了与曲率维数条件 $CD(k, n)$ 等价的 Harnack 不等式.

最近 Guillin 等在文献 [7] 中对给定的概率测度提出了 (整体) 传输信息不等式, 其中 (局部) 传输项就是式 (1.2) 或式 (1.4) 的左端项, 同时 (局部) 信息项就是式 (1.1) 的右端项 (或隐藏在式 (1.3) 的右端项). 根据上面的观测, 自然地我们会问是否有与曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 和 $CD(0, n)$ 等价的局部传输信息不等式? 本文对上述问题给出肯定的答案, 主要结果见下节的定理 1 和定理 2.

2 主要结果和证明

首先我们给出与曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 等价的传输信息不等式:

定理 1 曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 与如下的 “局部传输信息不等式” 等价:

$$W_2(h P_t^x, P_t^x) \leq \frac{1 - \exp(-2\rho t)}{\rho} \sqrt{P_t^x \left(\frac{\Gamma(h, h)}{h} \right)}, \quad (2.1)$$

对任意的 $t \geq 0, x \in M, h \geq 0$ 满足 $P_t h(x) = 1$ 均成立, 其中 hP_t^x 是一个概率测度, 满足对任意的有界连续函数 $\varphi, \int \varphi d(hP_t^x) = P_u(\varphi h)(x)$.

若 $\rho = 0$, 即非负曲率条件下, 上述表达式中的 $(1 - \exp(-2\rho t))/\rho$ 用 $2t$ 代替.

证明 必要性由定理 A 中的局部对数 Sobolev 不等式 (1.1) 和传输不等式 (1.2) 直接可得. 下面我们来证明充分性. 对具有紧支撑的光滑函数 f , 满足 $P_t^x f = 0$, 令 $P_t^{x,\varepsilon} := (1 + \varepsilon f)P_t^x$, 我们易得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} P_t^x \left(\frac{\Gamma(1 + \varepsilon f, 1 + \varepsilon f)}{1 + \varepsilon f} \right) = P_t^x(\Gamma(f, f)).$$

由文献 [8, 第 394 页], 存在只依赖于函数 f 的常数 r 满足

$$P_t^x f^2 \leq \sqrt{P_t^x(\Gamma(f, f))} \frac{W_2(P_t^{x,\varepsilon}, P_t^x)}{\varepsilon} + \frac{r}{\varepsilon} W_2^2(P_t^{x,\varepsilon}, P_t^x),$$

结合局部传输信息不等式 (2.1) 我们得

$$\begin{aligned} P_t^x(f^2) &\leq \sqrt{P_t^x(\Gamma(f, f))} \frac{1 - \exp(-2\rho t)}{\rho} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} P_t^x \left(\frac{\Gamma(1 + \varepsilon f, 1 + \varepsilon f)}{1 + \varepsilon f} \right)} \\ &\quad + \frac{r}{\varepsilon} \left(\frac{1 - \exp(-2\rho t)}{\rho} \right)^2 P_t^x \left(\frac{\Gamma(1 + \varepsilon f, 1 + \varepsilon f)}{1 + \varepsilon f} \right). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们有

$$P_t^x(f^2) \leq \frac{1 - \exp(-2\rho t)}{\rho} P_t^x(\Gamma(f, f)).$$

注意到 $P_t^x f = 0$, 由定理 A 中的第三个等价条件知曲率维数条件 $CD(\rho, \infty)$ 成立, 证毕. $\square$

注 不等式 (2.1) 中 P_t^x 替换为概率测度 μ 构成的不等式在文献 [7] 中称为传输信息不等式, 故不等式 (2.1) 可称为局部传输信息不等式.

对曲率维数条件 $CD(0, n)$, 我们有如下结论:

定理 2 曲率维数条件 $CD(0, n)$ 与如下的局部传输信息不等式等价,

$$W_2^2(hP_{t_1}^x, P_{t_2}^x) \leq 4t_1 \left(t_1 L P_{t_1}^x h + \frac{n}{2} \log \left(1 - \frac{2t_1}{n} L P_{t_1}^x h + \frac{2t_1}{n} P_{t_1}^x \left(\frac{\Gamma(h, h)}{h} \right) \right) \right) + \frac{n}{2} A_{t_2/t_1}, \quad (2.2)$$

对任意的 $t_1, t_2 \geq 0, x \in M, h \geq 0$ 满足 $P_{t_1}^x h = 1$, 其中 hP_t^x 的定义可参看定理 1.

证明 必要性由不等式 (1.3) 和 (1.4) 可直接得到. 下面我们来证明充分性. 利用 Kantorovich 变分公式

$$W_2^2(hd\mu, \mu) = \sup_{f, g} \left\{ \int g h d\mu - \int f d\mu \right\},$$

其中 “sup” 表示对所有的 f 和 g 满足 $g(x) - f(y) \leq d^2(x, y), \forall x, y$, 从而 (2.2) 等价于下列的不等式

$$\begin{aligned} &\int Q_1 f(y) h(y) P_{t_1}^x(dy) - \int f(y) P_{t_2}^x(dy) \\ &\leq 4t_1 \left(t_1 L P_{t_1}^x h + \frac{n}{2} \log \left(1 - \frac{2t_1}{n} L P_{t_1}^x h + \frac{2t_1}{n} P_{t_1}^x \left(\frac{\Gamma(h, h)}{h} \right) \right) \right) + \frac{n}{2} A_{t_2/t_1}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $Q_1 f(x) = \inf_y \{f(y) + \frac{1}{2}d^2(x, y)\}$, $P_{t_1}^x h = 1$. 类似于文献 [2] 中的作法, 我们对上述不等式进行二阶 Taylor 展开. 为此, 我们令 $h = 1 + \varepsilon g$, 其中 $P_{t_1}^x g = 0, t_1 = t, t_2 = t(1 + a\varepsilon), f = b\varepsilon t g, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$, 其中常数 a, b 在下文中选取. 注意到

$$Q_1(b\varepsilon t g) = b\varepsilon t g - \frac{b^2 \varepsilon^2 t^2}{4} \Gamma(g) + o(\varepsilon^2), \quad A_{1+a\varepsilon} = \frac{a^2 \varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2),$$

另外, 对充分小的 ε , 我们有 $P_{t(1+a\varepsilon)}^x(b\varepsilon tg) = b\varepsilon tP_t^xg + ab\varepsilon^2t^2LP_t^xg + o(\varepsilon^2)$. 从而

$$\int Q_1f(y)h(y)P_t^x(dy) - \int f(y)P_t^x(dy) = \varepsilon^2btP_t^x(g^2) - \frac{b^2\varepsilon^2t^2}{4}P_t^x(\Gamma(g)) - ab\varepsilon^2t^2LP_t^xg + o(\varepsilon^2).$$

同理, 不等式 (2.3) 右端转化为

$$4t\varepsilon^2 \left(tP_t^x(\Gamma(g)) - \frac{t^2}{n}(LP_t^xg)^2 + \frac{na^2}{4} \right) + o(\varepsilon^2).$$

代入 (2.3) 得

$$\begin{aligned} bP_t^x(g^2) &\leq t \left(\frac{b^2}{4} + 4 \right) P_t^x(\Gamma(g)) + abtLP_t^xg - \frac{4t^2}{n}(LP_t^xg)^2 + na^2 \\ &= t \left(\frac{b^2}{4} + 4 \right) P_t^x(\Gamma(g)) - \frac{t^2}{n} \left(\frac{b^2}{4} + 4 \right) (LP_t^xg)^2, \end{aligned}$$

其中上面的等号由选取 $a = -(btLP_t^xg)/2n$ 得到. 令 $b = 4$ 得

$$P_t^x(g^2) \leq 2tP_t^x(\Gamma(g)) - \frac{2t^2}{n}(LP_t^xg)^2.$$

注意到 $P_t^xg = 0$, 类似于文献 [3], 对上述不等式对 t 求两次导数可得曲率维数条件 $CD(0, n)$. 证毕. $\square$

致谢 作者感谢吴黎明教授对本文有益的讨论、建议和 D. Bakry 教授对本文的兴趣.

参考文献

- 1 Bakry D. Functional inequalities for Markov semigroups. In: Probability Measures on Groups: Recent Directions and Trends. Mumbai: Tata Inst Fund Res, 2006, 91–147
- 2 Bakry D, Bolley F, Gentil I. Dimension dependent hypercontractivity for Gaussian kernels. Probab Theory Related Fields, 2012, 154: 845–874
- 3 Bakry D, Ledoux M. A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality. Rev Mat Iberoamericana, 2006, 22: 683–702
- 4 Wang F Y. Harnack inequalities on manifolds with boundary and applications. J Math Pures Appl, 2010, 94: 304–321
- 5 王风雨. 泛函不等式, 马尔可夫半群与谱理论. 北京: 科学出版社, 2006
- 6 Wang F Y. Equivalent semigroup properties for the curvature-dimension condition. Bull Sci Math, 2011, 135: 803–815
- 7 Guillin A, Léonard C, Wu L M, et al. Transformation-information inequalities for Markov processes. Probab Theory Related Fields, 2009, 144: 669–695
- 8 Otto F, Villani C. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. J Funct Anal, 2000, 173: 361–400

Equivalence of local transportation-information inequalities and curvature-dimension inequalities

QIAN Bin

Abstract In this short note, we show that the local transportation-information inequalities are equivalent to the infinity curvature-dimension inequalities $CD(\rho, \infty)$ and finite one $CD(0, n)$ respectively.

Keywords transportation-information inequalities, curvature-dimension inequalities, semigroup

MSC(2010) 60J60, 58J35

doi: 10.1360/012012-496