SCIENTIA SINICA Mathematica

论文



顶点算子代数表示理论中的范畴和函子

献给万哲先教授 90 华诞

姜翠波1、林宗柱2*

- 1. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240;
- 2. Department of Mathematics, Kansas State University, Manhattan 66506, USA E-mail: cpjiang@sjtu.edu.cn, zlin@math.ksu.edu

收稿日期: 2017-07-07; 接受日期: 2017-08-16; 网络出版日期: 2017-10-16; * 通信作者国家自然科学基金 (批准号: 11371245 和 11531004) 资助项目

摘要 本文的主要目的是, 用范畴的语言对顶点算子代数理论中的一些构造加以解释, 同时将 Abel 范畴工具应用到顶点算子代数的研究中. 本文将顶点算子代数范畴中的共形同态放宽为半共形同态, 同时讨论半共形同态所对应的模范畴之间的函子性质. 这样陪集构造可以实现为 Hom 函子, 并利用 Hom 函子讨论相关性质. 作为一个应用, 本文构造了 Jacquet 函子, 并讨论了它的性质.

关键词 顶点算子代数 半共形同态 Jacquet 函子

MSC (2010) 主题分类 17B69

1 引言

本文的主要目的是利用范畴的语言来讨论顶点算子代数表示理论. 顶点算子代数的构造很大程度上来自弦论和仿射李代数理论. 一个顶点算子代数由两个结构所组成, 一个是顶点代数结构, 另一个是 Virasoro 李代数的表示, 即共形结构 (参见文献 [1-3]). 在讨论顶点算子代数所组成的范畴时, 很自然地就要求同态必须同时保持这两种结构. 同样在讨论子代数时也自然要求同时保持这两种结构, 也就是子代数的嵌入映射应该是顶点算子代数这个范畴中的态射. 但在很多时侯, 我们必须讨论顶点算子代数具有不同共形结构的子代数. 为此, 在不同的文献中对顶点算子代数的子代数的概念就有不同解释, 有的指具有相同的共形向量, 有的指具有不同的共形向量. 在文献 [3] 中, 它们被称为具有不同Virasoro 向量的顶点算子子代数.

陪集构造是共形场论中从已知共形场论构造新的共形场论的一个很重要的方法. 从代数的角度就是中心化子构造, 这是代数中很常规的构造子代数的方式. 这个构造所得到的顶点算子代数的非平凡子代数一般具有不同的共形结构. 另外, 从 Loop 群以及偶格构造所构造的顶点算子代数都有一个共同性质: 它们是 № 阶化的, 并且权为零的齐次子空间是一维的. 在这个特殊性质下的很多构造对具有不同共形向量的子代数也都适用, 这就是本文中所讲的半共形子代数. 事实上, 众多学者在其文中所指的顶点算子子代数实际上就是本文中所指的半共形子代数. 需要说明的是, 尽管"半共形子代数"的概

英文引用格式: Jiang C P, Lin Z Z. Categories and functors in the representation theory of vertex operator algebras (in Chinese).

Sci Sin Math, 2017, 47: 1579-1594, doi: 10.1360/N012017-00150

念是在文献 [4] 中提出的, 但对该类子代数的研究已经很多, 大多数出现在陪集构造中, 如文献 [5-12]. 对于 CFT 型的算子顶点代数来说, 大多数所关心的子代数都是半共形子代数, 如文献 [13-18]. 特别是由仿射李代数或 Virasoro 李代数所构造的顶点算子代数都属于 CFT 型, 它们的很多子代数就自然是半共形子代数, 如文献 [19-26]. 所以, "半共形子代数"并非新的研究对象, 而只是一个术语, 刻画了在一般意义下的一类子代数.

Virasoro 李代数 তir 有一个标准基

$$\{L(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{C\},\$$

满足关系

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(n+m) + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{n+m,0}C.$$

注意到 $\mathfrak{Vir}^+ = \operatorname{span}\langle L(n) \mid n \geq 0 \rangle$ 是其一个李子代数. 我们所说的保持共形结构是指 \mathfrak{Vir} 模结构不变, 即 \mathfrak{Vir} 子模和 \mathfrak{Vir} 模同态等. 但如果不要求作为整个 \mathfrak{Vir} 模结构不变, 而只要求它们作为 \mathfrak{Vir}^+ 模结构不变, 则称这种性质为半共形的.

利用半共形的概念,可以将顶点算子代数之间的同态扩展到所有的半共形同态,这样得到一个顶点算子代数范畴 VOA_{sc} . 用 VOA_{c} 记由所有的顶点算子代数在共形同态下所构成的范畴,我们将证明在范畴 VOA_{sc} 中的分类问题与在 VOA_{c} 中的分类问题是一样的,因为它们所对应的群胚 (groupoid)是相同的. 范畴 VOA_{sc} 有一些灵活性: (1) 在中心化子构造下是封闭的; (2) 这个范畴具有与交换代数范畴相类似的性质,例如,张量构造实际上是这个范畴中的余积构造. 事实上,交换代数范畴是 VOA_{sc} 的一个全子范畴. 注意到仿射概型范畴是交换代数范畴的的反范畴,作者考虑这个范畴的另一个出发点是,在顶点算子代数理论中寻求代数几何的性质并利用代数几何的思想和方法来讨论顶点算子代数及其表示理论. 例如,顶点算子代数的表示范畴起的作用是代数簇上的层范畴、代数簇之间的态射诱导出各种不同层范畴之间的函子.

讨论半共形子代数的另一个起因是李群理论中的诱导表示理论. 在顶点算子代数的诱导表示理论中, 文献 [27] 从共形子代数的诱导表示进行过讨论. 但从半共形子代数的诱导表示出发, 首先遇到的第一个问题是, 自然限制函子并不能用, 这时半共形子代数在李群中对应的应该是 Levi 子群. 顶点算子代数的表示对应的应该是约化李群的 Harish-Chandra 表示, 所以对应的限制函子应该是 Jacquet 函子. 本文对顶点算子代数的 Jacquet 函子进行了讨论.

下面对本文的结构作简要介绍. 第 2 节讨论半共形同态及其基本性质, 特别是半共形同态与中心化子之间的关系并利用 Hom 函子来代替中心化子构造. 同时对半共形范畴与交换代数范畴之间的关联函子进行了讨论. 第 3 节对模范畴之间的同态函子进行讨论, 这里涉及一些在陪集构造下的分解问题, 主要思想来自于代数表示论中的 Schur-Weyl 对偶方法. 第 4 节定义 Jacquet 函子, Jacquet 函子和诱导函子以及分解问题将在以后的工作中进一步讨论. 第 5 节讨论顶点算子代数中一些代数几何问题, 所有的半共形向量构成一个有限维仿射代数簇, 每一个半共形向量确定一类顶点算子子代数. 对于这些几何结构, 第二作者和楚彦军已经在 Heisenberg 和仿射顶点算子代数的情形下进行了讨论 (参见文献 [28,29]).

我们谨以本文献给尊敬的万哲先先生的 90 华诞. 万哲先先生带过很多学生, 也有很多没有能进入他的学生花名册但受到过他超过真正导师所能给予的指导和关怀. 他们当中有些甚至是在千里之外从未谋面的大学生, 或者是年轻数学流浪者, 本文的两位作者曾经是这样的年轻人, 正是因为他的指引让我们走上了数学研究的人生道路.

2 顶点算子代数的半共形范畴

2.1 基本概念

我们将利用文献 [3] 中记号. 用 $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ 来记一个顶点算子代数, 它是由一个顶点代数 $(V,Y,\mathbf{1},\mathfrak{D})$ 外加一个共形向量 ω 组成.

因为要同时考虑不同的顶点算子代数或顶点代数,我们将使用上标 Y^V 表示其为 V 的顶点算子,同样 Y^V_M 是 V 模 M 上的顶点算子.如果 $(V,Y^V,\mathbf{1}^V,\omega^V)$ 是一个顶点算子代数,则 Virasoro 李代数 在 V 上作用的算子记为 $L^V(n)$. 它们由 $Y^V(\omega^V,z)=\sum_n L^V(n)z^{-n-2}$ 所确定.如果 M 是顶点算子代数 V 的模,则 M 也是 Virasoro 李代数 \mathfrak{V} ir 的一个模,它是由算子 $\{L^V_M(n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 作用在 M 上.这 些算子来自于

$$Y_M^V(\omega^V,z) = \sum_n L_M^V(n) z^{-n-2}.$$

如果不会发生混淆, 我们将省去上标 V. 我们再次强调一个顶点算子代数 $(V,Y,1,\omega)$ 满足以下关系:

- (1) $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, 并且 $V_n = \ker((L(0) n\operatorname{Id}) : V \to V)$;
- (2) $\dim V_n < \infty$, 同时存在正整数 N 使得当 n < -N 时, $V_n = 0$.

给定两个顶点代数 $(V, Y^V, \mathbf{1}^V)$ 和 $(W, Y^W, \mathbf{1}^W)$, 顶点代数之间的同态 $f: V \to W$ 满足 (参见文献 [3, 第 3.9 小节])

假如 V 和 W 都是顶点算子代数, 用 ω^V 和 ω^W 分别记它们的共形向量. 若同态 f 满足 $f(\omega^V)$ = ω^W , 则称 f 是共形的. 这等价于

$$f \circ L^V(n) = L^W(n) \circ f$$
 对所有 $n \in \mathbb{Z}$.

事实上, 上式又等价于 $f \circ L^V(-2) = L^W(-2) \circ f$, 这是因为

$$\omega^{W} = L^{W}(-2)\mathbf{1}^{W} = L^{W}(-2)f(\mathbf{1}^{V}) = f(L^{V}(-2)\mathbf{1}^{V}) = f(\omega^{V}).$$

若同态 f 满足对所有 $n \ge -1$, 有 $f \circ L^V(n) = L^W(n) \circ f$, 则称 f 是半共形的. 由文献 [3, 命题 3.1.18] 可知, 同态 f 总是满足 $f \circ L^V(-1) = L^W(-1) \circ f$. 如果 f 是半共形的, 则由文献 [3, (3.1.71)–(3.1.74)] 可得

$$L^{W}(0)f(\omega^{V}) = 2f(\omega^{V}), \quad L^{W}(1)f(\omega^{V}) = 0,$$

$$L^{W}(2)f(\omega^{V}) = \frac{1}{2}c_{V}\mathbf{1}^{W}, \quad L^{W}(n)f(\omega^{V}) = 0 \quad (n \geqslant 3).$$
(2.1)

注 2.1 如果 W 是 \mathbb{N} 阶化的 (即 $L^W(0)$ 的特征根全是非负整数) 并且 $W_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}^W$, 则由 (2.1) 及文献 [3, 定理 3.11.12] 推出 f 是半共形的. 半共形顶点子代数的概念是受文献 [3, 定理 3.11.12] 的启发.

设 $V \neq W$ 的一个顶点子代数并且 $f: V \to W$ 是其包含映射, 则 f 是一个顶点代数同态. 假定 W 是一个顶点算子代数使得 ω^W 是其共形向量, 且 $V \neq W$ 的具有共形向量 ω^V 的顶点子代数, 若 f 是 共形的, 则称 V 为 W 的一个共形子代数; 若 f 是半共形的, 则称 V 为 W 的一个半共形子代数.

2.2 模范畴

对于一个顶点代数 $(V, Y^V, \mathbf{1}^V)$, V 的顶点代数模 M 在文献 [3, 第 4.1.1 小节] 中有定义. 设 M 和 N 是 V 的两个顶点代数模, 一个线性映射 $\phi: M \to N$ 称作顶点代数 V 模同态, 如果对任意的 $v \in V$, 有

$$\phi \circ Y_M^V(v,z) = Y_N^V(v,z) \circ \phi. \tag{2.2}$$

设 $\operatorname{Hom}_V(M,N)$ 为所有从 M 到 N 的顶点代数 V 模同态的集合, 且 V-VAMod 是所有的顶点代数 V 模的范畴, 则它是一个 Abel 范畴. 在文献 [3, 第 4.1.4 小节] 中已经注意到 V 模 M 不一定具有算子 $d:M\to M$ 使得

$$[d, Y_M(v, z)] = Y_M(\mathcal{D}(v), z),$$

尽管有 $Y_M(\mathcal{D}(v), z) = \frac{d}{dz} Y_M(v, z)$ (参见文献 [3, 命题 4.1.3]).

当 $(V, Y^V, \mathbf{1}^V, \omega^V)$ 是一个顶点算子代数, 如文献 [3, 第 4.1.6 小节] 中所定义, 一个顶点算子代数 V 模 M 首先是一个顶点代数 V 模, 且要求

- (1) $M = \bigoplus_{a \in \mathbb{C}} M_a$ 满足 $M_a = \ker(L_M(0) a\mathrm{Id});$
- (2) $\dim M_a < \infty$, 且存在实数 A 满足 $M_a = 0$, 若 a 的实部小于 A.

由文献 [3, 命题 4.1.15] 知, M 自动地成为 Virasoro 代数 \mathfrak{Vir} 的一个表示. 若 $x \in M_a$, 则 a 称为 x 的一个权, 并记 $a = \mathrm{wt}(x)$. 这时, 对 $v \in V_{\mathrm{wt}(v)}$, 有 $\mathrm{wt}(v_n(x)) = \mathrm{wt}(x) + \mathrm{wt}(v) - n - 1$.

注意到不是所有的顶点代数 V 模都自动满足一个顶点算子代数 V 模的条件 (尽管有文献 [3, 命题 4.1.5]),所以,V 模这个术语容易让人混淆. 为避免混淆,用 V-VOAMod 来记 V 的顶点算子代数模范畴,同时用 V-VAMod 来记 V 的顶点代数模范畴. 如果 M 和 N 是两个 V-VOA 模,一个线性映射 $f: M \to N$ 是范畴 V-VOAMod 中的态射当且仅当 (2.2) 成立. 有一个自然的忘记函子 V-VOAMod V-VAMod. 所以可以把 V-VOAMod 看成是 V-VAMod 的一个全子范畴,这可由下面的引理得出.

引理 2.2 设 $(V, Y^V, \mathbf{1}^V, \omega^V)$ 为一个顶点算子代数, 并且 M 和 N 为 V 的两个 VA 模. 若 M 有一个 V 的 VOA- 模结构并且 $\phi: M \to N$ 是 V-VAMod 中的一个同构, 则 N 有唯一的 V-VOA- 模结构使得 ϕ 是 V-VOAMod 中的同构.

这样在以上两个范畴中, $Hom_V(N, M)$ 是一样的, 因此将不再加以区别.

2.3 两个 VOA 范畴

若 $f:(V,Y^V,\mathbf{1}^V,\mathfrak{D})\to (W,Y^W,\mathbf{1}^W,\mathfrak{D})$ 是一个顶点代数同态,则 $Y_W^V(v,z)=Y^W(f(v),z)$ 使得 W 变成一个 V-VA 模. 利用 $Y_V^V=Y^V$ 把 V 看成一个 V-VA 模, 可以考虑所有的 VA 模同态所组成的线性空间 $\mathrm{Hom}_V(V,W)$. 注意到 V 是由 $\{v_n(\mathbf{1}^V)\mid v\in V,\ n\leqslant -1\}$ 所张成的线性空间,对任一个 V-VA 模 M, 每一个 $\phi\in\mathrm{Hom}_V(V,M)$ 是由 $\phi(\mathbf{1}^V)\in\mathrm{Vac}_V(M)$ 完全确定的,这里 $\mathrm{Vac}_V(M)$ 是由 V-VA 模 M 中的所有 V-vacuum-like 元素所组成的集合

$$Vac_V(M) = \{ x \in M \mid v_n x = 0, \forall v \in V, \forall n \geqslant 0 \},\$$

也就是说, $Vac_V(M)$ 中的元素 x 是由性质 $Y_M^V(v,z)x \in M[[z]]$ 所确定的 (参见文献 [3, 第 4.7 小节]). 所以在赋值映射 $Hom_V(V,M) \to M$ ($\phi \mapsto \phi(\mathbf{1}^V) \in M$) 的意义下, 有 $Hom_V(V,M) = Vac_V(M)$. 记 $C_M(V) = Hom_V(V,M)$, 这个记号就是文献 [3, 第 3.11 小节] 中的交换子. 若 N 是一个 W-VA 模,

则 $Y_N^V(v,z) = Y_N^W(f(v),z)$ 在 N 上给出一个 V-VA 模结构, 把它记为 $f^*(N)$. 任何 W-VA 模同态 $\phi: N \to N'$ 也是一个 V-VA 模同态, 所以有一个正合函子 $f^*: W$ -VAMod $\to V$ -VAMod.

引理 2.3 对任一顶点代数同态 $f:(V,Y^V,\mathbf{1}^V)\to (W,Y^W,\mathbf{1}^W)$, $\mathrm{Hom}_V(V,W)=C_W(f(V))$ 是 W 的顶点子代数. 如果 N 是一个 W-VA 模, 则 $C_{f^*(N)}(V)$ 是 N 的 $C_W(V)\text{-VA}$ 子模. 特别地, $N\mapsto C_{f^*(N)}(V)$ 定义了一个函子: $W\text{-VAMod}\to C_W(V)\text{-VAMod}$.

证明 第一部分就是文献 [3, 第 3.11 小节] 中的交换子.

给定 W-VA 模 N, 任意 $\psi \in C_{f^*(N)}(V)$, $\phi \in C_W(V)$ 及 $n \ge 0$, $m \in \mathbb{Z}$, 由交换子公式 (参见文献 [3, (3.1.9)])

$$[v_n, u_m] = \sum_{i \ge 0} \binom{n}{i} (v_i(u))_{n+m-i}, \tag{2.3}$$

有

$$f(v)_n(\phi(\mathbf{1}^V)_m(\psi(\mathbf{1}^V))) = (\phi(\mathbf{1}^V)_m(f(v)_n(\psi(\mathbf{1}^V))) + \sum_{i \geqslant 0} \binom{n}{i} (f(v)_i(\phi(\mathbf{1}^V))))_{m+n-i}(\psi(\mathbf{1}^V)) = 0.$$

因此, 对任一个 $\phi \in \text{Hom}_V(V, W)$, 有 $Y_N^W(\phi(\mathbf{1}^V), z)C_{f^*(N)}(V) \subseteq C_{f^*(N)}(V)((z))$.

注 2.4 回顾一下, 对一个给定的顶点算子代数 V, 在恒等映射 $f = \mathrm{Id}: V \to V$ 之下, 中心 $C(V) = C_V(V)$. 注意到 C(V) 是一个交换代数 (参见文献 [3, 命题 3.11.2]). 对 $v \in C(V)$, 有 $Y(v,z) = v_{-1}$. 这样 V 成为一个 C(V) 模, 且对所有 $u,w \in V$, 有

$$Y(u,z)(v_{-1}(w)) = v_{-1}Y(u,z)(w).$$

设 M 是一个 V 模, 作用在 M 上 (2.3) 仍然成立 (参见文献 [27, (10)]), 且对所有 $v \in C(V)$, 有 $Y_M(v,z) = v_{-1}$. 这样 M 自动成为交换代数 C(V) 的模, 且 $Y_M(u,z)$ 是 C(V) 线性的.

一般地, 对一个交换的 $\mathbb C$ 代数 R, 以 R 代替 $\mathbb C$ 定义一个 R 顶点代数 V, 则 V 是一个 R 模, 且对 于 $u \in V$, u_n 是 R 模同态. 一个 V 模是一个 R 模, 这样顶点算子代数几乎所有性质均可以到 R 上的 顶点代数中. 进一步地, V 是交换环 R 上 Virasoro 李代数的模 (需假定 2 和 3 在 R 中可逆).

设 $\phi:S\to R$ 是一个交换代数同态,则对 R 上的每一个顶点代数 V, $\phi^*(V)$ 是 S 上的一个顶点代数,且 $\phi_*(W)=W\otimes_S R$ 是 R 上的一个顶点代数.自然地可以考虑范畴 VA/\Re 、 VOA_c/R 和 VOA_{sc}/R .在今后的工作中将讨论 $\mathbb C$ 概型 X 上的顶点代数,这样顶点代数表示是 X 上的拟凝聚层.

关于上述讨论,一个典型的例子是水平等于负的 Coxter 数的泛仿射顶点代数,这种情形下的仿射顶点代数具有较大中心. 其余情形的仿射顶点代数具有平凡中心 C1. 具有平凡中心的有理顶点代数与交换环上中心可裂结合代数之间具有某些难以解释的类似,我们将在以后的工作中加以探讨.

性质 2.5 赋值映射 $V \otimes \operatorname{Hom}_V(V,W) \to W$ $(v \otimes \phi \mapsto \phi(v))$ 是顶点代数同态, 这里 $V \otimes C_W(V)$ 是张量顶点代数 (参见文献 [3, 命题 3.12.5]).

证明 利用 $v = v_{-1}(\mathbf{1}^V)$ 以及

$$[f(v)_n, \phi(\mathbf{1}^V)_m] = \sum_{i>0} \binom{n}{i} (f(v)_i \phi(\mathbf{1}^V))_{m+n-i} = 0,$$

即 $f(v)_n$ 和 $\phi(\mathbf{1}^V)_m$ 交换, 对 $\phi \in \text{Hom}_V(V, W)$, 有

$$(f(v)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V}))_{n} = \sum_{i\geqslant 0} f(v)_{-1-i}\phi(\mathbf{1}^{V})_{n+i} + \sum_{i\geqslant 0} \phi(\mathbf{1}^{V})_{n-1-i}f(v)_{i}.$$
 (2.4)

所以, 对 $u, v \in V$, $\psi \in \text{Hom}_V(V, W)$, 利用 $\phi(u) = u_{-1}\phi(\mathbf{1}^V)$ 和 $\psi(u) = u_{-1}\psi(\mathbf{1}^V)$, 有

$$Y(v \otimes \phi, z)(u \otimes \psi) = Y^{W}(\phi(v), z)(\psi(u))$$

$$= \sum_{n} (f(v)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V}))_{n}f(u)_{-1}\psi(\mathbf{1}^{V})z^{-n-1}$$

$$= \sum_{n} \sum_{i \geqslant 0} f(v)_{-1-i}f(u)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V})_{n+i}\psi(\mathbf{1}^{V})z^{-n-1}$$

$$+ \sum_{n} \sum_{i \geqslant 0} f(v)_{i}f(u)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V})_{n-1-i}\psi(\mathbf{1}^{V})z^{-n-1}$$

$$= \sum_{n} \left(\sum_{m \geqslant n} f(v)_{-1+n-m}f(u)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V})_{m}\psi(\mathbf{1}^{V})z^{-m-1}z^{-n+m}$$

$$+ \sum_{l \leqslant n-1} f(v)_{n-1-l}f(u)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V})_{l}\psi(\mathbf{1}^{V})z^{-l-1}z^{-n+1}\right)$$

$$= \sum_{m,m'} f(v)_{m'}f(u)_{-1}\phi(\mathbf{1}^{V})_{m}\psi(\mathbf{1}^{V})z^{-m-1}z^{-m'-1}.$$

另一方面,

$$Y^{W}(f(v), z)f(u) \otimes Y^{C}(\phi, z)\psi = \sum_{m', m} f(v)_{m'}(f(u)) \otimes \phi(\mathbf{1}^{V})_{m} \circ \psi z^{-m-1} z^{-m'-1}$$

$$\mapsto \sum_{m', m} \phi(\mathbf{1}^{V})_{m}(\psi(f(v)_{m'}(f(u)))) z^{-m-1} z^{-m'-1}$$

$$= \sum_{m', m} \phi(\mathbf{1}^{V})_{m}(f(v)_{m'}(f(u)_{-1}\psi(\mathbf{1}^{V}))) z^{-m-1} z^{-m'-1}$$

$$= \sum_{m', m} f(v)_{m'} f(u)_{-1} \phi(\mathbf{1}^{V})_{m} \psi(\mathbf{1}^{V}) z^{-m-1} z^{-m'-1}.$$

证毕.

定理 2.6 设 V 和 W 是两个顶点算子代数,分别以 ω^V 和 ω^W 为它们的共形向量,若 $f:V\to W$ 是半共形映射,则 $\operatorname{Hom}_V(V,W)$ 是顶点算子代数并以 $\omega^{C_W(V)}=\omega^W-f(\omega^V)$ 为共形向量,同时映射 $\operatorname{Hom}_V(V,W)\to W$ ($\phi\mapsto\phi(\mathbf{1}^V)$) 是顶点算子代数之间的半共形同态,且映射 $g:V\otimes\operatorname{Hom}_V(V,W)\to W$ ($v\otimes\phi\mapsto\phi(v)$) 是顶点算子代数之间的共形同态.

证明 证明基本上基于文献 [3, 定理 3.11.12] 的证明方法, 并利用半共形的定义. 尽管文献 [3, 定理 3.11.12] 要求 W 是 \mathbb{N} 阶化的, 并满足条件 $W_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}^W$, 但是, 利用半共形的定义可知, 整个证明全部成立, 在此不再重复.

对于一个顶点算子代数 $(V,Y^V,\mathbf{1}^V,\omega^V)$, 它的中心电荷 c^V 是由公式 $L^V(2)\omega^V=\frac{1}{2}c^V\mathbf{1}^V$ 所定义. 若 $f:(V,Y^V,\mathbf{1}^V,\omega^V)\to (W,Y^W,\mathbf{1}^W,\omega^W)$ 是一个半共形同态, 则

$$L^{W}(2)f(\omega^{V}) = f(L^{V}(2)\omega^{V}) = \frac{1}{2}c^{V}f(\mathbf{1}^{V}) = \frac{1}{2}c^{V}\mathbf{1}^{W}.$$

交换子 $C_W(V) = \operatorname{Hom}_V(V, W)$ 的共形向量是 $\omega^{C_W(V)} = \omega^W - f(\omega^V)$,所以其中心电荷 $c^{C_W(V)}$ 是由

$$\frac{1}{2}c^{C_W(V)}\mathbf{1}^W = L^W(2)\omega^{C_W(V)} = L^W(2)\omega^W - L^W(2)f(\omega^V) = \frac{1}{2}(c^W - c^V)\mathbf{1}^W$$

所确定, 因而 $c^W=c^{C_W(V)}+c^V$. 如果 f 是共形的, 则 $\omega^{C_W(V)}=0$, 这时顶点算子代数 $C_W(V)$ 是 \mathfrak{Vir} 的平凡模.

注意到顶点算子代数之间半共形同态的复合还是一个半共形同态,我们用 VOA_{sc} 来记所有的顶点算子代数在半共形同态下所构成的范畴,类似地,用 VOA_{c} 记所有的顶点算子代数在共形同态下所构成的范畴. 这样 VOA_{c} 是 VOA_{sc} 的子范畴并具有相同的对象,但不是全子范畴.

性质 2.7 若 $f:(V,\omega^V)\to (W,\omega^W)$ 是 VOA_{sc} 中的一个满射, 则 f 是共形的, 即

$$f(\omega^V) = \omega^W.$$

证明 假设 $(f(V), f(\omega^V))$ 是 (W, ω^W) 的一个半共形子代数. 由文献 [4, 引理 5.1] 可知, $f(\omega^V)$ = ω^W .

推论 2.8 VOA_{sc} 中的同构全在 VOA_{c} 中. 顶点算子代数在 VOA_{c} 中和在 VOA_{sc} 的自同构群是相同的, 并且这两个范畴的同构类也是相同的.

注 2.9 由上推论可见研究顶点算子代数的分类问题在两个范畴中是一样的. 但在 \mathcal{VOA}_{sc} 中有更多的灵活性, 特别是陪集构造所得出的顶点算子代数都是半共形的.

注 2.10 我们知道 VOA_c 是一个对称张量范畴. 给定两个顶点算子代数 V 和 V', 并设 ω 和 ω' 分别是它们的共形向量,则 $V\otimes V'$ 的共形向量为 $\omega\otimes \mathbf{1}'+\mathbf{1}\otimes\omega'$. 若 $f:V\to V$ 和 $f':V'\to W'$ 是两个半共形同态,则线性映射 $f\otimes f':V\otimes V'\to W\otimes W'$ 也是顶点算子代数之间的半共形同态,所以, VOA_{sc} 也是一个对称张量范畴并且 VOA_c 是其张量子范畴.

性质 2.11 映射 $\rho: V \to V \otimes V'$ ($\rho(v) = v \otimes 1'$) 和 $\rho': V' \to V \otimes V'$ ($\rho'(v') = 1 \otimes V'$) 是 VOA_{sc} 中的态射并且满足 VOA_{sc} 中如下泛性质: 对于任何 VOA_{sc} 中态射 $f: (V, \omega^V) \to (W, \omega^W)$ 和 $f': (V', \omega^{V'}) \to (W, \omega^W)$,若 f(V) 与 f'(V') 交换, 则存在 VOA_{sc} 中的唯一态射 $g: V \otimes V' \to W$ 使得 $f = g \circ \rho$, $f' = g \circ \rho'$.

注 2.12 设 CA 为所有具有单位元 1 的交换结合 $\mathbb C$ 代数所组成的范畴, 关于 $\mathbb C$ 线性空间上的张量积, CA 是一个张量范畴. 每一个交换结合代数 A 自动是一个顶点算子代数, 这只要定义 Y(a,z)=a, 1=1 和 $\omega=0$ 即可. 这样得到一个函子 $CA\to VOA$. 实际上这个函子保持张量积并且使得 CA 成为 VOA_{sc} 的一个张量全子范畴, 这个函子有一个右伴随函子 $C:VOA_{sc}\to CA$ $(C(V)=C_V(V))$ 使得

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{CA}}(A, C(V)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{VOA}_{sc}}(A, V).$$

给定顶点算子代数 (W, ω^W) , 用 Salg(W) 记其所有半共形子代数的集合. 根据文献 [4, 引理 5.1] 知, W 的每个顶点子代数 V 最多只有一个共形向量 $\omega^V \in V$ 使得 (V, ω^V) 成为 W 的半共形子代数. 记 Sc(W) 为 W 中所有半共形向量的集合, 则存在 Salg(W) 到 Sc(W) 的一个满射.

定理 2.13 (参见文献 [28, 定理 1.1]) 对任一个顶点算子代数 (W,ω^W) , Sc(W) 是一个仿射代数簇.

性质 2.14 对任意 $V \in Salg(W)$, 有 $Salg(V) \subseteq Salg(W)$, 并存在映射 $C_W : Salg(W) \to Salg(W)$, $V \mapsto C_W(V)$, 其中 $C_W(V)$ 是 V 在 W 中的交换子代数, 且 $V \subseteq C_W(C_W(V))$, $C_W^3(V) = C_W(V)$.

定理 2.15 对应 $W \mapsto Sc(W)$ 定义了一个从范畴 $\mathcal{V}OA_{sc}$ 到仿射代数簇范畴 $\mathbb{V}ar/\mathbb{C}$ 的一个函子. 注 2.16 设 (W^1,ω^1) 和 (W^2,ω^2) 是两个顶点算子代数, $W=W^1\otimes W^2$ 为其张量积顶点算子代数, 则

$$Sc(W^1) \times Sc(W^2) \subseteq Sc(W)$$
,

但等式一般不成立. 例如, Heisenberg 顶点算子代数 $V_{\mathfrak{h}}(1,0)$ 可以分解为 $d=\dim\mathfrak{h}$ 个秩 1 的 Heisenberg 顶点算子代数的张量积, 但是 Sc(W) 同构于由 \mathfrak{h} 的所有正则子空间所组成的代数簇. 代数簇 $Sc(V_{\mathfrak{h}}(1,0))$ 在正交群作用下的轨道在文献 [28] 中得到刻画.

3 模范畴上的函子

3.1 模范畴上的交换子函子

回顾一下, 对于顶点代数同态 $f:V\to W$, V-VAMod 是顶点代数的 V-VA 模范畴, V-VAMod 是一个 Abel 范畴并且在直和及直积下是封闭的. 对于任一个 W-VA 模 M, $f^*(M)=M$ 是一个 V-VA 模. 这样就有一个函子 $f^*:W$ -VAMod $\to V$ -VAMod, 它是文献 [27] 中所讨论的在 $f:V\subseteq W$ 是共形子代数时限制函子的推广. 函子 f^* 总是正合的. 特别地, 当 M=W 时, $f^*(W)$ 就是我们前面在定义交换子时所用的 V-VA 模 W. 其实我们已经定义了 W-AV 模 M 中的 V 交换子为 $C_M(V)=\mathrm{Hom}_V(V,f^*(M))$, 由引理 2.3, 得到一个左正合函子 $\mathrm{Hom}_V(V,f^*(?)):W$ -VAMod $\to C_W(V)$ -VAMod.

注意到在赋值映射 $C_M(V) \to M$ ($\phi \mapsto \phi(\mathbf{1}^V)$) 下, $C_M(V)$ 就是 $f^*(M)$ 中的 vacuum-like 元素 (参见文献 [3, 第 4.7 小节]). 如果 V 和 W 是顶点算子代数, f 是半共形同态, M 是 W-VOA 模, 则由文献 [3, 推论 4.7.6] 可得

$$C_M(V) = \ker(L_{f^*(M)}^V(-1)).$$

特别地, 有 $C_W(V) = \ker(L_{f^*(W)}^V(-1))$ (参见文献 [3, 推论 3.11.11]).

性质 3.1 设 U 和 V 是顶点算子代数, W 是顶点代数且 $g:U\to V$ 是共形映射, 则对任一个顶点代数同态 $f:V\to W$, 任一个 W-VA模 M, 有 $C_M(V)=C_M(U)$.

3.2 半共形映射诱导的逆向函子

设 N 是 V-VA 模, M 是 W-VA 模. 定义

$$C(N, M) = \operatorname{Hom}_V(N, f^*(M)).$$

对任一个 V-VA 模同态 $\psi: N \to f^*(M)$ 和 $\phi \in C_W(V)$, 定义

$$Y^{C_W(V)}_{C(N,M)}(\phi,z)\psi=Y^W_M(\phi(\mathbf{1}^V),z)\circ\psi.$$

对 $x \in N$, 有

$$(Y^{C_W(V)}_{C(N,M)}(\phi,z)\psi)(x) = Y^W_M(\phi(\mathbf{1}^V),z)(\psi(x)) = \sum_x \phi(\mathbf{1}^V)_n(\psi(x))z^{-n-1}.$$

我们需要 $Y_{C(N,M)}^{C_W(V)}(\phi,z)\psi \in C(N,M)((z))$. 事实上, 因为 $\psi: N \to f^*(M)$ 是 V 模同态, 对 $v \in V$ 和 $x \in N$, 有

$$\begin{split} (Y^{C_W(V)}_{C(N,M)}(\phi,z)\psi)(Y^V_N(v,z_1)x) &= (Y^{C_W(V)}_{C(N,M)}(\phi,z)Y^W_M(f(v),z_1)(\psi(x)) \\ &= Y^W_M(\phi(\mathbf{1}^V),z)Y^W_M(f(v),z_1)(\psi(x)) \\ &= Y^W_M(f(v),z_1)Y^W_M(\phi(\mathbf{1}^V),z)(\psi(x)) \\ &= Y^V_{f^*(M)}(v,z_1)Y^W_M(\phi(\mathbf{1}^V),z)(\psi(x)). \end{split}$$

性质 3.2 $C(\cdot,\cdot): V\text{-VAMod} \times W\text{-VAMod} \to C_W(V)\text{-VAMod}$ 是一个可加的双函子. 它对第一变量是反变的, 对第二变量是协变的. $C(\cdot,\cdot)$ 对每个变量都是左正合的.

证明 可直接验证 $(C(N,M),Y_{C(N,M)}^{C_W(V)})$ 是一个 $C_W(V)$ -VA 模. 函子性质以及正合性成立是因为 $C(N,M)=\mathrm{Hom}_V(N,f^*(M))$ 是通常 Abel 范畴, 以及 f^* 是正合函子.

引理 3.3 设 N 是具有 vacumm-like 元 x^N 的不可约 V 模, 则赋值映射 $C(N,M) \to M$ ($\phi \mapsto \phi(x^N)$) 是 $C_W(V)$ 模同态. 若 V 和 W 都是顶点算子代数, f 是半共形同态, 则赋值映射是 $C_W(V)$ 模的同态.

3.3 张量积

给定两个顶点代数 V' 和 V'', 张量积空间 $V' \otimes V''$ 上有一个自然的顶点代数结构

$$Y^{V'\otimes V''}(v'\otimes v'',z) = Y^{V'}(v',z)\otimes Y^{V''}(v'',z)$$

且 $\mathbf{1}_{V'\otimes V''} = \mathbf{1}_{V'} \otimes \mathbf{1}_{V''}$ (参见文献 [3, 命题 3.12.5]).

定义 $W=V'\otimes V''$, V=V' 和映射 $f:V\to W$ $(f(v)=v\otimes \mathbf{1}^{V''})$, 则 f 是一个顶点代数同态并且 $C_W(V)\supseteq \mathbf{1}^{V'}\otimes V''$. 若 V' 和 V'' 是顶点算子代数, ω' 和 ω'' 分别是它们的共形向量,则 $V'\otimes V''$ 也是一个顶点算子代数以 $\omega^{V'\otimes V''}=\omega'\otimes \mathbf{1}^{V''}+\mathbf{1}^{V'}\otimes \omega^{V''}$ 为共形向量.显然,f 是半共形的,并且 $V'\otimes \mathbf{1}''$ 是 $V'\otimes V''$ 的半共形子代数.因而, $C_{V'\otimes V''}(V'\otimes \mathbf{1}^{V''})$ 也是 $V'\otimes V''$ 的半共形子代数,其共形向量为 $\mathbf{1}^{V'}\otimes \omega^{V''}$.

性质 3.4 $C_{V'\otimes V''}(V'\otimes \mathbf{1}^{V''})=C_{V'}(V')\otimes V''$. 如果 V' 是单的, 则 $C_{V'\otimes V''}(V'\otimes \mathbf{1}^{V''})=\mathbf{1}^{V'}\otimes V''$. 证明 设 $\sum_{i=1}^m v'^i\otimes v''^i\in C_{V'\otimes V''}(V'\otimes \mathbf{1}^{V''})$, 可以假设 $\{v''^1,\ldots,v''^m\}$ 在 V'' 中是线性无关的. 于是, 对任何 $u'\in V'$, $n\geqslant 0$,

$$(u' \otimes \mathbf{1}^{V''})_n \left(\sum_{i=1}^m v'^i \otimes v''^i\right) = \sum_{i=1}^m u'_n(v'^i) \otimes v''^i = 0$$

意味着对所有 $i, u_n'(v'^i) = 0$,因而 $v'^i \in C_{V'}(V')$.显然有 $C_{V'}(V') \otimes V'' \subseteq C_{V' \otimes V''}(V' \otimes \mathbf{1}^{V''})$,因此性质的第一部分成立.若 V' 是一个单的顶点算子代数,则由文献 [3, 命题 3.11.4] 可知, $C_{V'}(V') = \mathbb{C}\mathbf{1}^{V'}$. 口我们仍然假设 N 是一个 V-VA 模,M 是一个 W-VA 模, $f: V \to W$ 是一个顶点代数同态.考虑映射 $\mathrm{Hom}_V(N, f^*(M)) \otimes N \to M$, $\phi \otimes x \mapsto \phi(x)$.对顶点代数 $C_W(V) \otimes V$,可以将 $\mathrm{Hom}_V(N, f^*(M)) \otimes N$ 看作一个 $(C_W(V) \otimes V)$ -VA 模.

3.4 换位子的单性问题

现在假设 M 是一个单 W 模, 其中一个有趣的问题是, 何时 $C_M(V)$ 是单的 $C_W(V)$ 模? 需要指出的是, 对这个问题并没有一般的答案.

3.5 函子

对每一个 $N \in V$ -VAMod, 函子 $C(N, \cdot)$: WMod $\to C_W(V)$ -VAMod 是左正合的. 有关这个函子, 其中一个问题便是研究不可约表示的像.

注意到 $\ker f \in V$ 的一个理想, 且 $V/\ker(f) \cong \Im(f)$ 是 W 的一个顶点子代数. 对任何 V 模 N, $\ker(Y_N^V)$ 是顶点代数 V 的一个理想, 且 N 是一个忠实的 $V/\ker(Y_N^V)$ 模. 特别地, 对 $f^*(M)$ 的任一个子商 N, 有 $\ker(Y_N^V) \supseteq \ker(f)$.

引理 3.5 对任何 V-VA模 N, 若 $\ker(f) \nsubseteq \ker(Y_N^V)$, 则 $\operatorname{Hom}_V(N, f^*(M)) = 0$.

因此仅考虑 V-VA 模 N 满足 $\ker(f) \subseteq \ker(Y_N^V)$, i.e., N 是一个 $\Im(f)$ -VA 模. 这样可以假设 f 是单的且 $V \subset W$ 是 W 的一个顶点子代数.

性质 3.6 设 W 是一个顶点代数, V 是一个顶点子代数满足 $C_V(V)=\mathbb{C}\mathbf{1}^V$, 则赋值映射 $V\otimes C_W(V)\to W$ 是顶点代数的一个嵌入. 若 W 是一个顶点算子代数且具有共形元 ω^W , 且 V 是 W 的一个半共形子代数且具有共形元 ω^V , 则 $V\otimes C_W(V)\to W$ 是一个共形嵌入. 特别地, $V\otimes C_W(V)$ 在 W 中的共形闭包是 W.

3.6 极大半单子模

对一个顶点代数 V, 用 Irr(V) 表示所有不可约 V-VA 模的同构类做成的集合. 若 M 是一个 V 模, $Soc_V(M)$ 是由 M 的所有不可约子模线性张成的 M 的子空间. 特别地, $Soc_V(M)$ 是 M 的一个极大完全可约子模. 当 V 是一个顶点算子代数, 在需要加以区分的情形下, 分别用 $Irr(V)_{VOA}$ 和 $Irr(V)_{VA}$ 表示 V-VOAMod 和 V-VAMod 中的不可约同构类做成的集合.

性质 3.7 设 V 是顶点代数 W 的一个顶点子代数, 且 $N \in Irr(V)$, 则对任意 W-VA 模 M, 赋值 映射 $N \otimes C(N,M) \to M$ 是 $(V \otimes C_W(V))$ -VA 模的单同态, 且

$$Soc_V(M) = \bigoplus_{N \in Irr(V)} N \otimes C(N, M).$$

进一步地, $Soc_V(M)$ 是 M 的一个 $V \otimes C_W(V)$ 子模, 且上式是 $V \otimes C_W(V)$ 子模的直和分解.

3.7 交换子模的单性

设 W 是一个顶点算子代数, V 是 W 的一个半共形顶点子代数. 对一个 W-VOA 模 M, 令 $\mathrm{Irr}_M(V)=\{N\in\mathrm{Irr}(V)\mid C(N,M)\neq 0\}.$

定理 3.8 假设 V 和 W 都是单的, 且作为一个 V-VOA 模, W 是完全可约的. 若 $N \in Irr(V)$ 满足对所有 $N' \in Irr_W(V)$, $N' \ncong V$, 有

$$I_V \begin{pmatrix} N \\ N', N \end{pmatrix} = 0,$$

则对任意一个满足性质 $Soc_V(M) = M$ 的单 W 模 M, C(N, M) 是一个单 $C_W(V)$ 模.

定理的证明基于文献 [3, 命题 4.5.6] 和以下被广泛引用的事实.

引理 3.9 设 $U \subset W$ 是顶点算子代数的共形扩张, 且作为 U 模, W 有分解

$$W = \bigoplus_{s \in S} F^s.$$

若 E 是一个 W-VA 模, 且作为 U-VOA 模, 具有分解 $E = \bigoplus_{t \in T} E^t$, 则

$$(F^s)_n(E^t) \subseteq \bigoplus_{\substack{t' \in T \\ I_U(\sum_{F^s E^t}^t) \neq 0}} E^{t'}.$$

证明 设 Y_E^W 是定义在 E 上的 W-VA 模结构. 对 $t \in T$, 用 $pr^t : E \to E^t$ 表示投影映射, $\iota^t : E^t \to E$ 表示相应于 E 的分解的嵌入映射, 则映射 $v \in F^s \subseteq W \mapsto I(v,z) = pr^{t'} \circ Y_E^W(v,z) \circ \iota^t \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(E^t, E^{t'})((z))$ 定义了一个缠结算子. 事实上, Jacobi 等式总是成立的, $L^W(-1)$ 导子性质由 U 和 W 具有相同的共形元且 $L^U(n) = L^W(n)$ 而得到.

3.8 交换子代数的单性

现在把上述引理应用到情形 $U=V\otimes C_W(V),\ F^s=N^s\otimes C(N^s,W),\ E^s=N^s\otimes C(N^s,M),$ $s\in S=T={\rm Irr}(V).$ 已知

$$I_{V \otimes C_W(V)} \begin{pmatrix} N'' \otimes C(N'', M) \\ N \otimes C(N, W), N' \otimes C(N', M) \end{pmatrix} \subseteq I_V \begin{pmatrix} N'' \\ N, N' \end{pmatrix} \otimes I_{C_W(V)} \begin{pmatrix} C(N'', M) \\ C(N, W), C(N', M) \end{pmatrix}.$$

特别地, $I_V(\frac{N''}{N,N'}) = 0$ 意味着

$$I_{V \otimes C_W(V)} \begin{pmatrix} N'' \otimes C(N'', M) \\ N \otimes C(N, W), N' \otimes C(N', M) \end{pmatrix} = 0.$$

设 $pr^N:M\to N\otimes C(N,M)$ 是直和分解下的投影映射, 则 $I_V({}^N_{N',N})\neq 0$ 意味着 $N'\cong V$, 因此, 若 $N'\ncong V$, 则

$$pr^N Y_M^W(N' \otimes C(N', W), z)(N \otimes C(N, M)) = 0.$$

若 $C \subseteq C(N, M)$ 是一个 $C_W(V)$ 模,则由子空间 $N \otimes C$ 生成的 M 的 W 子模是由

$$Y_M^W(W,z)(N\otimes C) = \sum_{N'\in \operatorname{Irr}(V)_W} Y_M^W(N'\otimes C(N',W),z)(N\otimes C)$$

的系数 € 线性张成的. 因此有

$$pr^{N}(Y_{M}^{W}(W,z)(N\otimes C)\subseteq \operatorname{span}Y_{M}^{W}(V\otimes C_{W}(V),z)(N\otimes C)$$

$$\subseteq \operatorname{span}(Y^{N}(V,z)N\otimes Y_{C(V,M)}^{C_{W}(V)}(C_{W}(V),z)C.$$

由于 C 是 C(N,M) 的一个 $C_W(V)$ 模, 因此有 $Y^{C_W(V)}_{C(V,M)}(C_W(V),z)C\subseteq C((z))$. 因此,

$$pr^{N}(Y_{M}^{W}(W,z)(N\otimes C))\subseteq (N\otimes C)((z)).$$

这就证明了, 若 C 是 C(N,M) 的真 $C_W(V)$ 子模, 则由 $N \otimes C$ 生成的 W 子模是真子模. M 是单 W 模意味着 C(N,M) 是一个单 $C_W(V)$ 模.

推论 3.10 设 V 是顶点算子代数 W 的半共形子代数, V 和 W 均为单的且 W 是一个半单 V 模, 则 $C_W(V)$ 是一个单的顶点算子代数, 且 C(V,M) 是零或单的 $C_W(V)$ 模.

事实上, 对任何 $N \in \operatorname{Irr}_W V$, $I_V({V \choose N V}) \neq 0$ 当且仅当 N = V 时成立 (参见文献 [30]).

3.9 张量分解

现在固定 $N \in \operatorname{Irr} V$ 满足对任何 $N' \in \operatorname{Irr}(V)_W$, $I_V({}^N_{N,N}) \neq 0$ 只有当 N' = V 时成立,则有 $C(N,\operatorname{Irr}(W)) \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{Irr}(C_W(V))$. 若 $V = V_L$ 是一个正定偶格顶点算子代数,则 $\operatorname{Irr}(V) = \{N_{\gamma} \mid \gamma \in L^0/L\}$ 且 $I_V({}^{N_{\gamma_1},N_{\gamma_2}}_{N_{\gamma_1},N_{\gamma_2}}) \neq 0$ 当且仅当 $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3$. 因此,定理 3.8 的条件总是成立.特别地,任意 $M \in \operatorname{Irr}(W)$ 满足定理的条件,因为 M 作为 V 模是完全可约的.

类似于约化群中由 Howe 研究的约化对偶对, 若 $C_W(C_W(V)) = V$, 则称 $(V, C_W(V))$ 是 W 中的一个对偶对. 一个有趣的问题是, 研究单有理顶点算子代数的满足如下性质的对偶对: 其中一个顶点

子代数是正定偶格顶点算子代数. 文献 [11] 最近证明了, 在此情形下, 另一个顶点子代数也一定是有理的.

若 (V,U) 和 (V',U') 是 W 中的两个对偶对, 且 $V \subseteq V'$, 则有 $U' \subseteq U$. 现设 $M \in Irr(W)$ 且 M 作为 V 模是完全可约的, 则有

$$M = \bigoplus_{N \in Irr(V)} N \otimes C(N, M).$$

令

$$C_M(V, C_W(V)) = \{ (N, C(N, M)) \in Irr(V) \times Irr(C_W(V)) \mid C(N, M) \neq 0 \}.$$

对 $(N, E) \in C_M(V, U)$ 和 $(N', E') \in C_M(V', U')$, 我们期望下面的互反律成立:

$$\operatorname{Hom}_{V}(N, N') \cong \operatorname{Hom}_{U'}(E', E). \tag{3.1}$$

这条性质是由 Howe 研究的约化对偶对在顶点算子代数理论中的类比 (参见文献 [31, 定理 5.2]).

事实上, 包含关系 $V \subseteq V'$ 意味着 $C_{V'}(V) = V' \cap C_W(V) = V' \cap U$. 所以, $(V, V' \cap U)$ 是 V' 中的一个对偶对. 类似地, $(U', V' \cap U)$ 是 U 中的一个对偶对. 我们有分解

$$N' = \bigoplus_{N \in \operatorname{Irr}(V)} N \otimes \operatorname{Hom}_V(N, N'), \quad E = \bigoplus_{E' \in \operatorname{Irr}(V)} E' \otimes \operatorname{Hom}_{U'}(E', E).$$

从分解

$$M = \bigoplus_{N \in \operatorname{Irr}(V)} N \otimes E = \bigoplus_{E' \in \operatorname{Irr}(U')} N' \otimes E',$$

有

$$M = \bigoplus_{N' \in \operatorname{Irr}(V')} \bigoplus_{N \in \operatorname{Irr}(V)} N \otimes \operatorname{Hom}_{V}(N, N') \otimes E' = \bigoplus_{E \in \operatorname{Irr}(U)} \bigoplus_{E' \in \operatorname{Irr}(U')} N' \otimes \operatorname{Hom}_{U'}(E', E) \otimes E'.$$

这样, (3.1) 既是向量空间的同构, 也是 $V' \cap U$ 模同构. 这给出了顶点算子代数中的 Howe 对偶互反律 (参见文献 [31]).

我们将在后面讨论诱导函子及其性质. 文献 [27] 中对 g 扭 (twisted) 表示在共形嵌入情形下研究的诱导函子也适用于半共形嵌入情形.

现在感兴趣的是下面的包含关系:

$$\bigcup_{N} (C(N, \operatorname{Irr}(W)) \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{Irr}(C_{W}(V))$$

是否是一个等式, 这里的并是取所有的满足上面条件的 $N \in Irr(V)$.

当然有可能 W 包含两个半共形顶点子代数 V' 和 $V\subseteq V'$,满足对所有不可约 W 模 M,有 $\operatorname{Hom}_V(V,M)=\operatorname{Hom}_{V'}(V',M)$.我们主要考虑半共形子代数 $V\subseteq W$ 满足 $C_W(C_W(V))=V$.

由文献 [3, 推论 3.11.11], 有 $C_W(V) = \ker(L_W^V(-1))$. 若 V 是半共形的,则 $C_W(V) \cap V \subseteq V_{(0)}$ = $\ker(L^V(0))$. 这样 $C_W(C_W(V)) = \ker(L^W(-1) - L_W^V(-1))$,且 $V \subseteq C_W(C_W(V))$ 是一个共形扩张. 因此有如下性质.

性质 3.11 设 V 是顶点算子代数 W 的一个半共形子代数, 则 $C_W(C_W(V))$ 是 V 在 W 中的一个极大共形扩张.

称 W 的一个半共形子代数 V 在 W 中是共形封闭的, 若 V 在 W 中没有非平凡的共形扩张, 即 V 在 W 中的共形扩张等于 V 本身. 这样 V 在 W 中是共形封闭的当且仅当 $C_W(C_W(V)) = V$. 若 用 $\bar{\mathbf{S}}(W)$ 表示 W 的所有共形封闭的半共形子代数做成的集合, 则有 $C_W(\mathbf{S}(W)) = \bar{\mathbf{S}}(W)$.

推论 3.12 设 W 是一个单的顶点算子代数, V 为 W 的一个共形封闭的顶点子代数, 使得 W 作为 V 模是完全可约的, 则 $C_W(V)$ 是单的.

上述推论可以由以下被广泛使用的引理得到.

引理 3.13 设 W 是一个顶点算子代数, V 是 W 的一个顶点子代数. 若 M 是 W 的一个 V 子 模使得 $Y^W(M,z)V \subseteq V((z))$, 则 $M \subseteq V$.

现在证明上述推论. 首先假设 V 是单的, 则 W 作为 V 模的半单性意味着

$$W = V \otimes C_W(V) \oplus \bigoplus_N (N \otimes C(N, W)). \tag{3.2}$$

这里和式中的 N 是不同构于 V 的不可约 V 模, 且满足 $C(N,W) \neq 0$. 若 $0 \neq A \subseteq C_W(V)$ 是一个 $C_W(V)$ 理想, 则由 $V \otimes A$ 生成的 W 模是

$$\langle V \otimes A \rangle = (V \otimes C_W(V)) \cdot (V \otimes A) + \sum_N (N \otimes C(N, W)) \cdot (V \otimes A).$$

上述引理意味着, 若 N 不同构于 V, 则 $(N \otimes C(N, W)) \cdot (V \otimes A) = (V \otimes A) \cdot (N \otimes C(N, W)) = N \otimes C(N, W)$. 若 N = V, 则 $(N \otimes C(N, W)) \cdot (V \otimes A) \subseteq V \cdot V \otimes (C_W(V) \cdot A) \subseteq V \otimes A$. 由 W 是单的, 有 $A = C_W(V)$.

现设 V 不是单的. 假设 W 作为 V 模是完全可约的, 因而 V 作为 V 模也是完全可约的. 设 U 是任意一个不可约 V 模满足 $\operatorname{Hom}_V(U,V) \neq 0$, 则 $U \otimes C(U,W) \subseteq V \otimes C_W(V)$. 因此在分解 (3.2) 中, 第二部分中是取所有的不可约 V 模满足 $\operatorname{Hom}_V(V,N) = \operatorname{Hom}_V(N,V) = 0$. 如同 V 是单的情形的讨论,可得 $C_W(V)$ 是单的.

一个被广泛认同的猜想是, 若W是有理顶点算子代数,则所有共形封闭的半共形子代数也是有理的.

4 Jacquet 函子

设 $(W,Y,\mathbf{1},\omega^W)$ 是一个顶点算子代数, (V,ω^V) 是一个半共形顶点子代数. 我们已知限制函子 $W\text{-VAMod} \to V\text{-VAMod}$ 一般情形下不一定将子范畴 W-VOAMod 中的对象. 类似情形是具有选定极大紧子群的约化群的 Harish-Chandra 模范畴.

设 $N \in W$ -VOAMod. 我们采用如下记号:

$$Y_N^W(\omega^W,z) = \sum_n L_N^W(n) z^{-n-2}, \quad Y_N^W(\omega^V,z) = \sum_n L_N^V(n) z^{-n-2}.$$

定义

$$J_V(N) = \bigcap_{n \geqslant 0} \ker(L_N^W(n) - L_N^V(n) : N \to N).$$

引理 4.1 设 $N \in W$ -VAMod, 则 $J_V(N)$ 是 N 的一个 V 子模. 进一步地, 若 $N \in W$ -VOAMod, 则 $J_V(N) \in V$ -VOAMod.

证明 设 $\omega' = \omega^W - \omega^V$, 则 ω' 是 W 的相应于半共形子代数 $(C_W(V), \omega')$ 的一个半共形元. 注意到 $L_N^W(n) - L_N^V(n) = \omega'_{(n+1)}$. 由于 $L_N^W(-1) = L_N^V(-1)$ 总成立, 所以,

$$J_V(N) = \{x \in N \mid \omega_n'(x) = 0, n \geqslant 0\} = C_N(\langle \omega' \rangle),$$

且是一个 $C_W(\langle \omega' \rangle)$ -VA 模. 注意到 $C_W(\langle \omega' \rangle)$ 是 V 的一个共形扩张, 所以, $J_V(N)$ 是 N 的一个 V-VA 子模. 由 $L_N^W(0)|_{J_V(N)} = L_N^V(0)_{J_V(N)}$, 有 $J_V(N) = \bigoplus_{a \in \mathbb{C}} J_V(N)_a$, 满足 $J_V(N)_a = N_a \cap J_V(N)$. 因此, $J_V(N)$ 是一个 V-VOA 模.

下面的目的是证明函子 $J_V(?): W\text{-VOAMod} \to V\text{-VOAMod}$ 是正合的.

一般而言,对顶点算子代数的一个半共形映射 $f:(V,Y^V,\mathbf{1}^V,\omega^V)\to (W,Y^W,\mathbf{1}^W,\omega^W)$,函子 $f^*:W\text{-VAMod}\to V\text{-VAMod}$ 不保持 VOA 模范畴,但可定义 Jacquet 函子 $J_V(?)=f^*\circ J_{f(V)}(?)$.

注意到
$$J_V(N) = f^*(C_N(C_W(\langle \omega^W - f(\omega^V) \rangle)))$$
 且

$$C_N(C_W(\langle \omega^W - f(\omega^V) \rangle)) = \operatorname{Hom}_{C_W(\langle \omega^W - f(\omega^V) \rangle)}(C_W(\langle \omega^W - f(\omega^V) \rangle), N),$$

 $J_V(?)$ 是左正合共变函子.

我们的目标是构造一个左伴随函子 $I_V^W:V ext{-VOAMod}\to W ext{-VOAMod}$ 和一个右伴随函子 col: $V ext{-VOAMod}\to W ext{-VOAMod}$ 满足对所有 $M\in V ext{-VOAMod}$ 和 $N\in W ext{-VOAMod}$,有

$$\operatorname{Hom}_W(I_V^W(M), N) = \operatorname{Hom}_V(M, J_V(N)), \quad \operatorname{Hom}_W(N, \operatorname{col}_V^W(M)) = \operatorname{Hom}_V(J_V(N), M).$$

例 4.2 设 \mathfrak{V} ir 是 Virasoro 李代数, 具有基向量 $\{L(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 和中心元 C 满足

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(n+m) + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}C.$$

记 $\mathfrak{Vir}^+ = \sum_{n>0} \mathbb{C}L(n)$, $\mathfrak{Vir}^- = \sum_{n<0} \mathbb{C}L(n)$. 设 $\mathfrak{Vir}^0 = \mathbb{C}L(0) \oplus \mathbb{C}c$, 则 $P_{\mathfrak{Vir}} = \mathfrak{Vir}^0 + \mathfrak{Vir}^+$ 是一个李子代数 (具有幂零根基 \mathfrak{Vir}^+ 的抛物子代数).

对 \mathfrak{Vir} , 我们定义范畴 $\mathfrak{O}(\mathfrak{Vir})$, 其对象为所有 \mathfrak{Vir} 模 N 满足: (1) $N \mid_{\mathfrak{Vir}^0}$ 是半单的且权空间有限 维; (2) \mathfrak{Vir}^+ 中的元素是局部幂零的.

设 M 为一个 \mathfrak{Vir}^0 模, 且为有限个不可约模的直和, 将 M 提升为一个 $P_{\mathfrak{Vir}}$ 模使得 \mathfrak{Vir}^+ 的作用 为零. 定义 $I(M)=U(\mathfrak{Vir})\bigotimes_{U(P_{\mathfrak{Vir}})}M$.

作为 \mathfrak{Vir}^0 模, 在伴随表示下 $U(\mathfrak{Vir})$ 是权空间的直和. 令

$$\operatorname{Hom}^0(U(\mathfrak{V}\mathfrak{ir}),M)=\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Irr}(\mathfrak{V}\mathfrak{ir}^0)}\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{V}\mathfrak{ir})_{\lambda},M).$$

 $U(\mathfrak{Vir})$ 上的左乘给出一个 $P_{\mathfrak{Vir}}$ 模结构, 从而得到 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{Vir}), M)$ 上的一个 $P_{\mathfrak{Vir}}$ 模结构. 直接验证可知, $\operatorname{Hom}^{0}(U(\mathfrak{Vir}), M)$ 是 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{Vir}), M)$ 的一个 $P_{\mathfrak{Vir}}$ 子模. 因此, 定义

$$\operatorname{coI}(M) = \operatorname{Hom}_{P_{\mathfrak{Vir}}}^{0}(U(\mathfrak{Vir}), M) = \operatorname{Hom}^{0}(U(\mathfrak{Vir}), M)^{P_{\mathfrak{Vir}}}.$$

定义 Jacquet 函子 $J: \mathcal{O}(\mathfrak{Vir}) \to \mathfrak{Vir}^0 \mathrm{Mod}$ 如下: $N \mapsto N^{\mathfrak{Vir}^+}$. 由于 \mathfrak{Vir}^+ 是 $P_{\mathfrak{Vir}}$ 的一个理想, 所以, $N^{\mathfrak{Vir}^+}$ 自然地是一个 \mathfrak{Vir}^0 模. 直接验证便知 (I,J) 和 (J,col) 是伴随对. 这是相应于约化李代数的抛物子代数的标准 Jacquet 函子.

注 4.3 对于给定的一个半单李群 G 及其一个固定的极大紧子群 K, 用 \mathfrak{g} 表示 G 的李代数, 用 $\mathfrak{C}(\mathfrak{g},K)$ 表示 Harish-Chandra 模范畴. 给定一个抛物子代数 $\mathfrak{p}=\mathfrak{l}+\mathfrak{n}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{l},K')$ 是相应于 (\mathfrak{l},K') 的 Harish-Chandra 模范畴. 正常的限制函子不能把 $\mathfrak{C}(\mathfrak{g},K)$ 映到 $\mathfrak{C}(\mathfrak{l},K')$. 我们需要取 \mathfrak{n} 零化子以得到 Jacquet 函子 (参见文献 [32]). Jacquet 函子和抛物诱导函子形成伴随对. 在顶点算子代数理论中, 我们讨论相应的抛物诱导函子. 共形子代数的诱导函子在文献 [27] 中讨论过.

5 半共形子代数簇

设 W 是一个顶点算子代数, 回顾 Salg(W) 是由 W 的所有半共形子代数做成的集合, 显然, Salg(W) 在包含关系下是一个偏序集. 设 Sc(W) 是由 W 的所有半共形元做成的集合, 则 Sc(W) 是 W_2 的一个子集合. 事实上, Sc(W) 是 W_2 中的一个仿射代数闭子簇 (参见文献 [28,29]), 且存在满射 $Salg(W) \to Sc(W)$, $(V,\omega') \mapsto \omega'$. 有如下两个映射 $s,t:Sc(W) \to Salg(W)$: $s(\omega') = \langle \omega' \rangle$ 和 $t(\omega') = C_W(C_W(s(\omega')))$. 显然, $s(\omega') \subset t(\omega')$ 是一个共形扩张.

给定一个顶点算子代数 $(W, Y^W, 1^W, \omega^W)$, 记 $\mathcal{B}(W)$ 为 W 的所有共形子代数做成的集合. $\mathcal{B}(W)$ 不是一个有限型代数簇, 但它是有限维代数簇的正向极限. 对于一个有限维半单李代数, 它的所有的 Borel 子代数的集合是一个完备的代数簇, 称作旗簇, 它的余切向量丛是几何表示中一个主要的研究对象. 对于一个顶点算子代数, 我们也希望构造出类似的集合对象, 用于研究顶点算子代数及其表示, 我们将在今后的工作中作进一步的讨论.

致谢 本文的研究开始于第二作者在 2013 年夏天对上海交通大学的访问. 其后第一作者在上海交通大学对外合作资助下 2014 年对堪萨斯州立大学的访问使得半共形子代数在各种构造中作用更加明确, 两位作者各自感谢对方单位在研究过程中所给予的支持. 与楚彦军的讨论启发了 Jacquet 函子的构造. 在此期间两位作者均与董崇英进行了多次讨论, 特别是诱导表示理论始于第二作者与董崇英的合作. 我们在此对他表示感谢.

参考文献 -

- 1 Borcherds R E. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster. Proc Natl Acad Sci USA, 1986, 83: 3068–3071
- 2 Frenkel I B, Lepowsky J, Meurman A. Vertex Operator Algebras and the Monster. New York: Academic Press, 1988
- 3 Lepowsky J, Li H. Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations. Boston: Birkhäuser, 2004
- 4 Jiang C, Lin Z. Tensor decomposition, parafermions, level-rank duality, and reciprocity law for vertex operator algebras. ArXiv:1406.4191, 2014
- 5 Adamovic D, Perse O. The vertex algebra $M(1)^+$ and certain affine vertex algebras of level-1. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2012, 8: 040
- 6 Arakawa T, Lam C, Yamada H. Zhu's algebra, C_2 -algebras and C_2 -cofiniteness of parafermion vertex operator algebras. Adv Math, 2014, 264: 261–295
- 7 Arakawa T, Lam C, Yamada H. Parafermion vertex operator algebras and W-algebras. ArXiv:1701.06229, 2017
- 8 Blumenhagen R, Eholzer W, Honecker A, et al. Coset realization of unifying W-algebras. Internat J Modern Phys A, 1995, 10: 2367–2430
- 9 de Boer J, Feher L, Honecker A. A class of W-algebras with infinitely generated classical limit. Nuclear Phys B, 1994, 420: 409–445
- 10 Chen T, Lam C. Extension of the tensor product of unitary Virasoro vertex operator algebra. Comm Algebra, 2007, 35: 2487–2505
- 11 Creutzig T, Kanade S, Linshaw A, et al. Schur-Weyl duality for Heisenberg cosets. ArXiv:1161.00305, 2016
- 12 Creutzig T, Linshaw A. Cosets of affine vertex algebras inside large structures. ArXiv:1407.8512, 2014
- 13 Dong C, Lam C, Wang Q, et al. The structure of parafermion vertex operator algebras. J Algebra, 2010, 323: 371–381
- 14 Dong C, Lam C, Yamada H. W-algebras related to parafermion vertex operator algebras. J Algebra, 2009, 322: 2366-2403

- 15 Dong C, Jiao X, Xu F. Mirror extensions of vertex operator algebras. Comm Math Phys, 2014, 329: 263–294
- 16 Dong C, Ren L. Representations of parafermion vertex operator algebras. Adv Math, 2017, 315: 88–101
- 17 Dong C, Wang Q. The structure of parafermion vertex operator algebras: General case. Comm Math Phys, 2010, 299: 783-792
- 18 Dong C, Wang Q. On C₂-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras. J Algebra, 2011, 328: 420–431
- 19 Frenkel I, Zhu Y. Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. Duke Math J, 1992, 66: 123–168
- 20 Gepner D, Qiu Z. Modular invariant partition functions for parafermionic field theories. Nuclear Phys B, 1987, 285: 423–453
- 21 Goddard P, Kent A, Olive D. Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebra. Comm Math Phys, 1986, 103: 105–119
- 22 Jiang C, Lin Z. The commutant of $L_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(n,0)$ in the vertex operator $L_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(1,0)^{\otimes n}$. Adv Math, 201, 301: 227–257
- 23 Kac V. Infinite-dimensional Lie Algebras, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 24 Lam C. A level rank duality for parafermion vertex operator algebras of type A. Proc Amer Math Soc, 2014, 142: 4133–4142
- 25 Lam C, Sakuma S. On a class of vertex operator algebras having a faithful S_{n+1} -action. Taiwanese J Math, 2008, 12: 2465–2488
- 26 Lam C, Yamada H. Decomposition of the lattice vertex operator algebra $V_{\sqrt{2}A_l}$. J Algebra, 2004, 272: 614–624
- 27 Dong C, Lin Z. Induced representations of vertex operator algebras. Comm Math Phys, 199, 179: 157–184
- 28 Chu Y, Lin Z. The varieties of Heisenberg vertex operator algebras. Sci China Math, 2017, 60: 379-400
- 29 Chu Y, Lin Z. The varieties of semi-conformal vectors of affine vertex operator algebras. ArXiv:1709.05714, 2017
- 30 Dong C, Lepowsky J. Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators. Progress in Mathematics, vol. 112. Boston: Birkhäuser, 1993
- 31 Howe R. Reciprocity law in the theory of duality pairs. In: Representation Theory of Reductive Groups. Boston: Birkhäuser, 1983, 159–175
- 32 Casselman W. Jacquet modules for real reductive groups. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978). Helsinki: Acad Sci Fennica, 1980, 557–563

Categories and functors in the representation theory of vertex operator algebras

JIANG CuiPo & LIN ZongZhu

Abstract In this paper, we use the language of categories to describe representation theory of vertex operator algebras. The category of all vertex operator algebras and the category of modules of a vertex operator algebra are discussed. A homomorphism between two vertex operator algebras should preserve the Virasoro vectors, which is equivalent to commuting with the operators L(n) for all $n \in \mathbb{Z}$. We expand the morphisms of this category so that morphisms are semi-conformal in the sense that they commute with those L(n) with $n \ge 0$. This expansion does not change the classification of problem and makes the category into a tensor category. The coset construction becomes more natural in this category and relations between the module categories of vertex operator algebras can be described in terms of Hom-functors. As an application, we also construct the corresponding Jacquet functors. The semi-conformal vertex operator subalgebras plays the role of the Levi subgroups of a reductive group.

Keywords vertex operator algebra, semi-conformal homomorphism, Jacquet functor

MSC(2010) 17B69

doi: 10.1360/N012017-00150