



平面机械系统动力学建模的复合方法

王皓*, 林忠钦, 来新民

上海交通大学机械与动力工程学院, 机械系统与振动国家重点实验室, 车身设计与制造研究所, 上海 200240

* E-mail: wanghao@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2006-10-20; 接受日期: 2007-05-31

国家自然科学基金(批准号: 50605042)和国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(批准号: 2006CB705400)资助项目

摘要 针对平面机构拓扑结构组成特点, 提出平面机构动力学建模的复合方法. 依据机构结构学原理划分动力学建模的单元, 采用状态空间方法表达系统动力学模型. 采用平面四杆机构作为建模案例, 与现有多体系统建模方法对比, 验证了新方法的正确性. 新方法可以很好地支持动力学模型的重用, 揭示了平面机构动力学模型与拓扑结构的内在联系.

关键词

平面机构
动力学
结构学
建模

对机构设计方案进行动力学性能评估是机械系统设计的重要环节之一, 而动力学建模方法直接影响模型的准确性、建模仿真的效率和精确性. 复杂机械系统如大型锻压机床、操作机器人、汽车的传动系统等, 其中的机构具有构件数目多、模块化、层次化的特点. 因而“模型可重用、系统可重构”是这类机构建模的大势所趋.

作为一般机构动力学建模的基础, 现有多体动力学建模方法没有完全适应上述特点, 尚存在以下不足. 1) 难以支持模型的重用. 在电路和控制系统的设计当中, 将标准的电路元件或控制单元封装为成模块, 供反复使用已极为成熟. 然而在机械系统中, 现有多体动力学建模方法无法支持模型重用, 未能建立一种模块化、可重用的建模方法. 2) 缺乏与设计原理的内在联系. 建立机构构型与性能的联系是机构学研究的任务之一, 而目前的动力学建模方法均与机构构型原理无关, 因此难以探讨拓扑结构与动力学特性之间的内在联系, 难以依据动力学性能要求指导机构构型设计.

多体系统动力学发展至今, 形成了笛卡尔数学模型和拉格朗日数学模型两大建模策略. 本文打破将单个物体(笛卡尔数学模型)或铰的邻接刚体(拉格朗日数学模型)作为建模单元的多体建模传统观念, 将附加驱动约束后具备运动确定性的运动链作为基本单元进行多体系统动力学建模, 从机构拓扑学原理出发为多刚体系统动力学提供新的建模方法和单元形式, 建立一种平面多体系统动力学正问题建模方法. 在数学表达形式上, 利用状态空间数学模型描述

单元、系统的动力学模型, 通过系统耦合矩阵, 实现全系统动力学方程的程式化推导。

1 国内外研究现状分析

计算多体动力学是机械系统动力学建模的成熟方法。在笛卡儿和拉格朗日两大建模策略下, 形成了多种流派, 如维腾堡方法^[1]、凯恩方法^[2]、席勒恩方法^[3]等, 它们均以铰的邻接刚体或单个构件作为建模的单元。近年来, 针对复杂机械系统动力学建模, 尤其是面向系统多层次、跨领域建模, 国际上一些学者进行了新的尝试。德国斯图加特大学在多体系统的层次化计算方法、模块化建模方法上, 从一般力学的角度奠定了理论基础^[4~6]。加拿大Waterloo大学利用电学基尔霍夫定律建立单回路机构的动力学方程, 通过节点变量以功能转换原理实现了一定程度的跨领域建模^[7]。奥地利Graz大学借鉴了软件工程中面向对象的思想, 进行了串联构型构件之间运动和力传递的描述^[8]。上述研究存在的问题是: 相关研究^[5,6]主要在一般力学领域进行, 对层次化、模块化的动力学建模做了一般性研究, 未能提出具体的建模单元划分方法。

在机构学领域, 机构的拓扑结构与运动学、动力学特性及与其他子系统(如驱动、控制等)之间的内在联系^[9,10]是现代机构学探索的主题之一。在机构学发展史上, 19世纪德国学派提出了Grueble活动度公式, 建立了Burmester运动综合理论, 20世纪初俄国学派提出了基于Assur组的结构组成原理, 90年代我国学者^[10]也提出了独到的机械系统结构划分方法。目前, 机械系统结构层次的划分方法主要有杆、副单元; Assur组; 回路、割集单元等^[10], 这些划分方法在不同层次之上揭示了机构构型与其功能、运动学性能之间的关系。利用这些结构划分如Assur组, 形成模块化的机构运动学、静力学和逆动力学已有相关研究工作^[11~13], 但是, 上述工作未能实现动力学的核心——正问题的建模。对一般机构这样的典型多体系统, 如果仍然以铰的邻接刚体或单个构件作为建模单元, 要想实现“模型可重用、系统可重构”是很困难的。

机构拓扑结构学是其动力学建模走向自动化的基础, 回顾20世纪80年代, Wittenberg^[1]及Haug^[14]等学者正是将机构的图论表达与刚体动力学、计算机技术相结合, 从而建立了多体系统动力学这一领域。平面机构的拓扑描述有图论方法和杆组方法两类, 现有多体方法均采用图论描述系统结构, 而杆组划分为平面机构的计算动力学建模提供了另一思路。

2 机械系统动力学建模的复合方法

“复合”一词翻译并借用自卡内基-梅隆大学相关研究团队^[15]按照英文造词法构造的“Composable”一词。复合建模的思想是: 将机械系统按照其结构组成划分为不同的模型单元, 通过各单元的输入/输出定义, 封装单元的内部模型, 通过交互耦合模型来描述各单元之间的联系, 然后依据系统拓扑结构和系统/子系统层次关系, 由单元模型逐步“复合”成全系统模型。建模单元之间的交互耦合关系分为两类, 其一为连接各构件的运动副, 其二为机械系统与其他系统之间的耦合关系^[16,17], 本文研究内容暂时局限在纯机械系统, 因此只涉及运动副连接关系。如图1和2所示, 复合建模采用与控制系统建模类似的系统图表达机构拓扑结构, 利用状态空间方法描述单元和系统的动力学模型。复合方法主要用于动力学正问题的建模, 后面将说明复合方法也可以用于运动学和逆动力学。

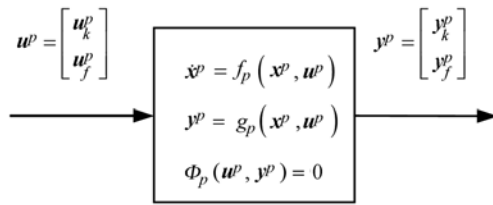


图 1 建模单元的定义与表达

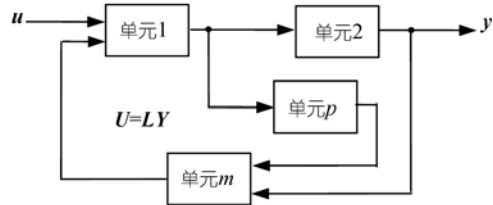


图 2 系统拓扑结构描述

2.1 建模单元划分与单元建模方法

复合方法划分建模单元的原则是运动和静力确定性, 每个建模单元都可以独立计算, 便于单元模型的重用和系统模型的重构. 复合方法定义了两类建模单元: 零单元和原动单元. 零单元是自由度数为 0 的运动链, 在平面机构中体现为各级 Assur 杆组, 他们具备运动确定性、静力确定性和动态静力确定性. 原动单元是带有主动铰的构件, 其驱动个数等于自由度, 从多体系统附加驱动约束的观点来看依然具备确定性. 由这两类单元经过适当组合, 可形成从基本机构到复杂机构的各类平面机构的动力学模型, 据此形成建模单元的模块化、层次化划分如表 1 所示.

表 1 建模单元划分方法

系统	机构整体	
子系统	系统中的基本机构	
单元	零单元: 自由度数为 0 的运动链	原动单元: 自由度数等于驱动个数的运动链
元件	构件, 铰	

动力学建模时, 首先定义一个公共参考基, 采用绝对坐标形式. 在建模原理上, 对原动单元采用牛顿-欧拉方程, 对零单元则运用达朗伯原理. 为了便于模型的重用, 同时与控制、液压等领域的模型表达具有通用性, 将二阶微分方程转化为状态方程表达, 从而每个单元的模型可采用状态空间数学模型表达. 如图 1, 若一个平面机构由 n 个构件组成, 有 h 个运动副, 共划分为 m 个建模的单元, 设第 $p(p=1, 2, \dots, m)$ 个单元的输入向量为 u^p , 输出向量为 y^p , 状态向量为 x^p , 该单元状态方程和输出方程分别为:

$$\dot{x}^p = f_p(x^p, u^p), \quad (1)$$

$$y^p = g_p(x^p, u^p), \quad (2)$$

对于包含不只一个构件的建模单元, 如 Assur 杆组, 定义一个单元内约束方程, 描述其内部构件之间的运动和力约束关系, 第 p 个单元的内约束方程统一表达为

$$\Phi_p(u^p, y^p) = 0. \quad (3)$$

各个单元的输入/输出向量中, 变量有两种类型, 其一为运动变量, 如位移、速度、加速度, 其二为动态静力变量, 如主动力(包含驱动力和工作阻力)、惯性力、约束反力. 设第 p 个单元的运动输入变量个数为 I_{pk} , 运动输出变量个数为 O_{pk} , 动态静力输入变量个数为 I_{pf} , 动态静力

输出变量个数为 O_{pf} . 向量排序时, 规定将运动变量放在前面, 则每个单元的输入/输出向量统一表达为

$$\mathbf{u}^p = \left[\mathbf{u}_k^{p,1}, \mathbf{u}_k^{p,2}, \dots, \mathbf{u}_k^{p,I_{pk}}, \mathbf{u}_f^{p,1}, \mathbf{u}_f^{p,2}, \dots, \mathbf{u}_f^{p,I_{pf}} \right]^T = \left[(\mathbf{u}_k^p)^T, (\mathbf{u}_f^p)^T \right]^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{y}^p = \left[\mathbf{y}_k^{p,1}, \mathbf{y}_k^{p,2}, \dots, \mathbf{y}_k^{p,O_{pk}}, \mathbf{y}_f^{p,1}, \mathbf{y}_f^{p,2}, \dots, \mathbf{y}_f^{p,O_{pf}} \right]^T = \left[(\mathbf{y}_k^p)^T, (\mathbf{y}_f^p)^T \right]^T. \quad (5)$$

输出方程(2)可分为运动输出和力输出两部分分别列出:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k^p = \mathbf{g}_k^p(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}_k^p), \\ \mathbf{y}_f^p = \mathbf{g}_f^p(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}_f^p). \end{cases} \quad (6)$$

下面分别阐述各建模单元的输入/输出定义和建模方法.

零单元.

因为自由度为零, 所以采用状态空间模型描述时, 只有输出方程和内约束方程, 没有状态变量和状态方程. 可见自由度数为 0 的运动链在机构中扮演了运动和力传递的角色.

运动输入通过运动链外运动副铰点上的运动参数来定义, 以铰点在公共参考系中的位置矢量来表示, 速度、加速度可以通过微分求得. 运动输入变量的个数等于外运动副个数, 有

$$\mathbf{u}_k^{p,q} = \mathbf{r}_{i,j}, \quad (7)$$

(7)式中 $\mathbf{r}_{i,j}$ 代表外运动副, 第 $i(i=1,2,\dots,n)$ 个构件上第 $j(j=1,2,\dots,h)$ 个铰点的位置矢量.

运动输出定义为运动链内运动副铰点上的运动:

$$\mathbf{y}_k^{p,q} = \mathbf{r}_{i,j}, \quad (8)$$

(8)式中 $\mathbf{r}_{i,j}$ 代表内运动副铰点的位置矢量.

力输入定义为作用于单元内各构件质心上的主动力 $\mathbf{F}_i$ 和力矩 $\mathbf{M}_i$, 力输入变量的个数等于单元内构件的数目

$$\mathbf{u}_f^{p,q} = [\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i]^T. \quad (9)$$

力输出定义为各外运动副铰点上承受的约束反力

$$\mathbf{y}_f^{p,q} = [\mathbf{R}_{i,j}], \quad (10)$$

式中 $\mathbf{R}_{i,j}$ 代表第 i 个构件在第 j 个铰点处承受的约束反力.

自由度为零的运动链具有确定性, 只要确定了装配构型, 就可以由上述定义, 根据运动几何关系和达朗伯原理分别得到运动和力输出方程. 根据单元内各构件之间存在装配几何约束和内铰点约束反力之间的关系, 可得到内约束方程(3). 方程的建立过程将通过建模案例具体阐述.

在输入、输出均已知情况下, 根据机构结构参数, 不难计算各杆件质心的运动参数和某些指定点(如轨迹生成点)的运动参数. 参考多体方法一般定义, 采用体铰矢量 $\boldsymbol{\rho}_{i,j}$ 表达从构件 i 质心指向运动副 j 铰点的矢量, 构件 i 质心的位置矢量为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i,j} - \boldsymbol{\rho}_{i,j}. \quad (11)$$

原动单元.

原动单元的状态变量依据其广义坐标向量 $\mathbf{q}$, 定义为

$$\mathbf{x}^p = [\mathbf{x}_1^p, \mathbf{x}_2^p]^T = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T. \quad (12)$$

原动单元的运动输入定义在已知运动铰点(如连架铰点)上, 运动输出定义在未知运动铰点上(如非连架铰点).

$$\mathbf{u}_k^{p,q} = \mathbf{r}_{i,j}, \quad (13)$$

$$\mathbf{y}_k^{p,q} = \mathbf{r}_{i,j}, \quad (14)$$

(13)和(14)式中 $\mathbf{r}_{i,j}$ 分别代表原动单元上运动已知铰点和运动未知铰点的位置矢量.

针对不同的问题, 原动单元的力输入/输出定义有所不同: 在进行正动力学分析时, 作用在原动单元上的主动力是已知的, 原动单元的广义坐标需通过状态方程的积分求出; 逆动力学分析时, 广义坐标是已知的, 主动力中工作阻力是已知的, 驱动力是待求的, 不需要列出状态方程.

正动力学分析时, 系统的力输入定义为构件上的广义主动力(包括驱动力和工作阻力)和运动未知铰点的约束反力, 力输出为运动已知铰点的约束反力.

$$\mathbf{u}_f^{p,1} = [\mathbf{F}_d, \mathbf{M}_d]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{u}_f^{p,2} = [\mathbf{F}_r, \mathbf{M}_r]^T, \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_f^{p,3} = [\mathbf{R}_{i,j}], \quad (17)$$

$$\mathbf{y}_f^{p,1} = [\mathbf{R}_{i,j}]. \quad (18)$$

逆动力学分析时, 力输入为构件上的工作阻力和运动未知铰点的约束反力, 力输出为待求的驱动力和运动已知铰点的约束反力.

$$\mathbf{u}_f^{p,1} = [\mathbf{F}_r, \mathbf{M}_r]^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_f^{p,2} = [\mathbf{R}_{i,j}], \quad (20)$$

$$\mathbf{y}_f^{p,1} = [\mathbf{F}_d, \mathbf{M}_d]^T, \quad (21)$$

$$\mathbf{y}_f^{p,2} = [\mathbf{R}_{i,j}], \quad (22)$$

(15), (16), (19)和(21)式中 $\mathbf{F}_d, \mathbf{M}_d$ 与 $\mathbf{F}_r, \mathbf{M}_r$ 为原动单元上的驱动力、驱动力矩和工作阻力、阻力矩. (17), (18), (20)和(22)式中 $\mathbf{R}_{i,j}$ 分别代表原动单元上运动未知铰点和运动已知铰点上承受的约束反力.

原动单元的状态方程可根据构件的牛顿-欧拉原理, 依据所选取的广义坐标推导. 输出方程可根据原动单元的类型, 依据运动几何关系和准静态力平衡关系确定, 方程的建立过程将通过建模案例具体阐述.

机架.

机架不是建模的单元, 但作为运动已知的物体, 可提供机构的一些基本参数. 定义机架在系统中的标号始终为 0. 机架的力输入定义为连架铰点的约束反力, 这样定义是为了计算摆动力和摆动力矩, 机架的运动输出定义为连架铰点的运动参数, 即提供机架的几何参数.

$$\mathbf{y}_k^{0,q} = \mathbf{r}_{0,j}, \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_f^{0,q} = [\mathbf{R}_{0,j}]. \quad (24)$$

机架为固定构件, 具体计算时不需输出方程和状态方程.

2.2 系统结构描述

根据机构的拓扑结构, 形成全系统结构图 2, 通过各个单元的输入、输出向量之间的连接关系, 可列出系统的耦合方程:

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{Y}, \quad (25)$$

其中, 向量 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{Y}$ 为系统内全部输入、输出向量按照单元序号排列成的向量. 变量排序时, 同样将所有运动变量放在前面, 则(25)式中,

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2, \dots, \mathbf{u}_k^m, \mathbf{u}_f^1, \mathbf{u}_f^2, \dots, \mathbf{u}_f^m]^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_k^1, \mathbf{y}_k^2, \dots, \mathbf{y}_k^m, \mathbf{y}_f^1, \mathbf{y}_f^2, \dots, \mathbf{y}_f^m]^T, \quad (27)$$

耦合矩阵 $\mathbf{L}$ 可以依据运动变量和力变量的排序分块表达为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{kk} & \mathbf{L}^{kf} \\ \mathbf{L}^{fk} & \mathbf{L}^{ff} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

分块阵 $\mathbf{L}^{kk}$ 表示不同单元之间的运动学传递关系, 在机构中不同构件之间是通过运动副来连接的, 在理想约束的假设前提下, 不同构件在运动副铰点的运动变量应当是一致的. 所以, 当两单元之间有运动副连接时, 分块阵 $\mathbf{L}^{kk}$ 的相应元素为 1, 当两单元之间没有连接时, 分块阵 $\mathbf{L}^{kk}$ 的相应元素为 0. 分块阵 $\mathbf{L}^{ff}$ 表示不同单元之间的动态静力传递关系, 在理想约束的假设前提下, 不同构件在运动副铰点的约束反力大小相等而方向相反. 所以, 当两单元之间有连接时, 分块阵 $\mathbf{L}^{ff}$ 的相应元素为 -1, 当两单元之间没有连接时, 分块阵 $\mathbf{L}^{ff}$ 的相应元素为 0. 分块阵 $\mathbf{L}^{kf}$ 和分块阵 $\mathbf{L}^{fk}$ 的元素均为零.

对分块阵 $\mathbf{L}^{kk}$ 的元素, 有

$$\mathbf{L}^{kk}_{ij} \in \{0, 1\}. \quad (29)$$

对分块阵 $\mathbf{L}^{ff}$ 的元素, 有

$$\mathbf{L}^{ff}_{ij} \in \{0, -1\}. \quad (30)$$

耦合矩阵 $\mathbf{L}$ 中元素全部为零的行和列所对应的变量, 分别代表了整个系统的输入和输出, 即所建模的这个系统与其他系统之间的运动和力传递关系. 据此可以定义系统的全局输入向量 $\mathbf{u}$ 和全局输出向量 $\mathbf{y}$.

通过耦合矩阵 $\mathbf{L}$, 可以将事先定义好的各个单元模型联系起来, 形成整个机构的模型,

通过全局输入/输出向量, 可以将一个机构的模型封装起来, 成为更高一级模型的子模型, 从而形成模块化、层次化的复合建模方法.

2.3 系统动力学方程

采用本文的复合建模方法, 一个平面机构的系统动力学模型将由各组成单元的状态方程、输出方程、内约束方程和系统的耦合方程组成:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^p = \mathbf{f}_p(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p), \\ \mathbf{y}^p = \mathbf{g}_p(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p), \\ \Phi_p(\mathbf{u}^p, \mathbf{y}^p) = 0, \\ \mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{Y}, \end{cases} \quad p = 1, 2, \dots, m, \quad (31)$$

方程组(31)是一个微分—代数方程组, 根据耦合矩阵和各单元的状态方程, 可以写出该机构系统的输入向量 $\mathbf{u}$ 、输出向量 $\mathbf{y}$ 和状态向量 $\mathbf{x}$.

复合方法的建模步骤如下: 首先根据分析任务将平面机构拆解成相应建模单元, 然后建立或重用各单元的状态方程、输出方程、内约束方程, 根据机构拓扑结构关系, 建立耦合方程, 最后形成全系统动力学的状态空间数学模型, 并确定全系统的输入、输出向量和状态向量.

表 2 给出了复合方法与几种多刚体系统动力学建模方法的对比, 复合方法的不足在于: 建模单元依赖于 0 自由度运动链的选取, 对于复杂的空间多闭环机构不一定都能适用, 而现有多体建模方法从理论上讲可适用于任意机构. 作者的最新研究工作表明, 本文建模方法在具有对称结构的空问并联机构正动力学计算上仍然有效, 相关工作进展将在今后报道. 在计算方法上, 复合方法在作动力学正问题计算时, 根据系统拓扑结构, 需要增加求解隐式耦合方程(25)的数值算法^[6].

表 2 复合方法与几种多刚体系统动力学建模方法的对比

建模方法	Roberson-Wittenburg 方法	Huston 方法	Schiehlen 方法	复合方法
建模策略	拉格朗日	拉格朗日	笛卡儿	笛卡儿
建模单元	铰的一对邻接刚体	铰的一对邻接刚体	单个刚体	零单元、原动单元
坐标形式	相对坐标	相对坐标	绝对坐标	绝对坐标
拓扑表达	关联矩阵、邻接矩阵	底序体阵列	铰约束的组集	耦合方程
基本原理	动力学普遍方程	凯恩方程	牛顿-欧拉方程	达朗伯原理、牛顿-欧拉方程
方程形式	常微分方程	常微分方程	微分-代数方程	微分-代数方程; 可转化为状态方程

3 建模案例

3.1 平面铰链四杆机构

如图 3 所示铰链四杆机构, 采用复合建模方法建立该机构的动力学方程, 进行机构正动力学和逆动力学分析. 附录 A 提供了牛顿-欧拉方法推导的笛卡尔数学模型, 为方便对比验证, 本节输出方程和状态方程中的输入、输出变量和状态变量均采用具体物理量表达.

采用复合方法, 将四杆机构划分为机架 0(构件 0), 原动单元 1(构件 1, 主动铰 H_1)和零单元 2(二杆组, 构件 2, 3, 铰 H_2, H_3, H_4)三个建模单元.

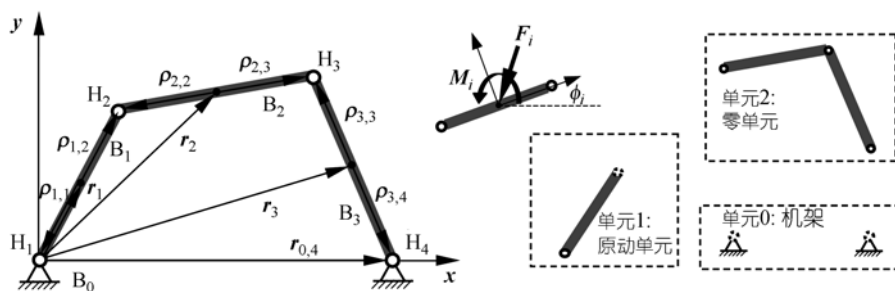


图 3 平面铰链四杆机构

对机架 0

$$\mathbf{u}^0 = [\mathbf{u}_f^{0,1}, \mathbf{u}_f^{0,2}]^T = [\mathbf{R}_{0,1}, \mathbf{R}_{0,4}]^T, \quad (32)$$

$$\mathbf{y}^0 = [\mathbf{y}_k^{0,1}, \mathbf{y}_k^{0,2}]^T = [\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,4}]^T. \quad (33)$$

对零单元 2

$$\mathbf{u}^2 = [\mathbf{u}_k^{2,1}, \mathbf{u}_k^{2,2}, \mathbf{u}_f^{2,1}, \mathbf{u}_f^{2,2}]^T, \quad (34)$$

式中: $\mathbf{u}_k^{2,1} = \mathbf{r}_{2,2}$, $\mathbf{u}_k^{2,2} = \mathbf{r}_{3,4}$, $\mathbf{u}_f^{2,1} = [\mathbf{F}_2, \mathbf{M}_2]^T$, $\mathbf{u}_f^{2,2} = [\mathbf{F}_3, \mathbf{M}_3]^T$.

$$\mathbf{y}^2 = [\mathbf{y}_k^{2,1}, \mathbf{y}_k^{2,2}, \mathbf{y}_f^{2,2}]^T = [\mathbf{r}_{2,3}, \mathbf{R}_{2,2}, \mathbf{R}_{3,4}]^T. \quad (35)$$

为确保正确装配, 二杆组存在杆长约束:

$$\begin{cases} l_2 = |\mathbf{r}_{3,3} - \mathbf{r}_{2,2}|, \\ l_3 = |\mathbf{r}_{3,4} - \mathbf{r}_{2,3}|, \end{cases} \quad (36)$$

二杆组的运动内约束方程为

$$\begin{cases} |\mathbf{y}_k^{2,1} - \mathbf{u}_k^{2,1}| - l_2 = 0, \\ |\mathbf{y}_k^{2,1} - \mathbf{u}_k^{2,2}| - l_3 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

对此二杆组, 运动输出方程如下 [10,18]:

$$\mathbf{y}^{2,1} = \begin{bmatrix} 1-Q_1 & M & Q_2 & -M \\ M & 1-Q_1 & -M & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^{2,1} \\ \mathbf{u}_k^{2,2} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

式中:

$$Q_1 = \frac{|\mathbf{u}_k^{2,1} - \mathbf{u}_k^{2,2}|^2 + l_2^2 - l_3^2}{2|\mathbf{u}_k^{2,1} - \mathbf{u}_k^{2,2}|^2}, \quad Q_2 = \sqrt{\frac{l_2^2}{|\mathbf{u}_k^{2,1} - \mathbf{u}_k^{2,2}|^2} - Q_1^2},$$

系数 M 确定杆组的装配构型, 若铰点 H_2 、 H_3 、 H_4 按顺时针排列, $M=1$, 若按逆时针排列, $M=-1$. 二杆组的力输入/输出关系, 由以下计算过程确定.

对构件 2 和 3, 根据达朗伯原理, 列出动态静力平衡方程:

$$\begin{cases} F_2 - m_2 \ddot{r}_2 + R_{2,2} + R_{2,3} = 0, \\ M_2 - J_2 \ddot{\phi}_2 + \rho_{2,2} \times R_{2,2} + \rho_{2,3} \times R_{2,3} = 0, \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} F_3 - m_3 \ddot{r}_3 + R_{3,3} + R_{3,4} = 0, \\ M_3 - J_3 \ddot{\phi}_3 + \rho_{3,3} \times R_{3,3} + \rho_{3,4} \times R_{3,4} = 0. \end{cases} \quad (40)$$

内铰点的约束反力之间存在以下关系:

$$R_{2,3} + R_{3,3} = 0, \quad (41)$$

(41) 式为二杆组的力内约束方程. 上述方程(39)~(41)可化为八个标量方程, 求解四个平面约束反力, 在机构装配构型确定的情况下, 方程有唯一解, 从而确定二级杆组力输出方程.

对原动单元 1, 原动件为单自由度, 定义原动件的广义坐标为其转角:

$$q = \phi_1, \quad (42)$$

则状态向量为

$$\mathbf{x}^1 = [x_1^1, x_2^1]^T = [q, \dot{q}]^T. \quad (43)$$

正动力学分析时, 根据构件 1 的欧拉方程推导状态方程, 得

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_d + M_r + \rho_{(1,1)x} R_{(1,1)y} - \rho_{(1,1)y} R_{(1,1)x} + \rho_{(1,2)x} R_{(1,2)y} - \rho_{(1,2)y} R_{(1,2)x}}{J_1} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

原动件的输入、输出向量分别为

$$\mathbf{u}^1 = [u_k^{1,1}, u_f^{1,1}, u_f^{1,2}, u_f^{1,3}]^T, \quad (45)$$

式中: $u_k^{1,1} = \mathbf{r}_{1,1}$, $u_f^{1,1} = [F_d, M_d]^T$, $u_f^{1,2} = [F_r, M_r]^T$, $u_f^{1,3} = \mathbf{R}_{1,2}$.

$$\mathbf{y}^1 = [y_k^{1,1}, y_f^{1,1}]^T = [\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{R}_{1,1}]^T. \quad (46)$$

运动输出方程为

$$\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,1} + l_1 [\cos \phi_1, \sin \phi_1]^T. \quad (47)$$

构件 1 为转动件, 已选取转角为广义坐标, 因而其力输出方程依据达朗伯原理为

$$\mathbf{R}_{1,1} = -F_r + m_1 \ddot{r}_1 - \mathbf{R}_{1,2}. \quad (48)$$

逆动力学分析时

$$\mathbf{u}^1 = [u_k^{1,1}, u_f^{1,1}, u_f^{1,2}]^T, \quad (49)$$

式中: $u_k^{1,1} = \mathbf{r}_{1,1}$, $u_f^{1,1} = [F_1, M_1]^T$, $u_f^{1,2} = \mathbf{R}_{1,2}$.

$$\mathbf{y}^1 = [\mathbf{y}_k^{1,1}, \mathbf{y}_f^{1,1}, \mathbf{y}_f^{1,2}]^T. \quad (50)$$

式中: $\mathbf{y}_k^{1,1} = \mathbf{r}_{1,2}$, $\mathbf{y}_f^{1,1} = [\mathbf{F}_d, \mathbf{M}_d]^T$, $\mathbf{y}_f^{1,2} = \mathbf{R}_{1,1}$,

运动输出方程为

$$\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,1} + l_1 [\cos \phi_1, \sin \phi_1]^T. \quad (51)$$

力输出方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_d = -\mathbf{M}_r + J_1 \ddot{\phi}_1 - \boldsymbol{\rho}_{1,1} \times \mathbf{R}_{1,1} - \boldsymbol{\rho}_{1,2} \times \mathbf{R}_{1,2}, \\ \mathbf{R}_{1,1} = -\mathbf{F}_r + m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{R}_{1,2}. \end{cases} \quad (52)$$

图 4 为正动力学分析时系统结构框图, 这时系统耦合方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^{1,1} \\ \mathbf{u}_k^{2,1} \\ \mathbf{u}_k^{2,2} \\ \mathbf{u}_f^{0,1} \\ \mathbf{u}_f^{0,2} \\ \mathbf{u}_f^{1,1} \\ \mathbf{u}_f^{1,2} \\ \mathbf{u}_f^{1,3} \\ \mathbf{u}_f^{2,1} \\ \mathbf{u}_f^{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^{0,1} \\ \mathbf{y}_k^{0,2} \\ \mathbf{y}_k^{1,1} \\ \mathbf{y}_k^{2,1} \\ \mathbf{y}_f^{1,1} \\ \mathbf{y}_f^{2,1} \\ \mathbf{y}_f^{2,2} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

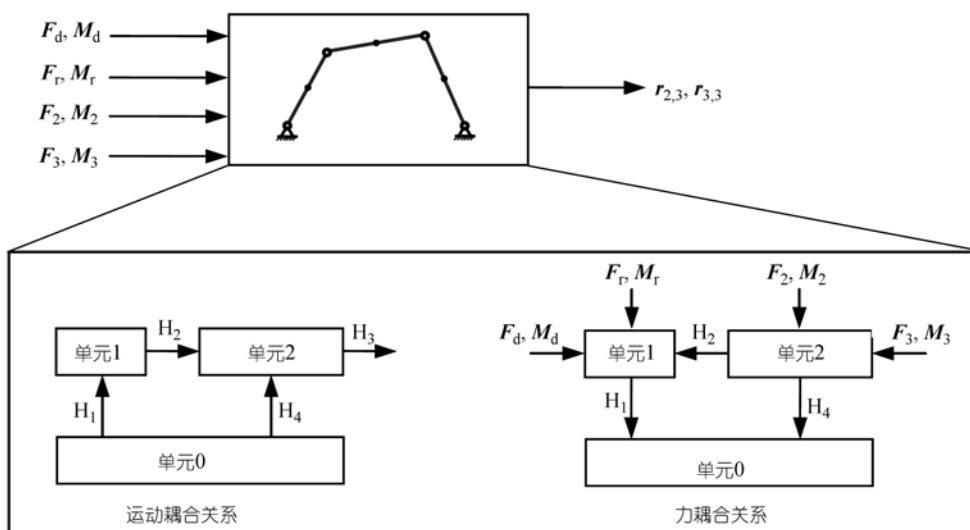


图 4 四杆机构正动力学分析系统结构图

全局输入和全局输出向量为

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_f^{1,1}, \mathbf{u}_f^{1,2}, \mathbf{u}_f^{2,1}, \mathbf{u}_f^{2,2}]^T, \quad (54)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_k^{2,1}], \quad (55)$$

参照各变量的定义, 可知, 正动力学分析时, 全局输入为系统的广义主动力, 全局输出为 H_3 的运动, 当 H_3 运动已知时, 通过公式(11)可求出各构件质心的运动. 这样, 可以将这个基本机构封装为图 4 所示模型, 以供今后调用.

逆动力学分析时, 系统的耦合方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^{1,1} \\ \mathbf{u}_k^{2,1} \\ \mathbf{u}_k^{2,2} \\ \mathbf{u}_f^{0,1} \\ \mathbf{u}_f^{0,2} \\ \mathbf{u}_f^{1,1} \\ \mathbf{u}_f^{1,2} \\ \mathbf{u}_f^{2,1} \\ \mathbf{u}_f^{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^{0,1} \\ \mathbf{y}_k^{0,2} \\ \mathbf{y}_k^{1,1} \\ \mathbf{y}_k^{2,1} \\ \mathbf{y}_f^{1,1} \\ \mathbf{y}_f^{1,2} \\ \mathbf{y}_f^{2,1} \\ \mathbf{y}_f^{2,2} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

全局输入和全局输出向量为

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_f^{1,1}, \mathbf{u}_f^{2,1}, \mathbf{u}_f^{2,2}], \quad (57)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_k^{2,1}, \mathbf{y}_f^{1,2}], \quad (58)$$

参照各变量的定义, 可知, 逆动力学分析时, 全局输入为非原动构件上的广义主动力和原动件上的工作阻力, 同时广义坐标已知, 全局输出为 H_3 的运动(即进行了机构运动分析)和作用在原动件上的广义驱动力.

下面以正动力学建模为例, 与牛顿-欧拉方法做对比. 根据系统动力学方程(31), 四杆机构的复合模型由(37)~(41), (44), (47), (48), (53)式组成. (39), (40), (44), (48)式在数学形式上已构成各运动构件的牛顿-欧拉方程. 通过(53)式中的运动耦合矩阵, 我们可得:

$$\mathbf{u}_k^{1,1} = \mathbf{y}_k^{0,1}, \text{ 从而, } \mathbf{r}_{1,1} = \mathbf{r}_{0,1}, \text{ 即}$$

$$\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_{1,1} = \mathbf{r}_{0,1}. \quad (59)$$

$$\mathbf{u}_k^{2,1} = \mathbf{y}_k^{1,1}, \text{ 从而, } \mathbf{r}_{2,2} = \mathbf{r}_{1,2}, \text{ 即}$$

$$\mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_{2,2} = \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_{1,2}. \quad (60)$$

$$\mathbf{u}_k^{2,2} = \mathbf{y}_k^{0,2}, \text{ 从而, } \mathbf{r}_{3,4} = \mathbf{r}_{4,4}, \text{ 即}$$

$$\mathbf{r}_3 + \boldsymbol{\rho}_{3,4} = \mathbf{r}_{4,4}. \quad (61)$$

考虑到杆组正确装配的杆长约束条件(37), 得 $r_{2,2} + H_2 H_3 = r_{3,4} + H_4 H_3$, 从而, $(r_2 + \rho_{2,2}) + (\rho_{2,3} - \rho_{2,2}) = (r_3 + \rho_{3,4}) + (\rho_{3,4} - \rho_{3,4})$, 即:

$$r_2 + \rho_{2,3} = r_3 + \rho_{3,3}. \quad (62)$$

上述(59)~(62)式, 即牛顿-欧拉方法的约束方程.

3.2 平面三自由度并联机构

如图5所示平面三自由度并联机构, 建模单元可划分为三个原动单元和一个零单元三级组(图5(b)). 根据不同的分析任务, 建模单元划分方法可以有所不同, 正运动学, 动力学分析时采用图5(b)的划分方法, 逆运动学分析时, 采用图5(c)的划分方法显然更为方便.

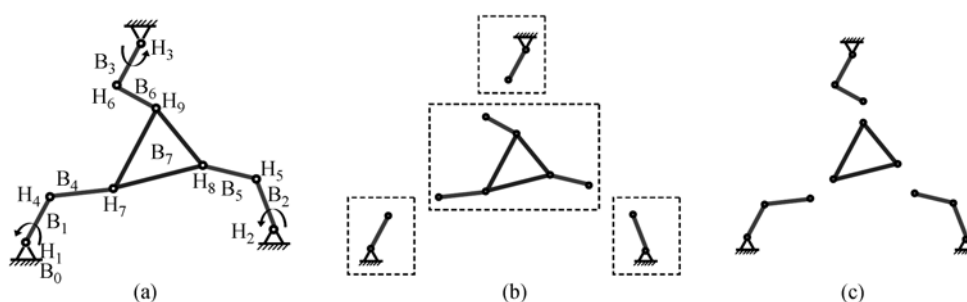


图5 平面三自由度并联机构复合建模

3.3 平面单自由度六杆机构

对于复杂的平面机构, 在建模时还可以利用基本机构作为其子系统模型. 如图6所示的平面六杆机构, 可分解为一个四杆机构和一个零单元, 该四杆机构的模型可直接从案例1图4的建模结果调用. 采用复合建模方法建立的任意平面机构的动力学模型均可作为更为复杂机构的子系统模型, 从而实现层次化建模和模型重用.

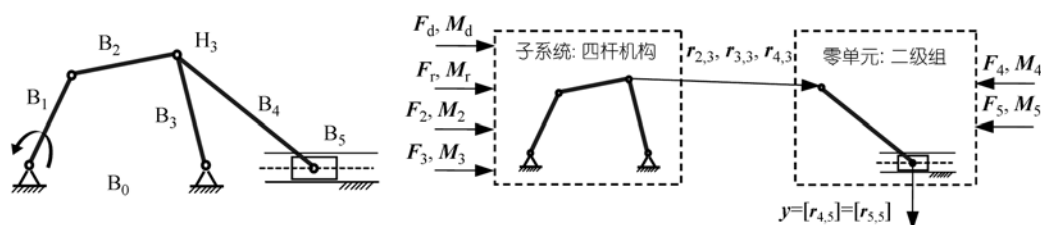


图6 平面单自由度六杆机构复合建模

4 结论

提出了平面机械系统动力学建模的复合方法, 该方法有以下特色: 1) 从机构结构学出发, 通过输入/输出的合理定义, 标准的单元模型和已建立的模型均可重用; 2) 进行平面机构正运动学分析时, 零单元只有输出方程, 没有状态方程, 在机构中扮演了运动和力传递的角色; 原

动单元状态变量即其广义坐标, 整个机械系统的状态变量个数等于系统自由度数; 3) 在平面机构综合时, 我们遵循将 Assur 杆组添加到单自由度原动件上的原则; 使用复合方法进行动力学建模时, 我们将零单元的输出方程与原动单元的状态方程联立形成系统动力学方程, 这从一个侧面揭示了机构结构学与其动力学模型的内在联系.

致谢 作者由衷感谢德国斯图加特大学计算与工程力学研究所 W. Schiehlen 教授在多体系统建模理论方面的指点和帮助.

参考文献

- 1 Wittenberg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977
- 2 Kane T R, Levinson D A. Multibody dynamics. J Appl Mech Trans ASME, 1983, 50: 1071—1078
- 3 Schiehlen W. Technische Mechanik. Stuttgart: Teubner, 1986
- 4 Schiehlen W. Multibody system dynamics: Roots and perspectives. Multibody Sys Dyn, 1997, 1(2): 149—188
[\[DOI\]](#)
- 5 Eberhard P, Schiehlen W. Hierarchical modeling in multibody dynamics. Arch Appl Mech, 1998, 68(3-4): 237—246
- 6 Kuebler R, Schiehlen P. Modular simulation in multibody system dynamics. Multibody Syst Dyn, 2000, 4(2-3): 107—127 [\[DOI\]](#)
- 7 Mcphee J. Automatic generation of motion equations for planar mechanical systems using the new set of branch coordinates. Mech Mach Theory, 1998, 33(6): 805—823 [\[DOI\]](#)
- 8 Kecskemethy A. Object-oriented modeling of multibody dynamics including impacts. In: European Conference on Computational Mechanics. Poland: Cracow, 2001. 26—29
- 9 Yan H S. A methodology for creative mechanism design. Mech Mach Theory, 1992, 27(3): 235—242 [\[DOI\]](#)
- 10 杨廷力. 机械系统基本理论——结构学, 运动学, 动力学. 北京: 机械工业出版社, 1996
- 11 Gary L, Kinzel, Chang C. The analysis of planar linkages using a modular approach. Mech Mach Theory, 1984, 19(1): 165—172 [\[DOI\]](#)
- 12 Galletti G U. A note on modular approaches to planar linkage kinematic analysis. Mech Mach Theory, 1986, 21(5): 385—391 [\[DOI\]](#)
- 13 Hansen M R. A general method for analysis of planar mechanisms using a modular approach. Mech Mach Theory, 1996, 31(8): 1155—1166 [\[DOI\]](#)
- 14 Haug E J. Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 15 Diaz-Calderon A, Paredis C, Khosla P K. Automatic generation of system-level dynamic equations for mechatronic systems. Comput-Aided Des, 2000, 32(5-6): 339—354 [\[DOI\]](#)
- 16 王艾伦, 钟掘. 复杂机电系统的全局耦合建模方法及仿真研究. 机械工程学报, 2003, 39(4): 1—5
- 17 廖道训, 熊有伦, 杨叔子. 现代机电系统(设备)耦合动力学的研究现状和展望. 中国机械工程, 1996, 7(2): 44—46
- 18 Suh C H, Radcliffe C W. Kinematics and Mechanisms Design. New York: Wiley, 1978

附录 A 平面铰链四杆机构动力学方程的牛顿-欧拉方法推导

采用牛顿-欧拉方法推导图 3 中平面铰链四杆机构的系统动力学方程, 分别针对构件 1, 2, 3, 列出牛顿方程和欧拉方程如下.

对构件 1:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{R}_{1,1} + \mathbf{R}_{1,2} = 0, \\ \mathbf{M}_d + \mathbf{M}_1 - J_1 \ddot{\phi}_1 + \boldsymbol{\rho}_{1,1} \times \mathbf{R}_{1,1} + \boldsymbol{\rho}_{1,2} \times \mathbf{R}_{1,2} = 0. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

对构件 2:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2 - m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{R}_{2,2} + \mathbf{R}_{2,3} = 0, \\ \mathbf{M}_2 - J_2 \ddot{\phi}_2 + \boldsymbol{\rho}_{2,2} \times \mathbf{R}_{2,2} + \boldsymbol{\rho}_{2,3} \times \mathbf{R}_{2,3} = 0. \end{cases} \quad (\text{A2})$$

对构件 3:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_3 - m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 + \mathbf{R}_{3,3} + \mathbf{R}_{3,4} = 0, \\ \mathbf{M}_3 - J_3 \ddot{\phi}_3 + \boldsymbol{\rho}_{3,3} \times \mathbf{R}_{3,3} + \boldsymbol{\rho}_{3,4} \times \mathbf{R}_{3,4} = 0. \end{cases} \quad (\text{A3})$$

上述矢量方程展开后, 共有 9 个标量方程. 同时, 采用局部方法建立每个转动副邻接刚体坐标之间的约束方程, 对转动副 H_1, H_2, H_3, H_4 , 分别有

$$\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_{1,1} = \mathbf{r}_{0,1}, \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_{1,2} = \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_{2,2}, \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_{2,3} = \mathbf{r}_3 + \boldsymbol{\rho}_{3,3}, \quad (\text{A6})$$

$$\mathbf{r}_{0,4} = \mathbf{r}_3 + \boldsymbol{\rho}_{3,4}. \quad (\text{A7})$$

上述矢量方程展开后, 共有 8 个标量方程. 方程组(A1)~(A3)与方程(A4)~(A7)共同构成封闭的方程组, 为平面铰链四杆机构系统动力学的笛卡尔数学模型.