中国科学 A 辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 10 期: 1168～1182
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

# 连续函数之集在上半连续函数之集中的一种拓扑位置

杨忠强*, 吴拿达

汕头大学数学系, 汕头 515063
* E-mail: zqyang@stu.edu.cn

收稿日期: 2007-10-08; 接受日期: 2008-07-16
国家自然科学基金 (批准号: 10471084) 资助项目

**摘要** 设 $(X,\rho)$ 是一个度量空间. 用 $\downarrow\mathrm{USCC}(X)$ 和 $\downarrow\mathrm{CC}(X)$ 分别表示从 $X$ 到 $\mathbf{I}=[0,1]$ 的紧支撑的上半连续函数和紧支撑的连续函数下方图形全体. 赋予 Hausdorff 度量后, 它们是拓扑空间. 文中证明了, 如果 $X$ 是一个无限的且孤立点集稠密的紧度量空间, 则 $(\downarrow\mathrm{USCC}(X),\downarrow\mathrm{CC}(X))\approx(Q,c_0\cup(Q\setminus\Sigma))$, 即存在一个同胚 $h:\downarrow\mathrm{USCC}(X)\to Q$, 使得 $h(\downarrow\mathrm{CC}(X))=c_0\cup(Q\setminus\Sigma)$, 这里

$$Q=[-1,1]^{\omega},\ \Sigma=\{(x_n)_n\in Q:\sup|x_n|<1\},\ c_0=\Big\{(x_n)_n\in\Sigma:\lim_{n\to+\infty}x_n=0\Big\}.$$

结合这个论断和另一篇文章的结果, 可以得到: 如果 $X$ 是一个无限的紧度量空间, 则

$$(\downarrow\mathrm{USCC}(X),\downarrow\mathrm{CC}(X))\approx\begin{cases}(Q,c_0\cup(Q\setminus\Sigma)), & \text{如果孤立点集在}X\text{中稠密},\\ (Q,c_0), & \text{其他}.\end{cases}$$

还证明了, 对一个度量空间 $X$, $(\downarrow\mathrm{USCC}(X),\downarrow\mathrm{CC}(X))\approx(\Sigma,c_0)$ 当且仅当 $X$ 是一个非紧的、局部紧的、非离散的可分空间.

**关键词** Hilbert 方体 强万有的 上半连续函数 连续函数 紧支撑

**MSC(2000) 主题分类 54B20, 54C35, 57N20**

## 1 引言及主要结果

设 $(X,\rho)$ 是一个度量空间, $\mathrm{Cld}(X)$ 表示 $X$ 上非空闭子集全体. 对任意 $\varepsilon>0$, $x\in X$, $A\subset X$, 用 $\mathrm{B}_\rho(x,\varepsilon)$ 和 $\mathrm{B}_\rho(A,\varepsilon)$ 分别表示集合 $\{y\in X:\rho(x,y)<\varepsilon\}$ 和 $\{y\in X:\inf_{a\in A}\rho(a,y)<\varepsilon\}$. 对任意 $E,F\in\mathrm{Cld}(X)$, 我们可以定义 Hausdorff 距离如下:

$$\rho_{\mathrm{H}}(E,F)=\inf\{\varepsilon>0:E\subset B_\rho(F,\varepsilon),F\subset B_\rho(E,\varepsilon)\}.$$

则 $0\leqslant\rho_{\mathrm{H}}(E,F)\leqslant+\infty$. 如果 $X$ 是紧的, 则对任意 $E,F\in\mathrm{Cld}(X)$, 都有 $\rho_{\mathrm{H}}(E,F)<+\infty$. 从而 $(\mathrm{Cld}(X),\rho_{\mathrm{H}})$ 是一个度量空间 (参见文献 [1,2]). 一般而言, $(\mathrm{Cld}(X),\rho_{\mathrm{H}})$ 不是一个度量

空间, 但可以考虑 $\mathrm{Cld}(X)$ 的某些子集 $\mathcal{A}$, 使得对任意 $A, B \in \mathcal{A}$ 都满足 $\rho_{\mathrm{H}}(A, B) < +\infty$, 则 $(\mathcal{A}, \rho_{\mathrm{H}})$ 是一个度量空间. 定义乘积空间 $X \times \mathbf{I}$ 上的一个容许度量 $d$ 如下: 对任意的 $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in X \times \mathbf{I}$,

$$d((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \max\{\rho(x_1, x_2), |t_1 - t_2|\},$$

这里 $\mathbf{I} = [0, 1]$.

对任意的映射 $f : X \to \mathbf{I}$, 令

$$\downarrow f = \{(x, t) \in X \times \mathbf{I} : t \leqslant f(x)\},$$

则 $\downarrow f \in \mathrm{Cld}(X \times \mathbf{I})$ 当且仅当 $f$ 是上半连续的. 设 $\mathrm{USC}(X)$ 和 $\mathrm{C}(X)$ 分别表示从 $X$ 到 $\mathbf{I}$ 的上半连续函数和连续函数全体. 对任意 $A \subset \mathrm{USC}(X)$, 设

$$\downarrow A = \{\downarrow f : f \in A\}.$$

一个函数 $f \in \mathrm{USC}(X)$ 称为紧支撑的, 如果集合 $\overline{\{x \in X : f(x) > 0\}}$, 即 $\{x \in X : f(x) > 0\}$ 在 $X$ 中的闭包是紧的. 设

$$\mathrm{USCC}(X) = \{f \in \mathrm{USC}(X) : f \text{ 是紧支撑的}\},$$
$$\mathrm{CC}(X) = \mathrm{C}(X) \cap \mathrm{USCC}(X).$$

显然, 对任意 $f, g \in \mathrm{USCC}(X)$, $d_{\mathrm{H}}(\downarrow f, \downarrow g) < +\infty$. 因此, $(\downarrow \mathrm{USCC}(X), d_{\mathrm{H}})$ 是一个度量空间. 注意到如果 $X$ 是紧的, 则 $\mathrm{USCC}(X) = \mathrm{USC}(X)$, $\mathrm{CC}(X) = \mathrm{C}(X)$. 在文献 [3–8] 中, 我们考虑了 $\downarrow \mathrm{USCC}(X)$ 和 $\downarrow \mathrm{CC}(X)$ 的拓扑结构, 这其中有 $X$ 是紧的, 也有 $X$ 是非紧的情形. 本文继续考虑这些空间. 在本文中, 对任意一个紧度量空间 $X$, $\downarrow \mathrm{USC}(X)$ 和 $\downarrow \mathrm{C}(X)$ 的拓扑结构以及 $\downarrow \mathrm{C}(X)$ 在 $\downarrow \mathrm{USC}(X)$ 的拓扑位置已经完全清楚. 文献 [9] 用另外一种语言研究了 $\downarrow \mathrm{USC}(X)$ 赋予 Fell 拓扑的拓扑结构. 应当注意到对紧空间 $X$, $\downarrow \mathrm{USC}(X)$ 上的 Fell 拓扑与 Hausdorff 度量诱导的拓扑是相同的.

一个空间三元组 $(X, Y, Z)$ 指的是, $X$ 是一个空间, $Y$ 是 $X$ 的子空间而 $Z$ 是 $Y$ 的子空间. 对于空间三元组 $(X, Y, Z)$ 和 $(A, B, C)$, 如果存在一个同胚 $h : X \to A$, 使得 $h(Y) = B$, $h(Z) = C$, 则称它们是同胚的 (用 $(X, Y, Z) \approx (A, B, C)$ 表示). 可以类似地定义空间对 $(X, Y)$ 及其相关概念. 设

$$Q = [-1, 1]^{\omega}$$

是 Hilbert 方体,

$$\Sigma = \{(x_n)_n \in Q : \sup |x_n| < 1\},$$
$$c_0 = \left\{(x_n)_n \in \Sigma : \lim_{n \to +\infty} x_n = 0\right\}$$

是它的两个子空间.

首先考虑 $X$ 是紧的情形. 无论 $X$ 选择怎样的容许度量 $d$, $d_{\mathrm{H}}$ 总是诱导出 $\mathrm{Cld}(X \times \mathbf{I})$ 上的 Vietoris 拓扑. $(\downarrow \mathrm{USC}(X), d_{\mathrm{H}})$ 是它的子空间. 在文献 [7] 中, 下面两个定理被证明 (定理 A 也在文献 [9] 中被证明):

**定理 A** 如果 $X$ 是一个无限的、紧度量空间, 则 $\downarrow \mathrm{USC}(X) \approx Q$.

**定理 B** 对一个紧度量空间 $X$, $(\downarrow \mathrm{USC}(X), \downarrow \mathrm{C}(X)) \approx (Q, c_0)$ 当且仅当 $\overline{X \setminus X'} \neq X$, 这里 $X'$ 表示 $X$ 中的所有非孤立点之集.

为了得到当 $X$ 是一个紧的并且 $\overline{X \setminus X'} = X$ 的度量空间时 $(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{C}(X))$ 的拓扑结构, 在文献 [5, 6] 中, 我们取 $X$ 为两个特殊的空间加以研究. 本文将证明一般化的结论:

**定理 1**　设 $X$ 是一个无限的紧度量空间且 $\overline{X \setminus X'} = X$, 则

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{C}(X)) \approx (Q, c_0 \cup (Q \setminus \Sigma)).$$

由定理 B 和 1, 立即可以得到下面的推论, 这也意味着对每一个紧度量空间 $X$, $(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{C}(X))$ 的结构已清楚了.

**推论 1**　设 $X$ 是一个紧度量空间, 则

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{C}(X)) \approx \begin{cases} (\mathbf{I}^{|X|}, \mathbf{I}^{|X|}), & \text{如果 } X \text{是有限的}, \\ (Q, c_0), & \text{如果 } \overline{X \setminus X'} \neq X, \\ (Q, c_0 \cup (Q \setminus \Sigma)), & \text{其他}, \end{cases}$$

这里 $|X|$ 表示 $X$ 的基数.

注意到 $c_0$ 不是 $Q$ 的一个 $G_{\delta\sigma}$-集, 因此 $c_0 \cup (Q \setminus \Sigma)$ 也不是. 故此, 我们有下面的推论, 这也是文献 [4] 中的定理 3.

**推论 2**　对任意紧度量空间 $X$, 如果 $\downarrow\mathrm{C}(X)$ 是 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 中的一个 $G_{\delta\sigma}$-集, 则 $X$ 是有限的.

其次, 我们考虑 $X$ 是非紧的情形. 对一个非紧的、局部紧的、可分度量空间 $X$, 在文献 [8] 中, 证明了如果 $X$ 是非离散的, 则

$$\downarrow\mathrm{USCC}(X) \approx \Sigma;$$

如果 $X$ 是离散的, 则

$$\downarrow\mathrm{USCC}(X) \approx Q_f = \{(x_n)_n \in Q : \text{除了有限多个 } n \text{ 外, 都有 } x_n = 0\}.$$

由此可知, 如果 $X$ 是离散的, 则

$$(\downarrow\mathrm{USCC}(X), \downarrow\mathrm{CC}(X)) \approx (Q_f, Q_f).$$

本文将证明下面的结果:

**定理 2**　设 $(X, \rho)$ 是一个度量空间, 则下面的论断等价:

(a) $(\downarrow\mathrm{USCC}(X), \downarrow\mathrm{CC}(X)) \approx (\Sigma, c_0)$;

(b) $\downarrow\mathrm{USCC}(X) \approx \Sigma$;

(c) $\downarrow\mathrm{USCC}(X)$ 是 $\sigma$-紧的, 非紧的, 但不能表示成可数多个有限维闭子空间的并;

(d) $X$ 是非紧的、局部紧的、非离散的、可分的.

## 2　预备知识

在下面的讨论中, 所有提及的空间, 如无特殊声明皆假设为度量空间.

在本节中, 我们将重温一些相关的记号、概念及事实. 如果需要了解更多这方面的内容, 请参看文献 [2, 10, 11].

设 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ 表示自然数集.

**定义 1**　一个空间 $X$ 称为绝对收缩核 (相应的, 绝对邻域收缩核), 简记为$AR$ ($ANR$), 指的是如果对任意的包含 $X$ 为其闭子空间的空间 $Y$, $X$ 是 $Y$($X$ 在 $Y$ 中的一个邻域 $U$) 的收缩核, 即存在一个连续映射 $r : Y \to X$ ($r : U \to X$), 使得 $r|_X = \mathrm{id}_X$. 称 $X$ 有包腔不相交

性质, 指的是对任意自然数 $n$, 任一连续映射 $f:\mathbf{I}^n\times\{0,1\}\to X$ 都存在充分接近它的连续映射 $g:\mathbf{I}^n\times\{0,1\}\to X$, 使得 $g(\mathbf{I}^n\times\{0\})$ 和 $g(\mathbf{I}^n\times\{1\})$ 不相交.

**定义 2** 一个 $X$ 的闭子集 $A$ 称为 $X$ 的 $Z$-集, 如果恒等映射 $\mathrm{id}_X$ 能由一列从 $X$ 到 $X\setminus A$ 的连续映射逼近. 如果一个集合能表示成一个空间中的可数多个 $Z$-集的并, 则称它为这个空间的 $Z_\sigma$-集. 我们用 $Z(X)$ 表示 $X$ 中的所有 $Z$-集. 一个 $Z$-嵌入指的是一个像为 $Z$-集的嵌入.

**定义 3** 设 $Y$ 是一个空间而 $\mathcal{U}$ 是 $Y$ 的一个开覆盖. 设 $f,g:X\to Y$ 为两个连续函数, 如果对每一个 $x\in X$ 存在 $U\in\mathcal{U}$, 使得 $\{f(x),g(x)\}\subset U$, 则称 $f$ 和 $g$ 为 $\mathcal{U}$-接近的. 一个同伦 $H:X\times\mathbf{I}\to Y$ 称为 $\mathcal{U}$-限制的, 指的是对任意 $x\in X$ 存在 $U\in\mathcal{U}$, 使得 $H(\{x\}\times\mathbf{I})\subset U$. 对两个连续函数 $f,g:X\to Y$, 如果存在 $\mathcal{U}$-限制的同伦 $H:X\times\mathbf{I}\to Y$ 连接 $f$ 和 $g$, 即 $H_0=f,H_1=g$, 则称它们为 $\mathcal{U}$-同伦的.

**定义 4** 一个拓扑半格指的是拓扑空间 $S$ 附带连续运算 $\vee:S\times S\to S$ 满足反身性、对称性和结合律 (即, 对任意 $x,y,z\in S$, $x\vee x=x$, $x\vee y=y\vee x$, $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$). 如果一个拓扑半格 $S$ 有一个由子半格组成的开基, 则称 $S$ 为 Lawson 半格.

**定义 5** 设 $X$ 是一个空间. $Y\subset X$ 称为在 $X$ 中相对 $LC^0$, 指的是如果对任意 $x\in X$, $x$ 在 $X$ 中的每一个邻域 $U$ 都包含 $x$ 的一个更小的邻域 $V$, 使得 $V\cap Y$ 中的任意两点可以由 $U\cap Y$ 中的道路来连接.

**定义 6** 设 $A$ 是空间 $Y$ 的子集. 如果存在一个同伦 $h:Y\times\mathbf{I}\to Y$, 使得 $h_0=\mathrm{id}_Y$ 且对任意 $t>0$, 有 $h_t(Y)\subset A$, 则称 $A$ 在 $Y$ 中同伦稠.

**引理 1** (文献 [11, 定理 5.1]) 设 $X$ 是一个可度量化的 Lawson 半格, 而 $Y\subset X$ 是它一个稠密的子半格. 如果 $Y$ 在 $X$ 中相对 $LC^0$ (和道路连通), 则 $X$ 是一个 ANR (一个 AR) 而 $Y$ 在 $X$ 中同伦稠, 因此 $Y$ 也是一个 ANR (一个 AR).

**定义 7** 设 $M^Q$ 为一个与 $Q$ 同胚的空间, 而 $B=(B_i)_i$ 是一个由 $M^Q$ 的一列子集组成的塔, 即, 对任意 $i$, 都有 $B_i\subset B_{i+1}\subset M^Q$. 称 $B$ 具有形变性质是指如果存在一个同伦 $H:M^Q\times\mathbf{I}\to M^Q$, 使得 $H_0=\mathrm{id}_{M^Q}$ 而对任意 $t\in(0,1]$ 存在 $i\in\mathbb{N}$, 使得 $H(M^Q\times[t,1])\subset B_i$.

**定义 8** 设 $\mathcal{M}_0$ 表示所有紧空间的类, 而对一个拓扑空间类 $\mathcal{C}$, $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$ 表示所有满足 $Z\in\mathcal{M}_0$, $C\in\mathcal{C}$ 的空间对 $(Z,C)$ 所组成的集合. 设 $(X,d)$ 是同胚于 $Q$ 的一个空间. 称 $X$ 的一个子空间 $Y$ 在 $X$ 中是强 $\mathcal{C}$-万有的 (或说 $(X,Y)$ 是强 $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$-万有的), 是指对任意 $(M,C)\in(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$, 对任意连续函数 $f:M\to X$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 对任意使得 $f|_K:K\to X$ 是一个 $Z$-嵌入的 $M$ 的闭子集 $K$, 存在一个 $Z$-嵌入 $g:M\to X$, 使得 $g|_K=f|_K$, $g^{-1}(Y)\setminus K=C\setminus K$ 并且 $d(g(m),f(m))<\varepsilon$ 对任意 $m\in M$ 都成立.

如果一个空间是任意包含它为子空间的空间的 $F_{\sigma\delta}$-集, 则称它为绝对 $F_{\sigma\delta}$-空间. 我们用 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 表示所有绝对 $F_{\sigma\delta}$-空间所组成的类, 则 $c_0$ 在 $Q$ 中是强 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-万有的 [12].

## 3 $(Q,\Sigma,c_0)$ 的一个刻画定理

对任意两个空间 $X$ 和 $Y$, 若想证明它们同胚, 可以首先考虑找到它们之间的一个同胚. 但有时这样的同胚并不好找, 所以刻画那些常见的空间就显得很有意义. 例如, 下面定理给出 Hilbert 方体 $Q$ 的一个刻画.

**定理 C** (Toruńczyk's 刻画定理)[13](参看文献 [2, 推论 7.8.4]) 一个空间 $X$ 同胚于 Hilbert

方体 $Q$ 当且仅当 $X$ 是紧的、有包腔不相交性质的 AR.

因此, 想要证明 $X \approx Q$, 我们只需证明 $X$ 满足定理 C 中的性质而非一定要找出一个从 $X$ 到 $Q$ 的同胚. 应用定理 C, Toruńczyk 证明了任一个紧空间 $X$ 的超空间 $\mathrm{Cld}(X)$ 同胚于 $Q$ 当且仅当 $X$ 是非蜕化的、局部连通且连通的 [14](参看文献 [2, 定理 8.4.5]). 这个结论是由 Curtis 和 Schori[15] 首先证明的. 在第 4 节, 我们也要用定理 C 证明一些空间同胚于 $Q$. 关于定理 C 的更多应用, 请参看文献 [2, 第 8 章] 和文献 [7]. 这些应用充分地表明了上述定理的巨大作用.

文献 [16] 和 [12] 分别给出了空间对 $(Q,\Sigma)$ 和空间对 $(Q,c_0)$ 的一个刻画 (参看文献 [17, 命题 5.4.6, 定理 5.4.9 和 5.5.15]). 本节将给出 $(X,Y,Z) \approx (Q,\Sigma,c_0)$ 的一个刻画.

设 $X$ 是一个紧空间而 $(Y,\varrho)$ 是一个度量空间. 用 $\mathrm{C}(X,Y)$ 表示从 $X$ 到 $Y$ 的连续函数全体, 则

$$\hat{\varrho}(f,g) = \sup_{x\in X}\{\varrho(f(x),g(x))\}$$

定义了 $\mathrm{C}(X,Y)$ 上的一个度量. 下面, 当提到 $\hat{\varrho}$, 都是指这样一个度量. 设 $\mathcal{H}(X,Y)$ 表示从 $X$ 到 $Y$ 的同胚全体, 认为它是 $\mathrm{C}(X,Y)$ 的一个子空间. 如果 $X=Y$, 则把 $\mathcal{H}(X,X)$ 简记为 $\mathcal{H}(X)$.

**定理 3** 设 $(X,Y,Z)$ 为一个空间三元组, 则 $(X,Y,Z) \approx (Q,\Sigma,c_0)$ 当且仅当下面条件成立:

1. $X \approx Q$;

2. $Y$ 能够写成一个塔 $(Y_n)_n$ 的并, 使得

(a) 对任意 $n$, $Y_n \in Z(Y_{n+1}) \cap Z(X)$,

(b) 对任意 $n$, $(Y_n, Y_n\cap Z)$ 是强 $(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_{\sigma\delta})$-万有的,

(c) 对任意 $\varepsilon>0, n\in\mathbb{N}$, $A\in Z(X)$, 存在 $m>n$ 和 $h\in\mathcal{H}(X)$, 使得 $h|_{Y_n}=\mathrm{id}_{Y_n}, h(A)\subset Y_m$, $\hat{\varrho}(h,\mathrm{id}_X)<\varepsilon$.

为证明定理 3, 我们需要先证明下面的引理.

**引理 2** 设 $(Q,Y,Z)$ 是一个空间三元组. 若它满足定理 3 中的条件 2, 则对任意 $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$, $Z(Q)\ni K\supset Y_n$, $\mathcal{F}_{\sigma\delta}\ni F\subset K$, 存在 $m>n$, $h\in\mathcal{H}(Q)$, 使得

(A) $\hat{\varrho}(h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$,

(B) $h|_{Y_n}=\mathrm{id}_{Y_n}$,

(C) $h(K)\subset Y_m$,

(D) $h(F)\setminus Y_n\subset (Y_m\cap Z)\setminus Y_n$, $h(K\setminus F)\setminus Y_n\subset (Y_m\setminus Z)\setminus Y_n$.

**证明** 对一个三元组 $(Q,Y,Z)$ 和 $K\in Z(Q), n\in\mathbb{N}$, 用定理 3 的条件 (c), 存在 $m>n$ 和 $f\in\mathcal{H}(Q)$, 使得

$$\hat{\varrho}(f,\mathrm{id}_Q)<\frac{\varepsilon}{2},\quad f|_{Y_n}=\mathrm{id}_{Y_n}\ \text{且}\ f(K)\subset Y_m.$$

因为 $(Y_m, Y_m\cap Z)$ 是强 $(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_{\sigma\delta})$-万有的, 而 $(f(K),f(F))\in(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_{\sigma\delta})$, $Y_n\in Z(Y_m)$, 所以存在 $Z$-嵌入 $g: f(K)\to Y_m$, 使得

$$\hat{\varrho}(g,\mathrm{id}_{f(K)})<\frac{\varepsilon}{2},\quad g|_{Y_n}=\mathrm{id}_{Y_n},\quad g^{-1}(Y_m\cap Z)\setminus Y_n=f(F)\setminus Y_n.$$

设 $\varphi=g\circ f|_K$, 则 $\varphi: K\to g\circ f(K)$ 是一个同胚满足 $\varphi^{-1}(Y_m\cap Z)\setminus Y_n=F\setminus Y_n$, $\hat{\varrho}(\varphi,\mathrm{id}_K)<\varepsilon$. 由文献 [2, 定理 6.4.6], 存在 $\varphi$ 的一个同胚扩张 $h: Q\to Q$, 使得 $\hat{\varrho}(h,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon$. 显然 $h$ 满

足条件 (A)–(C), 因 $h$ 扩张 $\varphi$, 故 $h(F)\setminus Y_n=\varphi(F)\setminus Y_n\subset(Y_m\cap Z)\setminus Y_n$, $h(K\setminus F)\setminus Y_n=\varphi(K\setminus F)\setminus Y_n\subset(Y_m\setminus Z)\setminus Y_n$. 因此 (D) 也成立.

**定理 3 的证明** 设 $B_k=\{(x_n)_n\in Q:\sup|x_n|\leqslant\frac{k-1}{k}\}$, $B_0=\emptyset$. 由文献 [17, 命题 5.4.6, 定理 5.5.15] 和它们的证明, 取 $\Sigma=\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k$, 则 $(Q,\Sigma,c_0)$ 满足定理 3 中条件 1 和 2. 因此必要性得证.

现在证明条件的充分性. 不失一般性, 假设 $X=Q$. 对任意一列正数 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i,\dots\}$, 我们将构造两个自然数的子序列 $\{n_0=0<1=n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots\}$, $\{0=k_0<k_1<k_2<\cdots<k_i<\cdots\}$ 和一列 $Q$ 上的同胚 $\{h_i:i\in\mathbb{N}\}$ 满足:

$(a_i)$ 对任意 $y\in Y_{n_{i-1}}$, 有 $\alpha_i(y)=\alpha_{i-1}(y)$,

$(b_i)$ $\alpha_i(Y_{n_i})\subset B_{k_i}$,

$(c_i)$ $\alpha_i(Y_{n_i}\cap Z)\subset B_{k_i}\cap c_0$, $\alpha_i(Y_{n_i}\setminus Z)\subset B_{k_i}\setminus c_0$,

$(d_i)$ $\alpha_i^{-1}(B_{k_i})\subset Y_{n_{i+1}}$,

$(e_i)$ $\alpha_i^{-1}(B_{k_i}\cap c_0)\subset Y_{n_{i+1}}\cap Z$, $(\alpha_i)^{-1}(B_{k_i}\setminus c_0)\subset Y_{n_{i+1}}\setminus Z$,

$(f_i)$ $\hat{\varrho}(h_i,\mathrm{id}_Q)<\varepsilon_i$,

$(g_i)$ 对任意 $b\in B_{k_{i-1}}$, 有 $h_i(b)=b$,

这里 $\alpha_i=h_i\circ h_{i-1}\circ\cdots\circ h_1$, $(B_i)_i$ 的定义与必要性证明中所定义的相同.

设 $Y_0=B_0=\emptyset$, $n_0=k_0=0$, $n_1=1$, $h_0=\mathrm{id}_Q$, 则条件 $(a_0)$–$(g_0)$ 成立. 假设 $\{n_0=0<1=n_1<n_2<\cdots<n_{i+1}\}$, $\{0=k_0<k_1<k_2<\cdots<k_i\}$, $\{h_0,h_1,\dots,h_i\}$ 已经构造. 我们将定义 $n_{i+2},k_{i+1}$, $h_{i+1}$.

设 $K=\alpha_i(Y_{n_{i+1}})$, $F=\alpha_i(Y_{n_{i+1}}\cap Z)$, 则 $Z(Q)\ni K\supset F\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, 并且由 $(d_i)$, 有 $K\supset B_{k_i}$. 考虑 $(Q,\Sigma,c_0)$, 取 $\Sigma=\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k$, 则由引理 2 存在 $k_{i+1}>k_i$, $f\in\mathcal{H}(Q)$, 使得

(i) $\hat{\varrho}(f,\mathrm{id}_Q)<\frac{1}{2}\varepsilon_{i+1}$,

(ii) $f|B_{k_i}=\mathrm{id}_{B_{k_i}}$,

(iii) $f(K)\subset B_{k_{i+1}}$,

(iv) $f(F)\setminus B_{k_i}\subset(B_{k_{i+1}}\cap c_0)\setminus B_{k_i}$, $f(K\setminus F)\setminus B_{k_i}\subset(B_{k_{i+1}}\setminus c_0)\setminus B_{k_i}$.

设 $K'=f^{-1}(B_{k_{i+1}})$, $F'=f^{-1}(B_{k_{i+1}}\cap c_0)$, 则 $Z(Q)\ni K'\supset F'\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$. 注意到若取 $\alpha_i(Y)=\bigcup_{j=0}^{\infty}\alpha_i(Y_j)$, 则三元组 $(Q,\alpha_i(Y),\alpha_i(Z))$ 满足条件 2, 由引理 2 存在 $n_{i+2}>n_{i+1}$ 和 $g\in\mathcal{H}(Q)$, 使得

(v) $\hat{\varrho}(g,\mathrm{id}_Q)<\frac{1}{2}\varepsilon_{i+1}$,

(vi) $g|_{\alpha_i(Y_{n_{i+1}})}=\mathrm{id}_{\alpha_i(Y_{n_{i+1}})}$,

(vii) $g(K')\subset\alpha_i(Y_{n_{i+2}})$,

(viii) $g(F')\setminus\alpha_i(Y_{n_{i+1}})\subset\alpha_i(Y_{n_{i+2}}\cap Z)\setminus\alpha_i(Y_{n_{i+1}})$ 而且 $g(K'\setminus F')\setminus\alpha_i(Y_{n_{i+1}})\subset\alpha_i(Y_{n_{i+2}}\setminus Z)\setminus\alpha_i(Y_{n_{i+1}})$.

设 $h_{i+1}=f\circ g^{-1}$. 我们将验证 $n_{i+2}$, $k_{i+1}$ 和 $h_{i+1}$ 满足构造要求.

对任意 $y\in Y_{n_i}$, 由 $(\mathrm{b}_i)$ 有 $\alpha_i(y)\in B_{k_i}$. 由 (vi) 和 (ii) 得 $\alpha_{i+1}(y)=h_{i+1}\circ\alpha_i(y)=f\circ g^{-1}\circ\alpha_i(y)=f\circ\alpha_i(y)=\alpha_i(y)$, 因而 $(a_{i+1})$ 成立.

由 (vi) 和 (iii), 得 $\alpha_{i+1}(Y_{n_{i+1}})=h_{i+1}\circ\alpha_i(Y_{n_{i+1}})=f\circ g^{-1}\circ\alpha_i(Y_{n_{i+1}})=f\circ\alpha_i(Y_{n_{i+1}})\subset B_{k_{i+1}}$, 故 $(b_{i+1})$ 成立.

假设 $y \in Y_{n_{i+1}} \cap Z$. 如果 $\alpha_i(y) \notin B_{k_i}$, 则由 (vi), (ii) 和 (iv) 得 $\alpha_{i+1}(y) = h_{i+1} \circ \alpha_i(y) = f \circ \alpha_i(y) \in f(F \setminus B_{k_i}) = f(F) \setminus B_{k_i} \subset B_{k_{i+1}} \cap c_0$. 如果 $\alpha_i(y) \in B_{k_i} \cap c_0$, 则由 (vi) 和 (ii) 得 $\alpha_{i+1}(y) = h_{i+1} \circ \alpha_i(y) = f \circ \alpha_i(y) = \alpha_i(y) \in B_{k_i} \cap c_0 \subset B_{k_{i+1}} \cap c_0$. 如果 $\alpha_i(y) \in B_{k_i} \setminus c_0$, 则由 $(e_i)$ 得 $y = \alpha_i^{-1} \circ \alpha_i(y) \subset Y_{n_{i+1}} \setminus Z$, 这与 $y \in Z$ 矛盾, 因而 $\alpha_i(y) \in B_{k_i} \setminus c_0$ 是不可能的, 所以 $(c_{i+1})$ 的前半部分成立, 后半部分同理可证.

由 (vii) 得 $(h_{i+1} \circ \alpha_i)^{-1}(B_{k_{i+1}}) = \alpha_i^{-1}(h_{i+1})^{-1}(B_{k_{i+1}}) = \alpha_i^{-1} \circ g \circ f^{-1}(B_{k_{i+1}}) \subset \alpha_i^{-1} \circ \alpha_i(Y_{n_{i+2}}) = Y_{n_{i+2}}$. 故 $(d_{i+1})$ 成立.

假设 $y \in B_{k_{i+1}} \cap c_0$. 如果 $f^{-1}(y) \notin \alpha_i(Y_{n_{i+1}})$, 由 (vii) 有 $\alpha_{i+1}^{-1}(y) = (h_{i+1} \circ \alpha_i)^{-1}(y) = \alpha_i^{-1} \circ g \circ f^{-1}(y) \subset \alpha_i^{-1} \circ \alpha_i(Y_{n_{i+2}} \cap Z) = Y_{n_{i+2}} \cap Z$. 如果 $f^{-1}(y) \in \alpha_i(Y_{n_{i+1}} \cap Z)$, 由 (vi) 有 $\alpha_{i+1}^{-1}(y) = (h_{i+1} \circ \alpha_i)^{-1}(y) = \alpha_i^{-1} \circ g \circ f^{-1}(y) = \alpha_i^{-1} \circ f^{-1}(y) \in \alpha_i^{-1} \circ \alpha_i(Y_{n_{i+1}} \cap Z) = Y_{n_{i+1}} \cap Z \subset Y_{n_{i+2}} \cap Z$. 应用上面证明 $(c_{i+1})$ 成立的方法, 可以证明 $f^{-1}(y) \in \alpha_i(Y_{n_{i+1}} \setminus Z)$ 是不可能的. 因此 $(e_{i+1})$ 的前半部分成立, 而后半部分同理可证.

容易验证条件 $(f_{i+1})$ 成立.

对任意 $b \in B_{k_i}$, 由 $(d_i)$ 我们有 $b \in \alpha_i(Y_{n_{i+1}})$. 由 (vi) 和 (ii) 得 $h_{i+1}(b) = f \circ g^{-1}(b) = f(b) = b$, 因此 $(g_{i+1})$ 也成立.

到此, 我们完成了归纳定义.

由文献 [2, 定理 6.1.2], 我们可以选择一些充分小的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i, \ldots$, 使得 $h = \lim_{i \to +\infty} h_i \circ h_{i-1} \circ \cdots \circ h_1$ 是一个从 $Q$ 到 $Q$ 的同胚, 而且这时有下面的事实:

**事实 1** $h(Y) = \Sigma$.

如果 $y \in Y_{n_i}$ 对某个 $i \in \mathbb{N}$ 成立, 则由条件 $(a_j)$, $j \geqslant i$, 有 $h(y) = \alpha_i(y)$. 一方面, 对任意 $y \in Y$, 存在 $i$, 使得 $y \in Y_{n_i}$, 因此, 由 $(b_i)$ 有 $h(y) = \alpha_i(y) \in B_{k_i} \subset \Sigma$. 另一方面, 对任意 $b \in \Sigma$, 存在 $i$, 使得 $b \in B_{k_i}$. 设 $y = \alpha_i^{-1}(b)$. 由 $(d_i)$ 有 $y \in Y_{n_{i+1}}$, 因此, 由 $(g_{i+1})$ 有 $h(y) = \alpha_{i+1}(y) = h_{i+1}(b) = b$, 即 $b \in h(Y)$.

**事实 2** $h(Z) = c_0$.

事实 2 可以仿照证明事实 1 来证明.

因此 $(Q, Y, Z) \approx (Q, \Sigma, c_0)$.

## 4 定理 1 的证明

本节总假设 $(X, \rho)$ 是一个无限的紧空间且 $\overline{X \setminus X'} = X$, $d$ 是在第 1 节所提及的 $X \times \mathbf{I}$ 上的容许度量.

$$\mathrm{C}_0(X) = \{f \in \mathrm{C}(X): \text{ 对所有 } a \in X' \text{有 } f(a) = 0\}.$$

我们将要应用定理 3 证明

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{USC}(X) \setminus \downarrow\mathrm{C}_0(X), \downarrow\mathrm{C}(X) \setminus \downarrow\mathrm{C}_0(X)) \approx (Q, \Sigma, c_0),$$

因此,

$$\begin{aligned}&(\downarrow\mathrm{USC}\,(X), \downarrow\mathrm{C}(X))\\&\quad= (\downarrow\mathrm{USC}(X), (\downarrow\mathrm{C}(X) \setminus \downarrow\mathrm{C}_0(X)) \cup (\downarrow\mathrm{USC}(X) \setminus (\downarrow\mathrm{USC}(X) \setminus \downarrow\mathrm{C}_0(X))))\\&\quad\approx (Q, c_0 \cup (Q \setminus \Sigma)).\end{aligned}$$

下面, 如果 $H$ 是一个从空间 $Y$ 到 $\mathrm{USC}(X)$ 的映射, 则 $\downarrow H$ 表示从 $Y$ 到 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 的映射, 它把每个 $y\in Y$ 映射到 $\downarrow(H(y))$. 反之, 如果 $\downarrow H$ 是一个从 $Y$ 到 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 的映射, 则相应的 $H$ 与上面的意义相同.

设 $F=\mathrm{USC}(X)\setminus \mathrm{C}_0(X)$. 对任意 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, 设

$$F_n=\left\{f\in\mathrm{USC}(X): \text{存在 } a\in X' \text{ 使得 } f(a)\geqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

显然, 对每个 $f\in\mathrm{USC}(X)$, 如果对所有 $a\in X'$ 都有 $f(a)=0$, 则 $f\in\mathrm{C}_0(X)$. 因此, $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 进一步, 我们将通过一系列的引理证明, 若取 $Z=\downarrow\mathrm{C}(X)\setminus\downarrow\mathrm{C}_0(X)$ 则塔 $(\downarrow F_n)_n$ 满足定理 3 中条件 2.

**引理 3** $\downarrow F_n$ 是 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 的闭子集.

**证明** 设 $(\downarrow f_i)_i$ 是 $\downarrow F_n$ 中的一个序列, 并且其极限为 $\downarrow f\in\downarrow\mathrm{USC}(X)$. 假设 $f\notin F_n$, 将导出矛盾. 注意到 $X'$ 是紧的, 存在 $a\in X'$, 使得 $f(a)=\max\{f(x):x\in X'\}$. 设 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-f(a))$. 由假设, $\varepsilon>0$. 因为 $X$ 是紧的且 $f\in\mathrm{USC}(X)$, 故存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)<f(y)+\varepsilon$ 对任意 $x,y\in X$ 且 $\rho(x,y)<\delta$ 都成立. 令 $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon,\delta\}$. 因为 $\downarrow f_i\to\downarrow f$, 所以存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$d_{\mathrm{H}}(\downarrow f_N,\downarrow f)<\varepsilon_0. \tag{$*$}$$

由 $f_N\in F_n$ 可得 $f_N(y)\geqslant\frac{1}{n}$ 对某一个 $y\in X'$ 成立. 注意到点 $p_0=(y,\frac{1}{n})\in\downarrow f_N$ 但 $p_0\notin B_d(\downarrow f,\varepsilon_0)$, 这与 $(*)$ 式矛盾.

**引理 4** $\downarrow F_n\in Z(\downarrow\mathrm{USC}(X))\cap Z(\downarrow F_{n+1})$.

**证明** 取定 $\varepsilon\in(0,1)$. 由 $\overline{X\setminus X'}=X$ 和 $X$ 的紧性, 存在一个有限集 $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}\subset X\setminus X'$, 使得 $\{\mathrm{B}_\rho(a_i,\frac{\varepsilon}{4}):i=1,2,\dots,k\}$ 覆盖 $X$. 由文献 [17, 命题 4.1.7] 和文献 [7, 定理 3], 存在一个同伦 $H:\downarrow\mathrm{USC}(X)\times\mathbf{I}\to\downarrow\mathrm{USC}(X)$, 使得 $H_0=\mathrm{id}_{\downarrow\mathrm{USC}(X)}$ 且

$$H_t(\downarrow\mathrm{USC}(X))\subset\downarrow\mathrm{C}(X)\ \ d_{\mathrm{H}}(H_t(\downarrow f),\downarrow f)\leqslant t$$

对每个 $t\in(0,1]$ 成立. 对每一个 $f\in\mathrm{USC}(X)$ 和 $1\leqslant i\leqslant k$, 设

$$\downarrow h(f)=H\left(\downarrow f,\frac{\varepsilon}{4}\right),$$

$$S_{a_i}(\downarrow f)=\sup\left\{h(f)(x):x\in\mathrm{B}_\rho\left(a_i,\frac{\varepsilon}{4}\right)\right\},$$

则 $S_{a_i}:\downarrow\mathrm{USC}(X)\to\mathbf{I}$ 是一个连续映射. 定义 $\downarrow\phi:\downarrow\mathrm{USC}(X)\to\downarrow\mathrm{USC}(X)\setminus\downarrow F_n$ 如下:

$$\phi(f)(x)=\begin{cases}S_{a_i}(\downarrow f), & x=a_i,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然, $\hat{\varrho}(\downarrow\phi,\mathrm{id}_{\downarrow\mathrm{USC}(X)})<\varepsilon$. 由 $S_{a_i}$ 的连续性可得 $\downarrow\phi$ 是连续的, 因而 $\downarrow F_n\in Z(\downarrow\mathrm{USC}(X))$. 将上面两个公式的 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 和 0 分别换成 $\downarrow F_{n+1}$ 和 $\min\{f(x),\frac{1}{n+1}\}$, 可以证明 $\downarrow F_n\in Z(\downarrow F_{n+1})$.

下面的引理 5 是验证我们的结果所必需的. 特别地, 它的第 2 个论断将会在证明引理 9 的情形 A 中用到.

**引理 5** $\downarrow F_n$ 是一个 AR 且 $\downarrow\mathrm{C}_n(X)$ 在 $\downarrow F_n$ 中同伦稠, 这里 $\mathrm{C}_n(X)=\mathrm{C}(X)\cap F_n$.

**证明** 定义 $\vee:\downarrow F_n\times\downarrow F_n\to\downarrow F_n$ 如下: $\downarrow f\vee\downarrow g=\downarrow\max\{f,g\}=\downarrow f\cup\downarrow g$, 则 $\vee$ 是连续的. 容易验证 $(\downarrow F_n,\vee)$ 是一个半格. 而且, 我们将证明对任意 $\downarrow g,\downarrow h\in\mathrm{B}_{d_{\mathrm{H}}}(\downarrow f,\varepsilon)$, 有 $\downarrow g\vee\downarrow h\in\mathrm{B}_{d_{\mathrm{H}}}(\downarrow f,\varepsilon)$ 成立. 对任意点 $p\in\downarrow f$, 因为 $d_{\mathrm{H}}(\downarrow f,\downarrow g)<\varepsilon$, 所以存在 $p_0\in\downarrow g\subset\downarrow g\vee\downarrow h$,

使得 $d(p,p_0)<\varepsilon$. 一方面, 如果 $q\in{\downarrow}g\vee{\downarrow}h$, 则 $q\in{\downarrow}g$ 或 $q\in{\downarrow}h$. 因为 ${\downarrow}g,{\downarrow}h\in \mathrm{B}_{d_{\mathrm{H}}}({\downarrow}f,\varepsilon)$, 所以存在 $q_0\in{\downarrow}f$, 使得 $d(q,q_0)<\varepsilon$. 因而, ${\downarrow}g\vee{\downarrow}h\in \mathrm{B}_{d_{\mathrm{H}}}({\downarrow}f,\varepsilon)$. 我们得到 ${\downarrow}F_n$ 有一个由其子半格构成的开基, 即 ${\downarrow}F_n$ 是一个 Lawson 半格. 显然, ${\downarrow}\mathrm{C}_n(X)$ 是 ${\downarrow}F_n$ 的一个子半格, 因此, 要完成证明, 由引理 1, 只需证明 ${\downarrow}\mathrm{C}_n(X)$ 在 ${\downarrow}F_n$ 中是相对 $LC^0$ 和道路连通的.

对任意 ${\downarrow}f\in{\downarrow}F_n$ 和 $\varepsilon>0$, 我们将要证明 ${\downarrow}V=\mathrm{B}_{d_{\mathrm{H}}}({\downarrow}f,\varepsilon)\cap{\downarrow}\mathrm{C}_n(X)$ 是道路连通的. 对任意 ${\downarrow}g_1,{\downarrow}g_2\in{\downarrow}V$, 注意到 ${\downarrow}g={\downarrow}g_1\vee{\downarrow}g_2\in{\downarrow}V$. 定义 ${\downarrow}H:\mathbf{I}\to{\downarrow}V$ 如下: $H(t)=(1-t)g_1+tg$, 则 ${\downarrow}H$ 的定义是有意义的而且是一个从 ${\downarrow}g_1$ 到 ${\downarrow}g$ 的道路 (参看文献 [7, 引理 6] 的证明). 同理, 在 ${\downarrow}V$ 中存在一条道路连接 ${\downarrow}g$ 和 ${\downarrow}g_2$. 我们得到 ${\downarrow}\mathrm{C}_n(X)$ 是相对 $LC^0$. 同理, 可以证明 ${\downarrow}\mathrm{C}_n(X)$ 是道路连通的.

现在我们用定理 C 验证下面引理:

**引理 6** ${\downarrow}F_n\approx Q$.

**证明** 因为 $X$ 为一个无限的紧空间, 故 $X'\neq\emptyset$, 选择一个点 $a\in X'$. 对任意 $\varepsilon>0$, 由我们的假设, 可以选择两个不同的孤立点 $a_1,a_2\in \mathrm{B}_\rho(a,\frac{\varepsilon}{2})$. 对任意两个连续函数 $f$ 和 $g:\mathbf{I}^k\to{\downarrow}F_n$, 定义 $f'$ 和 $g':\mathbf{I}^k\to{\downarrow}F_n$ 如下, 对任意 $q\in\mathbf{I}^k$, 令

$$f'(q)(x)=\begin{cases}\max\{\varepsilon,f(q)(a_1),f(q)(a_2)\}, & x=a_1,\\ 0, & x=a_2,\\ f(q)(x), & \text{其他};\end{cases}$$

$$g'(q)(x)=\begin{cases}\max\{\varepsilon,g(q)(a_1),g(q)(a_2)\}, & x=a_2,\\ 0, & x=a_1,\\ g(q)(x), & \text{其他};\end{cases}$$

则显然 $d_{\mathrm{H}}({\downarrow}f,{\downarrow}f')<\varepsilon$, $d_{\mathrm{H}}({\downarrow}g,{\downarrow}g')<\varepsilon$, $f'(\mathbf{I}^k)\cap g'(\mathbf{I}^k)=\emptyset$. 所以 ${\downarrow}F_n$ 有包腔不相交性质.

因此, 由定理 C, 引理 3 和 5, 可以得到 ${\downarrow}F_n\approx Q$.

**引理 7** $({\downarrow}F_n)_n$ 是一个在 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 中有形变性质的塔.

**证明** 对任意 $f\in\mathrm{USC}(X)$ 和 $t\in\mathbf{I}$, 设

$$H({\downarrow}f,t)={\downarrow}f\cup(X\times[0,t]),$$

则容易验证 $H_0=\mathrm{id}_{{\downarrow}\mathrm{USC}(X)}$ 且对任意 $t\in(0,1]$ 存在 $n$, 使得 $H_t({\downarrow}\mathrm{USC}(X))\subset{\downarrow}F_n$, 因此, $({\downarrow}F_n)_n$ 是一个在 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 中有形变性质的塔.

**引理 8** 对任意 $\varepsilon>0,n\in\mathbb{N}$, $A\in Z({\downarrow}\mathrm{USC}(X))$, 存在 $m>n$ 和 $h\in\mathcal{H}({\downarrow}\mathrm{USC}(X))$, 使得 $h|_{{\downarrow}F_n}=\mathrm{id}_{{\downarrow}F_n},h(A)\subset{\downarrow}F_m$, $\hat{\varrho}(h,\mathrm{id}_{{\downarrow}\mathrm{USC}(X)})<\varepsilon$.

**证明** 设 $\varepsilon\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$, $A\in Z({\downarrow}\mathrm{USC}(X))$. 由文献 [17, 推论 5.3.8] 和定理 A, 存在 $\gamma>0$, 使得 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 中任意两个 $Z$-集之间使点移动距离小于 $\gamma$ 的同胚都可以扩张成 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 上移动距离小于 $\varepsilon$ 的同胚. 设 $t=\min\{\frac{1}{2n},\frac{\gamma}{5}\}$. 选择 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{m}<t$. 由引理 5, 存在一个收缩 $r:{\downarrow}\mathrm{USC}(X)\to{\downarrow}F_n$. 设 $\mathcal{U}$ 是由所有 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 的 $\frac{\gamma}{8}$-球组成的开覆盖. 因为 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 是一个 ANR, 由文献 [17, 定理 4.1.1] 存在 $\mathcal{U}$ 的一个开加细 $\mathcal{V}$, 使得对每个空间 $Y$, 任意两个 $\mathcal{V}$-接近的连续映射 $f$, $g:Y\to{\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 都是 $\mathcal{U}$-同伦的. 由 ${\downarrow}\mathrm{USC}(X)$ 的紧性可得存在 $\mathcal{V}$ 的 Lebesgue 数 $\delta>0$. 令

$$B=\left\{f\in\mathrm{USC}(X):d_{\mathrm{H}}({\downarrow}f,r({\downarrow}f))\leqslant\frac{\delta}{2}\right\}.$$

显然, $\downarrow B$ 是 $\downarrow F_n$ 在 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 中的闭邻域. $\mathrm{id}_{\downarrow B}$ 和 $r|_{\downarrow B}$ 是 $\mathcal{V}$-接近的, 因此存在一个同伦 $\Psi:\downarrow B\times\mathbf{I}\to\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 是 $\mathcal{U}$-限制的, 并且连接 $\mathrm{id}_{\downarrow B}$ 和 $r|_{\downarrow B}$. 由文献 [17, 定理 4.1.3] 存在一个同伦 $\overline{\Psi}:\downarrow\mathrm{USC}(X)\times\mathbf{I}\to\downarrow\mathrm{USC}(X)$, 使得 $\overline{\Psi}$ 是 $\mathcal{U}$-限制的, 并且 $\overline{\Psi}_0=\mathrm{id}_{\downarrow\mathrm{USC}(X)}$, $\overline{\Psi}|_{(\downarrow B\times\mathbf{I})}=\Psi$. 令

$$\overline{r}=\overline{\Psi}_1,$$

则它是一个连续映射并且扩张 $r|_{\downarrow B}$, 而 $d_{\mathrm{H}}(\overline{r}(\downarrow f),\downarrow f)<\frac{\gamma}{4}$ 对所有 $f\in\mathrm{USC}(X)$ 都成立. 令

$$C=\left\{f\in\mathrm{USC}(X):d_{\mathrm{H}}(\downarrow f,r(\downarrow f))\geqslant\frac{\delta}{2}\right\},$$

则 $\downarrow F_n$ 和 $\downarrow C$ 是 $\downarrow\mathrm{USC}(X)$ 中两个互不相交的闭子集, 存在一个连续映射 $\alpha:\downarrow\mathrm{USC}(X)\to[0,t]$, 使得 $\alpha(\downarrow F_n)=\{0\}$, $\alpha(\downarrow C)=\{t\}$. 设 $H$ 是证明引理 7 中的那个同伦. 定义一个映射 $\varphi:\downarrow\mathrm{USC}(X)\to\downarrow F_m$ 如下, $\varphi(\downarrow f)=H(\overline{r}(\downarrow f),\alpha(\downarrow f))$. 注意到 $\varphi$ 是连续的而 $\varphi|_{\downarrow F_n}=\mathrm{id}_{\downarrow F_n}$. 而且, $d_{\mathrm{H}}(\varphi(\downarrow f),\downarrow f)\leqslant d_{\mathrm{H}}(\varphi(\downarrow f),\overline{r}(\downarrow f))+d_{\mathrm{H}}(\overline{r}(\downarrow f),\downarrow f)\leqslant\frac{\gamma}{5}+\frac{\gamma}{4}<\frac{\gamma}{2}$ 对任意 $f\in\mathrm{USC}(X)$ 都成立. 由引理 6 存在 $g\in\mathcal{H}(Q,\downarrow F_m)$. 注意到 $g$ 是一致连续的, 我们可以用 $\downarrow F_m$ 替代文献 [17, 定理 5.3.11] 中的 $Q$. 因此, 存在一个 $Z$-嵌入 $\psi:\downarrow\mathrm{USC}(X)\to\downarrow F_m$, 使得 $\hat{\varrho}(\varphi,\psi)<\frac{\gamma}{2}$, $\psi|_{\downarrow F_n}=\mathrm{id}_{\downarrow F_n}$. 注意到 $\downarrow F_n\cup A$, $\downarrow F_n\cup\psi(A)\in Z(\downarrow\mathrm{USC}(X))$, $\hat{\varrho}(\psi,\mathrm{id}_{\downarrow\mathrm{USC}(X)})<\gamma$, 而 $\psi|_{\downarrow F_n\cup A}$ 是一个同胚. 由 $\gamma$ 的选择, 存在 $h\in\mathcal{H}(\downarrow\mathrm{USC}(X))$ 扩张 $\psi|_{\downarrow F_n\cup A}$ 且 $\hat{\varrho}(h,\mathrm{id}_{\downarrow\mathrm{USC}(X)})<\varepsilon$. 容易看出 $m$ 和 $h$ 即为所求.

**引理 9** 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $(\downarrow F_n,\downarrow\mathrm{C}_n(X))$ 是强 $(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_{\sigma\delta})$-万有的都成立.

**证明** 设 $C$ 和 $K$ 分别是一个紧空间 $(Y,\varrho)$ 的 $F_{\sigma\delta}$-集和闭子集. 设 $\Phi:Y\to F_n$ 是一个映射, 使得 $\downarrow\Phi:Y\to\downarrow F_n$ 是连续的而 $\downarrow\Phi|_K:K\to\downarrow F_n$ 是一个 $Z$-嵌入. 由文献 [18, 引理 1.1] 和引理 6, 不失一般性, 不妨设 $\downarrow\Phi(K)\cap\downarrow\Phi(Y\setminus K)=\emptyset$. 对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$, 我们将要定义一个映射 $\Psi:Y\to F_n$, 使得 $\downarrow\Psi:Y\to\downarrow F_n$ 是一个 $Z$-嵌入而且 $\Psi|_K=\Phi|_K$, $\Psi^{-1}(\mathrm{C}_n(X))\setminus K=C\setminus K$, $d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Psi(y),\downarrow\Phi(y))<\varepsilon$ 对所有 $y\in Y$ 都成立.

由文献 [4, 引理 9], 存在 $g:Y\to Q_u=\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, 使得 $g$ 是一个嵌入, 且 $g^{-1}(c_1)=C$, 这里

$$c_1=\left\{(x_n)\in Q_u:\lim_{n\to+\infty}x_n=1\right\}.$$

设 $\delta:Y\to[0,1)$ 是一个映射定义如下:

$$\delta(y)=\frac{1}{5}\min\{\varepsilon,d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Phi(y),\downarrow\Phi(K))\},$$

则 $\delta$ 是连续的, 且 $\delta(y)=0$ 当且仅当 $y\in K$.

我们考虑下面两种情形:

**情形 A** $|X'|\geqslant\omega$. 存在一列非孤立点 $(x_i)_i$ 收敛到一个点 $x_\infty\in X'$. 可以定义 $\Psi:Y\to\mathrm{USC}(X)$ 像在证明文献 [7, 命题 1] 中所做的. 因为 $\downarrow\Phi(Y)\subset\downarrow F_n$, $\{x_i:i\in\mathbb{N}\}\subset X'$, 所以得到 $\downarrow\Psi(Y)\subset\downarrow F_n$, 因此 $\Psi:Y\to F_n$ 为所求.

**情形 B** $|X'|<\omega$. 设 $a=|X'|$. 不失一般性, 可以假设

$$X=\left\{\left(i,\frac{1}{2^j}\right)\in\mathbb{R}^2:j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\},i\in\mathbb{N}\text{ 且 }i\leqslant a\right\}$$

赋予平面 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑, 这里 $\frac{1}{2^\infty}=0$. 令

$$S_i=\{(x,y)\in X:x=i\}.$$

定义 $M_i: Y\times S_i\backslash\{0\}\to \mathbf{I}$ 如下: 对任意 $y\in Y$ 和 $j<\infty$, 令 $M_i(y,(i,\frac{1}{2^j}))=\max\{\Phi(y)(i,\frac{1}{2^k}):k\geqslant j\}$, 则对任意 $i$, $M_i$ 都连续.

对任意 $k\in\mathbb{N}$, 设 $C_k=\{c\in Y:\frac{1}{2^k}\leqslant\delta(c)\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\}$, 则 $C_k\cap C_l=\emptyset$ 如果 $|k-l|>1$. 对任意 $c\in C_k$, 定义 $\Psi_k(c)\in F_n$ 如下: 对任意 $(i,\frac{1}{2^j})\in X$, 令

$$\Psi_k(c)\left(i,\frac{1}{2^j}\right)=\begin{cases}\min\left\{\Phi(c)\left(i,\dfrac{1}{2^j}\right)+\dfrac{\delta(c)}{2},1\right\}, & j\leqslant 2k,\\ \min\left\{\dfrac{\delta(c)}{2}(1-t)+\Phi(c)\left(i,\dfrac{1}{2^j}\right)t+\dfrac{\delta(c)}{2},1\right\}, & j=2k+1,\\ \min\left\{\Phi(c)\left(i,\dfrac{1}{2^j}\right)t+\dfrac{\delta(c)}{2},1\right\}, & j=2k+2,\\ \delta(c), & j=2k+3,\\ \dfrac{\delta(c)}{2}t, & j=2k+4,\\ B_i(c)(1-t)+\delta(c)t, & j=2k+5,\\ 0, & j=2k+6,\\ B_i(c), & j=2k+7,\\ B_i(c)g(c)(1)(1-t), & j=2k+8,\\ B_i(c)[g(c)(m+1)(1-t)+g(c)(m)t], & j>2k+8, j\ \text{是偶数},\\ B_i(c), & \text{其他},\end{cases}$$

这里 $t=2-2^k\delta(c)$, $m=2^{-1}j-k-4$, 而

$$B_i(c)=M_i\left(c,\left(i,\frac{1}{2^{2k-1}}\right)\right)(1-t)+M_i\left(c,\left(i,\frac{1}{2^{2k+1}}\right)\right)t.$$

注意到 $\Phi(c)\in F_n$, $B_i(c)\geqslant\Phi(c)(i,0)$ 对任意 $c\in Y\setminus K$ 和 $i\leqslant a$ 都成立, 因此, 对任意 $c\in Y\setminus K$, 有 $\Psi_k(c)(i,0)\geqslant\frac{1}{n}$ 对某一个 $i\leqslant a$ 成立, 即 $\Psi_k(c)\in F_n$. 如果 $c\in C_k\cap C_{k-1}$ 对某一个 $k\in\mathbb{N}$ 成立, 则 $\delta(c)=\frac{1}{2^{k-1}}$, 容易验证 $\Psi_k(c)=\Psi_{k-1}(c)$. 可以定义 $\Psi:Y\to F_n$ 如下: 如果 $c\in C_k$, 则定义 $\Psi(c)=\Psi_k(c)$, 而如果 $c\in K$, 则定义 $\Psi(c)=\Phi(c)$. 我们将证明 $\Psi$ 即为所求.

注意到 $\Psi(c)$ 是连续的, 当且仅当 $\lim_{m\to\infty}g(c)(m)=1$, 当且仅当 $c\in C$, 故 $\downarrow\Psi^{-1}(\downarrow C_n(X))\backslash K=C\backslash K$. 注意到 $|\Psi(c)(i,\frac{1}{2^j})-\Phi(c)(i,\frac{1}{2^j})|<\delta(c)$ 对任意 $\frac{1}{2^j}\geqslant\delta(c)$ 都成立, 且存在 $a\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, 使得 $\Psi(c)(i,\frac{1}{2^a})\geqslant\max\{\Phi(c)(i,\frac{1}{2^j}):\frac{1}{2^j}\leqslant\delta(c)\}$, 因此, $\mathrm{B}_d(\downarrow\Psi(c),\delta(c))\supset\downarrow\Phi(c)$. 而且, 对任意 $i$,

$$\max\left\{\Psi(c)\left(i,\frac{1}{2^j}\right):\frac{1}{2^j}\leqslant\delta(c)\right\}\leqslant\max\left\{\Phi(c)\left(i,\frac{1}{2^j}\right):\frac{1}{2^j}\leqslant\delta(c)\right\}+\delta(c).$$

我们得到 $\mathrm{B}_d(\downarrow\Phi(c),\delta(c))\supset\downarrow\Psi(c)$, 故 $d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Psi(c),\downarrow\Phi(c))\leqslant\delta(c)<\varepsilon$ 对任意 $c\in Y$ 都成立. 为完成证明, 只需验证下面的事实:

**事实 1** $\downarrow\Psi:Y\to\downarrow F_n$ 是连续的.

只需证明对任意 $k\in\mathbb{N}$, $\downarrow\Psi|_{C_k}:C_k\to\downarrow F_n$ 是连续的, 且 $\downarrow\Psi$ 在 $K$ 上的每个点都连续.

为证明前半句话, 设 $\varepsilon'>0$, $c'\in C_k$, 我们将找到 $\delta'>0$, 使得如果 $c\in C_k$ 且 $\varrho(c,c')<\delta'$, 则 $d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Psi(c),\downarrow\Psi(c'))<\varepsilon'$. 选择 $l\in\mathbb{N}$ 充分大, 使得 $l>2k+8$ 且 $\frac{1}{2^l}<\varepsilon'$. 把 $B_i$ 看成是由

上面 $B_i(c)$ 所定义的从 $C_k$ 到 $\mathbf{I}$ 的映射, 注意到 $B_i$ 是连续的, 因此对任意 $i \leqslant a, j < l$, 由 $\downarrow\Phi, M_i, g, \delta$, $B_i$ 的连续性, 存在 $\delta'_{i,j} > 0$, 使得如果 $c \in C_k$ 且 $\varrho(c, c') < \delta'_{i,j}$, 则 $|\Psi(c)(i, \frac{1}{j}) - \Psi(c')(i, \frac{1}{j})| < \varepsilon'$. 令 $\delta' = \min\{\delta'_{i,j} : i \leqslant a$ 和 $j < l\}$. 对任意 $c \in C_k$, $\varrho(c, c') < \delta'$, $i \leqslant a$, $j \geqslant l$ 和 $p \leqslant \Psi(c)(i, \frac{1}{2^j})$, 注意到 $\Psi(c)(i, \frac{1}{2^j}) \leqslant \Psi(c)(i, 0) = B_i(c) = \Psi(c)(i, \frac{1}{2^{2k+7}})$, 由 $B_i$ 的连续性可得存在 $q \leqslant \Psi(c')(i, 0)$, 使得 $d_{\mathrm{H}}(((i, \frac{1}{j}), p), ((i, 0), q)) < \varepsilon'$. 因此, 由 $\delta'$ 的选择, 有 $\downarrow\Psi(c) \subset \mathrm{B}_d(\downarrow\Psi(c'), \varepsilon')$. 同理, $\downarrow\Psi(c') \subset \mathrm{B}_d(\downarrow\Psi(c), \varepsilon')$. 得到 $d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Psi(c), \downarrow\Psi(c')) < \varepsilon'$ 而 $\delta'$ 为所求.

由 $\downarrow\Phi$ 的连续性且对任意 $c \in Y$, 有 $d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Phi(c), \downarrow\Psi(c)) \leqslant \delta(c)$, 我们得到 $\downarrow\Psi$ 在 $K$ 上的每个点是连续的, 即后半句话也得证.

**事实 2** $\downarrow\Psi : Y \to \downarrow F_n$ 是一个单射.

假设 $c_1, c_2 \in Y$, $\downarrow\Psi(c_1) = \downarrow\Psi(c_2)$, 需要证明 $c_1 = c_2$. 因为 $\downarrow\Psi|_K = \downarrow\Phi|_K$ 是一个单射, 且 $d_{\mathrm{H}}(\downarrow\Psi(c), \downarrow\Phi(c)) \leqslant \delta(c) \leqslant \frac{1}{2} d(\downarrow\Phi(c), \downarrow\Phi(K))$, 只需考虑 $c_1, c_2 \in Y \backslash K$ 的情形. 存在 $k_1$, 使得 $c_1 \in C_{k_1} \setminus C_{k_1 - 1}$. 注意到 $\Psi(c_1)(i, \frac{1}{2^{2k_1+6}}) = 0$ 且 $\Psi(c_1)(i, \frac{1}{2^j}) > 0$ 对任意 $j < 2k_1 + 6$ 都成立, 因为 $\delta(c_1) > 0$. 同理, 存在 $k_2$, 使得 $c_2 \in C_{k_2} \setminus C_{k_2 - 1}$. 因此 $\Psi(c_2)(i, \frac{1}{2^{2k_2+6}}) = 0$ 且 $\Psi(c_2)(i, \frac{1}{2^j}) > 0$ 对任意 $j < 2k_2 + 6$ 都成立. 由假设可得 $2k_1 + 6 = 2k_2 + 6$. 即 $k_1 = k_2$, 因此

$$\delta(c_1) = \Psi(c_1)\left(i, \frac{1}{2^{2k_1+3}}\right) = \Psi(c_2)\left(i, \frac{1}{2^{2k_2+3}}\right) = \delta(c_2),$$

$$B_i(c_1) = \Psi(c_1)\left(i, \frac{1}{2^\infty}\right) = \Psi(c_2)\left(i, \frac{1}{2^\infty}\right) = B_i(c_2).$$

注意到存在 $i_0 \leqslant a$, 使得 $B_{i_0}(c_1) = B_{i_0}(c_2) \geqslant \frac{1}{n} > 0$. 如果 $2 - 2^{k_1}\delta(c_1) = 2 - 2^{k_2}\delta(c_2) \neq 0$, 由

$$\Psi(c_1)\left(i_0, \frac{1}{2^{2k_1+8}}\right) = \Psi(c_2)\left(i_0, \frac{1}{2^{2k_2+8}}\right),$$

我们有 $g(c_1)(1) = g(c_2)(1)$, 而如果 $2 - 2^{k_1}\delta(c_1) = 2 - 2^{k_2}\delta(c_2) = 0$, 则由

$$\Psi(c_1)\left(i_0, \frac{1}{2^{2k_1+10}}\right) = \Psi(c_2)\left(i_0, \frac{1}{2^{2k_2+10}}\right),$$

也有 $g(c_1)(1) = g(c_2)(1)$. 同理, $g(c_1)(m) = g(c_2)(m)$ 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都成立. 因此, $g(c_1) = g(c_2)$. 因为 $g$ 是一个嵌入, 我们有 $c_1 = c_2$.

**事实 3** $\downarrow\Psi(Y)$ 是 $\downarrow F_n$ 中一个 $Z$-集.

因为 $Y$ 是紧的而 $\downarrow\Psi$ 是连续的, 所以 $\downarrow\Psi(Y) = \downarrow\Psi(Y \setminus K) \cup \downarrow\Psi(K)$ 在 $\downarrow F_n$ 中是闭的. $\downarrow\Psi(K) = \downarrow\Phi(K) \in Z(\downarrow F_n)$. 对任意 $c \in Y \backslash K$, 存在 $(i, \frac{1}{2^j}) \in X$, 使得 $\Psi(c)(i, \frac{1}{2^j}) = 0$. 由文献 [4, 引理 5] 可得 $\downarrow\Psi(Y)$ 是 $\downarrow F_n$ 中一个 $Z$-集. 证毕.

**定理 1 的证明** 考虑三元组

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{USC}(X) \backslash \downarrow\mathrm{C}_0(X), \downarrow\mathrm{C}(X) \backslash \downarrow\mathrm{C}_0(X)).$$

由定理 A 可知它满足定理 3 的条件 1. $\downarrow\mathrm{USC}(X) \backslash \downarrow\mathrm{C}_0(X)$ 可以写成 $(\downarrow F_n)_n$ 的并. 引理 3 和 4 证明 $(\downarrow F_n)_n$ 满足定理 3 中的条件 (a). 注意到 $\downarrow F_n \cap (\downarrow\mathrm{C}(X) \backslash \downarrow\mathrm{C}_0(X)) = \downarrow\mathrm{C}_n(X)$. 由引理 9 和 8 分别可得塔 $(\downarrow F_n)_n$ 满足定理 3 中的条件 (b) 和 (c), 因此所考虑的三元组满足定理 3 的条件 1 和 2. 所以

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{USC}(X) \backslash \downarrow\mathrm{C}_0(X), \downarrow\mathrm{C}(X) \backslash \downarrow\mathrm{C}_0(X)) \approx (Q, \Sigma, c_0).$$

因此, 正如本节开始所讨论的, 有

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X), \downarrow\mathrm{C}(X)) \approx (Q, c_0 \cup (Q \setminus \Sigma)).$$

## 5 定理 2 的证明

(a) $\Rightarrow$ (b) 和 (b) $\Rightarrow$ (c) 是容易验证的.

(c) $\Rightarrow$ (d). 对任意 $x \in X$, 定义 $f_x \in \mathrm{USCC}(X)$ 如下:

$$f_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } y = x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 $x \rightarrowtail \downarrow f_x$ 给出了一个从 $X$ 到 $\downarrow\mathrm{USCC}(X)$ 的闭嵌入. 而 (c) 意味着 $X$ 是可分的. 由定理 A 和文献 [8, 定理 1] 可得 (c), 能推出 $X$ 为非紧的和非离散的. 为完成 (c) $\Rightarrow$ (d) 的证明, 我们要证明如果 $\downarrow\mathrm{USCC}(X)$ 是 $\sigma$-紧的则 $X$ 是局部紧的. 首先, 我们验证下面的事实:

**事实** 对任意紧集 $\downarrow C \subset \downarrow\mathrm{USCC}(X)$ 和 $t > 0$, 集合

$$A = \overline{\bigcup\{f^{-1}([t,1]) : f \in C\}}$$

(在 $X$ 中的闭包) 是紧的.

事实上, 如果 $A$ 不是紧的, 则存在 $X$ 中的一个序列 $(x_n)_n$ 和 $C$ 中的一个序列 $(f_n)_n$, 使得 $f_n(x_n) \geqslant t$ 而 $(x_n)_n$ 没有任意收敛的子序列. 因为 $\downarrow C$ 是紧的, 不失一般性, 不妨设 $\downarrow f_n \to \downarrow f \in \downarrow C$, 则存在一个序列 $(y_{n_k})_k$, 使得对任意 $k$, 都有 $\rho(y_{n_k}, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ 和 $f(y_{n_k}) > \frac{t}{2} > 0$. 因而 $(y_{n_k})_k$ 是集合 $\overline{\{x \in X : f(x) > 0\}}$ 中的一个没有任意收敛子列的序列, 这与这个集合的紧性矛盾. 本事实得证.

现在假设 $X$ 在 $x_\infty \in X$ 上不是局部紧的. 因为 $\downarrow\mathrm{USCC}(X)$ 是 $\sigma$-紧的, 不妨设

$$\downarrow\mathrm{USCC}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \downarrow F_n,$$

这里所有 $\downarrow F_n$ 都是紧的. 由上述事实, 对任意 $n$,

$$A_n = \overline{\bigcup\left\{f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) : f \in F_n\right\}}$$

是紧的. 因而没有一个 $A_n$ 是 $x_\infty$ 的邻域, 所以存在 $x_n \in X$, 使得 $\rho(x_\infty, x_n) < \frac{1}{n}$ 而 $x_n \notin A_n$, 则 $x_n \to x_\infty$. 定义 $f : X \to \mathbf{I}$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果对某个 } n \leqslant \infty \text{ 有 } x = x_n, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然 $f \in \mathrm{USCC}(X)$, 但 $f \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, 这就出现矛盾.

(d) $\Rightarrow$ (a). 设 $X$ 是一个非紧的、局部紧的、非离散空间, 而 $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ 是 $X$ 的单点紧化, $d$ 是 $\alpha X$ 上的一个容许度量. 对任意 $f \in \mathrm{USCC}(X)$, 定义 $\alpha(f) : \alpha X \to \mathbf{I}$ 如下:

$$\alpha(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$$

文献 [8] 证明了 $\downarrow\alpha : \downarrow\mathrm{USCC}(X) \to \downarrow\mathrm{USC}(\alpha X)$ 是一个嵌入. 易得

$$\alpha(\mathrm{USCC}(X)) = \{f \in \mathrm{USC}(\alpha X) : \text{ 存在 } \varepsilon > 0 \text{ 使得对任意 } x \in \mathrm{B}_d(\infty, \varepsilon) \text{ 都有 } f(x) = 0\},$$

而

$$\alpha(\mathrm{CC}(X)) = \alpha(\mathrm{USCC}(X)) \cap \mathrm{C}(\alpha X).$$

正如在文献 [8] 中一样, 因为 $X$ 是非离散的、非紧的, 故可以选取 $1 > \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots > 0$, 使得 $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, $\alpha X \setminus \mathrm{B}_d(\infty, \varepsilon_0)$ 是无限的, 而 $\mathrm{B}_d(\infty, \varepsilon_n) \setminus \mathrm{B}_d(\infty, \varepsilon_{n+1}) \neq \emptyset$. 设

$$A_n = \{f \in \mathrm{USC}(\alpha X) : f(x) = 0 \text{ 对所有 } x \in \mathrm{B}_d(\infty, \varepsilon_n) \text{ 都成立}\},$$

则 $(\downarrow\alpha(\mathrm{USCC}(X)), \downarrow\alpha(\mathrm{CC}(X)) \approx (A, B)$, 这里 $A = \bigcup \downarrow A_n$ 而 $B = A \cap \downarrow\mathrm{C}(\alpha X)$. 为完成证明, 只需验证

$$(\downarrow\mathrm{USC}(\alpha X), A, B) \approx (Q, \Sigma, c_0).$$

容易看出

$$(\downarrow A_n, \downarrow A_n \cap \downarrow\mathrm{C}(\alpha X)) \approx (\downarrow\mathrm{USC}(Y), \downarrow\mathrm{C}(Y)),$$

这里 $Y = \alpha X \setminus B_d(\infty, \varepsilon_n)$, 它是一个无限的紧可度量化空间. 由文献 [7, 命题 1], $(\downarrow\mathrm{USC}(Y)$, $\downarrow\mathrm{C}(Y))$ 是 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_{\sigma\delta})$-万有的, 故 $(\downarrow A_n, \downarrow A_n \cap \downarrow\mathrm{C}(\alpha X))$ 也是.

在文献 [8] 中, 我们证明 $(\downarrow A_n)_n$ 是 $\downarrow\mathrm{USC}(\alpha X)$ 中的 $Z$-集组成的塔, 并带有形变性质, 使得 $\downarrow A_n \approx Q$, $\downarrow A_n \in Z(\downarrow A_{n+1})$ 对任意 $n$ 成立. 类似引理 8 的讨论, 可以得到这个塔满足定理 3 中的条件 (c), 因而 $(\downarrow\mathrm{USC}(\alpha X), A, B)$ 满足定理 3 中条件 1 和 2. 故

$$(\downarrow\mathrm{USC}(\alpha X), A, B) \approx (Q, \Sigma, c_0).$$

## 参考文献


1 Illanes A, Nadler S B. Hyperspaces, Fundamental and Recent Advances. Pure and Applied Math, Vol 216. New York: Marcel Dekker Inc, 1999

2 van Mill J. Infinite-Dimensional Topology, Prerequisites and Introduction. North-Holland Math. Library, Vol 43. Amsterdam: Elsevier Sci Publ B V, 1989

3 杨忠强. 格值连续函数的下方图形超空间及其 Hilbert 方体紧化. 中国科学 A 辑: 数学, **35**(2): 216–230 (2005)

4 Yang Z. The hyperspace of the regions below of continuous maps is homeomorphic to $c_0$. *Topology Appl*, **153**: 2908–2921 (2006)

5 Yang Z, Fan L. The hyperspace of the regions below of continuous maps from the converging sequence. *Northeast Math J*, **22**(1): 45–54 (2006)

6 Yang Z, Wu N. The hyperspace of the regions below of continuous maps from $S \times S$ to $\mathbf{I}$. *Questions and Answers Gen Topology*, **26**: 29–39 (2008)

7 Yang Z, Zhou X. A pair of spaces of upper semi-continuous maps and continuous maps. *Topology Appl*, **154**: 1737–1747 (2007)

8 Zhang L, Yang Z. The regions below of compact-supported upper semicontinuous maps. *Houston J Math*, **34**(3): 781–793 (2008)

9 Sakai K, Uehara S. Topological structure of the space of lower semi-continuous functions. *Comment Math Univ Carolin*, **47**: 113–126 (2006)

10 Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, et al. A Compendium of Continuous Lattices. Berlin: Springer-Verlag, 1980

11 Kubiś W, Sakai K, Yaguchi M. Hyperspaces of separable Banach spaces with the Wijsman topology. *Topology Appl*, **148**: 7–32 (2005)

12 Dijkstra J J, Van Mill J, Mogilski J. The space of infinite-dimensional compacta and other topological copys of $(l_f^2)^w$. *Pacific J Math*, **152**: 255–273 (1992)

13 Toruńczyk H. On CE-images of the Hilbert cube and characterizations of $Q$-manifolds. *Fund Math*, **106**: 431–437 (1980)
14 Toruńczyk H. Characterizing Hilbert space topology. *Fund Math*, **111**: 247–262 (1981)
15 Curtis D W, Schori R M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes. *Fund Math*, **101**: 19–38 (1978)
16 Anderson R D. On sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds. Un-published
17 van Mill J. The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces North-Holland Math, Library, Vol 64. Amsterdam: Elsevier Sci Publ B V, 2001
18 Bestvina M, Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absoulte retracts. *Michigan Math J*, **33**: 291–313 (1986)