



广义相对论正能量定理

张晓

中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190

E-mail: xzhang@amss.ac.cn

收稿日期: 2016-11-11; 接受日期: 2017-03-23; 网络出版日期: 2017-05-10

国家自然科学基金 (批准号: 11571345) 资助项目

摘要 广义相对论自洽性要求孤立引力系统的质量密度为正时, 时空总能量也是正的, 称为正能量猜想. 正能量猜想在广义相对论中有着基本重要性, 并且, 正能量猜想若正确, 则也将保证系统总质量可以定义. 零宇宙常数时, 正能量猜想首先在 20 世纪 70 年代末由 Schoen 和 Yau 证明, 稍后又由 Witten 用不同方法证明. 本文给出 4 维物理时空正能量问题一个近期研究的综述, 包括零宇宙常数时的正能量定理、Kerr 约束问题、类光正能量定理和 Bondi 能量正性, 以及正和负宇宙常数正能量定理.

关键词 广义相对论 正能量定理 宇宙常数

MSC (2010) 主题分类 83C40, 58Z05

1 引言

广义相对论中, 时空是一个 4 维 Lorentz 流形 $(L^{3,1}, g)$, 并满足 Einstein 场方程

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta},$$

这里 $R_{\alpha\beta}$ 和 R 分别是 g 的 Ricci 曲率张量和数量曲率, Λ 是宇宙常数, $T_{\alpha\beta}$ 是物质的能量动量张量. 事实上, Λ 是真空时空 $T_{\alpha\beta} = 0$ 的 Ricci 曲率, 这时 Einstein 场方程简化成 $R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$.

具最大对称性的真空解如下:

(i) $\Lambda = 0$, Minkowski 时空 $\mathbb{R}^{3,1}$. 其对称群是由 4 个平移 Killing 向量 L_α 和 6 个旋转 Killing 向量 $U_{\alpha\beta}$ 生成 3+1 维 Poincaré 群.

(ii) $\Lambda > 0$, de Sitter 时空. 其是 $\mathbb{R}^{4,1}$ 中的超曲面

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = \frac{3}{\Lambda},$$

对称群是由 $\mathbb{R}^{4,1}$ 的 10 个旋转 Killing 向量 $U_{\alpha\beta}$ 生成的 4+1 维 Lorentz 群.

(iii) $\Lambda < 0$, 反 de Sitter 时空. 其是 $\mathbb{R}^{3,2}$ 中的超曲面

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - (X^4)^2 = \frac{3}{\Lambda},$$

英文引用格式: Zhang X. The positive energy theorem in general relativity (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 673–688, doi: 10.1360/N012016-00210

对称群是由 $\mathbb{R}^{3,2}$ 的 10 个旋转 Killing 向量 $U_{\alpha\beta}$ 生成的 3+2 维 Lorentz 群.

选择时空 $L^{3,1}$ 的标架场, 使得 e_0 为类时, e_i 为类空, 这时 T_{00} 是物质的局部能量密度, T_{0i} 是物质的局部动量密度. 广义相对论中, 物质运动不能超过光速, 这要求 $(T_{00}, T_{01}, T_{02}, T_{03})$ 作为时空中每点余切空间上的向量, 必须是非类空且指向时间未来

$$T_{00} \geq \sqrt{T_{01}^2 + T_{02}^2 + T_{03}^2}, \quad T_{00} \geq |T_{\alpha\beta}|.$$

物理上称其为主能量条件, 对应着 Newton 力学中质量密度非负的条件.

设 (M, g, h) 是一个初始数据集, 这里 M 是 $L^{3,1}$ 中的 3 维类空超曲面, g 是 M 的 Riemann 度量, h 是 2 维对称张量, 它是 M 的第二基本形式. 设 ∇ 和 R 分别是 M 的 Levi-Civita 联络和数量曲率. 超曲面的 Gauss 方程和 Codazzi 方程给出约束方程

$$T_{00} = \frac{1}{2}(R + (h_i^i)^2 - h_{ij}h^{ij}), \quad T_{0i} = \nabla^j h_{ij} - \nabla_i h_j^j.$$

对于渐近于这些最大对称解的时空, Lagrange 力学框架下著名的 Noether 定理表明, 最大对称时空的 Killing 场定义了时空包括总能量和总动量在内的守恒量 (等价地, 在时空 3+1 分解及 Hamilton 力学框架下定义的总能量和总动量等) [1-3]. 如果广义相对论是物理上合理的, 主能量条件应该得出时空总能量有最低状态, 即基态, 且基态由上述最大对称时空给出. 但是, 这一点在这些守恒量的导出过程并不能直接导出. 因此, 人们猜想这是正确的, 称之为正能量猜想. 正能量猜想为广义相对论提供了一个自洽性检验, 有着基本的重要性. 至于进一步回答基态的总能量是什么这个问题需要更深入的物理理论.

本文基于作者发表在 2015 年在北京召开的引力和宇宙学国际会议/第四届伽利略 - 徐光启会议论文集集中的英文论文 [4], 在翻译成中文时作了一些更新.

2 $\Lambda = 0$

本节回顾零宇宙常数时主要的总能量不等式.

2.1 正能量定理

当宇宙常数是零并且时空是渐近平坦时, 时间平移 L_0 、空间平移 L_i 、空间旋转 U_{ij} 和时空旋转 U_{i0} 分别给出总能量、总动量、总角动量和质心 10 个守恒量.

一个初始数据集 (M, g, h) 是渐近平坦的, 如果存在一个紧集 $K \subset M$ 使得 $M \setminus K$ 是有限集 M_c 的并, 这里每个 $M_c \cong \mathbb{R}^3 \setminus B_r$ 被称作 M 的一个“端”, B_r 是半径为 r 、中心在坐标原点的闭球. 在每个端, 设 $\{x^i\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的 Euclid 坐标, $g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}$ 且满足

$$a_{ij} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \partial_k a_{ij} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \partial_l \partial_k a_{ij} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad h_{ij} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \partial_k h_{ij} = O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

渐近平坦初始数据集 (M, g, h) 的总能量 E 和总动量 P_i 由 Arnowitt 等 [1, 2] 定义,

$$E = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) * dx^i, \quad P_k = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} (h_{ki} - g_{ki} \text{tr}_g(h)) * dx^i, \quad k = 1, 2, 3,$$

这里 S_∞ 是端无穷远处的球体. 进一步, 假设数量曲率 R 和 T_{0i} 在 M 上是可积的. 这使得总能量和总动量是几何量, 其值不依赖于渐近坐标系 $\{x^i\}$ 的选择 [5, 6].

广义相对论中, 当宇宙常数为零时 (E, P_1, P_2, P_3) 是 Minkowski 时空的向量, 该向量非类空且指向时间未来对应 Newton 力学的总质量非负. 在 Newton 力学中, 总质量是质量密度的体积分, 因而质量密度非负总导致总质量非负, 但广义相对论总能量并不是能量密度或其他非负物理量的体积分. M 的数量曲率有下述渐近公式:

$$R = \partial_j(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) + O\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

当 $h_{ij} \equiv 0$ 时, $\frac{R}{2} = T_{00}$ 是局部能量密度, 显然其体积分不是总能量 E , 因而无法直接得出总能量非负.

正能量猜想由 Schoen 和 Yau [7-9] 首先应用极小曲面和偏微分方程证明, 然后 Witten [10] 应用旋量和 Dirac 算子给出新的证明 (也可参见文献 [11]). Schoen 和 Yau 的证明包含有黑洞情形, 此时用 M 具地平线来描述, 在文献 [12] 中, Witten 的证明也被推广到黑洞情形. 一些高维情形的正能量定理在文献 [5, 13-15] 中被证明.

定理 1 (正能量定理) 如果 (M, g, h) 是渐近平坦的, 具有有限个地平线, 它们是 M 的内边界, 每个都是 S^2 拓扑, 并且其平均曲率 H 满足 $H \pm \text{tr}_g(h|_{S^2}) = 0$, 假设主能量条件成立, 则

(i) 对每个端, 有 $E \geq \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$.

(ii) 如果对某个端有 $E = 0$, 那么 M 有唯一的端, 并且 $L^{3,1}$ 沿着 M 是平坦的; 如果 $h = 0$, 那么 (M, g) 是 $\mathbb{R}^3$.

ADM (Arnowitt-Deser-Misner) 总能量和总动量由时空无穷远处的观测者测量到. 因为时空是渐近 Minkowski 的, 时空无穷远处的观测者等效于 Minkowski 时空的一个坐标系 $\{t, x^1, x^2, x^3\}$, 总能量是该坐标系中时间方向的守恒量, 总动量是该坐标系中空间方向的守恒量. 因而对于时空无穷远处的不同观测者来说, 测量到的总能量与总动量并不相同. 但是, $\sqrt{E^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2}$ 是 Lorentz 不变量, 所有观测者测量到的该值都相同, 这个不变量称为 ADM 总质量. 正能量定理保证根号下的量是非负的, 因而总质量是适定的.

在 Witten 的证明中, 当 $E = 0$ 时, 可以找到沿着 M 平行的 4 个线性无关的时空旋量, 再加上主能量条件, 可以证出时空曲率沿着 M 都是零. 一个有意义的问题是, 如果总质量为零, 即

$$E = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2},$$

时空曲率沿着 M 是否仍是零? 这时只有一个沿着 M 平行的时空旋量. 在本质上假设 M 的数量曲率衰减更快时, $R = O(\frac{1}{r^{3+\delta}})$, $\delta > 0$, 文献 [16, 17] 证明这是对的. 然而, 因为主项是梯度形式, 可积的数量曲率一般只有衰减 $R = O(\frac{1}{r^3})$, 这时问题仍未解决.

对于具有裸奇点的时空来说, 正能量定理不成立, 如 $m < 0$ 的 Schwarzschild 时空. 所以, $E > 0$ 可以称为 Schwarzschild 约束. 主能量条件为 Schwarzschild 约束提供了充分条件.

正能量猜想的证明不仅有着重要的物理意义, 在数学上对几何分析的发展也有着重要的影响, 是 Yau 和 Witten 获菲尔兹奖主要工作之一. 著名数学家 Atiyah 在 1990 年国际数学家大会上介绍 Witten 获奖工作时对正能量猜想的证明给予高度评价, 并称为 “leading in part to Yau’s Fields Medal at the Warsaw Congress”.

2.2 Kerr 约束

当 $m < |a|$ 时, Kerr 时空也有裸奇点. 所以对具有总能量 E 、总角动量 J 和总质量 m 的一般的渐近平坦时空来说, $E > |J|$, 或着对 $m \neq 0$, $E > |J/m|$ 可能阻碍出现裸奇点. 这样的不等式被 Schoen 称为 Kerr 约束.

1999 年, Zhang^[18] 对广义渐近平坦初始数据集 (M, g, p) 证明了正能量定理, 这里 p 是 M 上一般的 2 阶协变张量, 不必是对称的, 并且满足下列条件:

$$a \in C_{-\tau}^{2,\alpha}, \quad p \in C_{-\tau-1}^{0,\alpha}, \quad \text{tr}_g(p) \in W_{-\tau-1}^{1,\frac{q}{2}}, \quad \{d\theta, d^*\theta\} \in L_{\frac{q}{2}, -\tau-2},$$

这里 $\theta = (p_{ij} - p_{ji})e^i \wedge e^j$ 是 p 的相伴的 2 形式, $\frac{1}{2} < \tau \leq 1$.

当时空有一个带挠率的仿射联络时, 第二基本形式 p 是非对称的, 在这种情形下, 物质移动的同时也在旋转. 这个利用带挠率的联络研究时空的想法, 是由 Cartan^[19-22] 首次提出. Zhang^[18] 定义了如下广义总动量, 包含了移动和旋转的效应,

$$\bar{P}_k = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} (p_{ki} - g_{ki} \text{tr}_g(p)) * dx^i,$$

并证明了下面的定理.

定理 2 (广义正能量定理) 如果 (M, g, p) 是广义渐近平坦的, 具有有限多个广义地平线, 它们是 M 的内边界, 每个都是 S^2 拓扑, 其平均曲率 H 满足 $H \pm \text{tr}_g(p|_{S^2}) = 0$. 假设广义主能量条件成立

$$\frac{1}{2}(R + (\text{tr}_g(p))^2 - |p|^2) \geq \max\{|\omega|, |\omega + \chi|\}, \quad \omega_j = \nabla^i p_{ji} - \nabla_j \text{tr}_g(p), \quad \chi_j = 2\nabla^i (p_{ij} - p_{ji}),$$

在合适的意义下, 上式左边的项可以解释为 T_{00} , 右边的两项可以解释为 $|T_{0i}|$ 和 $|T_{i0}|$, 那么

- (i) 对每个端, $E \geq \sqrt{\bar{P}_1^2 + \bar{P}_2^2 + \bar{P}_3^2}$;
- (ii) 如果对某个端有 $E = 0$, 那么 M 有唯一的端, 并且

$$R_{ijkl} + p_{ik}p_{jl} - p_{il}p_{jk} = 0, \quad \nabla_i p_{jk} - \nabla_j p_{ik} = 0, \quad \nabla^i (p_{ij} - p_{ji}) = 0.$$

Newton 力学中, 如果 $\{x_0^1, x_0^2, x_0^3\}$ 是刚体 $\mathbf{V}$ 的质心, T_v 是系统的动量密度, 那么 $\mathbf{V}$ 的总角动量为

$$J_k = \int_{\mathbf{V}} \epsilon_{kuv} (x^u - x_0^u) T^v d\mathbf{V} = \int_{S_\infty} \epsilon_{kuv} (x^u - x_0^u) (h_i^v - \delta_{vi} \text{tr}(h)) * dx^i,$$

第二个等式当 $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ 和 $T_v = \partial_i h_v^i - \partial_v \text{tr}(h)$ 时成立. 通常总角动量是一个反对称张量 $J_{ij} = -J_{ji}$. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 沿着一个平面旋转等价于沿着一个垂直于平面的轴的移动 $J_k = \epsilon_k^{ij} J_{ij}$, 因此, 我们可以把它们定义为 3 维空间中的余向量.

1974 年, Regge 和 Teitelboim^[23] 把总角动量的定义推广到广义相对论中, 对渐近平坦初始数据集定义了总角动量

$$J_k(x_0) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \epsilon_{kuv} (x^u - x_0^u) \pi_i^v * dx^i, \quad \pi_i^v = h_i^v - g_i^v \text{tr}_g(h).$$

被积函数一般是 $O(\frac{1}{r})$ 阶, 为使其成为可积的 $O(\frac{1}{r^2})$ 阶, 需要在端上假设更强的 “Regge-Teitelboim” 条件

$$g(x) - g(-x) = O(r^{-3}), \quad \pi(x) + \pi(-x) = O(r^{-3}).$$

然而, 因为被积函数不是张量, 所以无法把局部密度与 Regge-Teitelboim 总角动量联系起来. 为了解决这个困难, Zhang^[18] 定义了迹为零和非对称的局部角动量密度

$$\tilde{h}_{ij}^z = \frac{1}{2} \epsilon_i^{uv} (\nabla_u \rho_z^2) (h_{vj} - g_{vj} \text{tr}_g(h)),$$

这里 ρ_z 是流形 M 上以 z 为起点的距离函数. 如果 $(M, g, \tilde{h}_{ij}^z)$ 是广义渐近平坦的, 则可以定义总角动量 (参见文献 [18])

$$J_k = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \tilde{h}_{ki}^z * dx^i.$$

如果 $\nabla \tilde{h}^z$ 是可积的, 则 J 也是一个几何量, 不依赖于坐标系 $\{x^i\}$ 的选择. 在 Kerr 时空中, $h_{ij} = O(\frac{1}{r^4})$, 所以总角动量是适定的, 并且计算得到 $J = (0, 0, ma)$ [24]. 通过选取 $p_{ij} = C\tilde{h}_{ij}^z$, $C = 1$ 或 $C = \frac{1}{m}$, Zhang [18] 证明了广义主能量条件下的 Kerr 约束.

广义主能量条件下 3 维初始数据集之所以能有 Kerr 约束, 根本原因在于 3 维空间中旋转等效于移动, 即初等物理中的右手螺旋法则, 而当弯曲时空具带挠率的仿射联络时, 其在每点处的描述局部移动的能量和动量密度同时包含着旋转的信息, 这符合 Cartan 引力理论的物理图像. 高维 Kerr 约束问题尽管没有物理意义, 但作为一个数学问题, 还是有趣的. 然而, 高维空间没有右手螺旋法则, 这时空间中旋转不再等效于移动, 角动量只能定义为 J_{ij} , 无法再定义为 J_k , 这时上述数学方法无法用以证明高维 Kerr 约束.

Huang 等 [25] 指出, 可以扰动任意真空渐近平坦初始数据集到一个新的真空渐近平坦初始数据集, 使其具有完全相同的总能量和任意大的总角动量. 由于真空初始数据集满足主能量条件, 这说明主能量条件并不能保证 Kerr 约束成立. 但是, 对定义在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$ 上的单连通、渐近平坦、极大、轴对称真空黑洞初始数据集 (M, g, h) ,

$$g = e^{2\alpha-2U}(d\rho^2 + dz^2) + e^{-2U}\rho^2(d\phi + \rho B d\rho + A dz)^2, \quad \text{tr}_g(h) = 0,$$

可以用其他的几何分析方法证明 Kerr 约束是成立的, 这里 (ρ, ϕ, z) 是柱坐标, 全部函数都与 ϕ 无关 (参见文献 [26–29]).

2.3 Bondi 能量动量

引力波的 Bondi-Sachs 度量是 Einstein 场方程类波的真空解, 并且有如下的渐近形式:

$$\begin{aligned} g_{BS} = & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 - 2dudr + 2ldud\theta + 2\bar{l}\sin\theta d\psi \\ & + r^2\left[\left(1 + \frac{2c}{r}\right)d\theta^2 + \frac{4d}{r}\sin\theta d\theta d\psi + \left(1 - \frac{2c}{r}\right)\sin^2\theta d\psi^2\right] + \text{低阶项}, \end{aligned}$$

这里 u 是延迟坐标 (u 的水平集是类光超曲面), $r = x^1$, θ 和 ψ 是极坐标, M 、 c 和 d 是定义在 $\mathbb{R} \times S^2$ 上关于 u 、 θ 和 ψ 的光滑函数并在 $\theta = 0, \pi$ 时满足正则性条件 $\int_0^{2\pi} c(u, \theta, \psi) d\psi = 0$, $l = c_{,\theta} + 2c \cot \theta + d_{,\psi} \csc \theta$, $\bar{l} = d_{,\theta} + 2d \cot \theta - c_{,\psi} \csc \theta$.

记 $n^0 = 1$, $n^1 = \sin \theta \cos \psi$, $n^2 = \sin \theta \sin \psi$, $n^3 = \cos \theta$. 在类光无穷远处, u_0 的水平集的 Bondi 能量动量定义为

$$m_\nu(u_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} M(u_0, \theta, \psi) n^\nu dS, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

著名的 Bondi 能量损耗公式说明

$$\frac{d}{du} m_0(u) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} (c_{,u})^2 + (d_{,u})^2 \leq 0.$$

设 $|m(u)| = \sqrt{m_1^2(u) + m_2^2(u) + m_3^2(u)}$. 如果 $|m(u)| \neq 0$, 则可以证明更一般的 Bondi 能量动量损耗公式^[30]:

$$\frac{d}{du}(m_0(u) - |m(u)|) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} [(c_{,u})^2 + (d_{,u})^2] \left(1 - \frac{m_i n^i}{|m|}\right) \leq 0.$$

这说明 Bondi 能量动量可以看成在 u_0 时刻因引力波引力辐射携带走能量动量后引力系统剩余的总能量动量.

物理上猜想孤立引力系统无法辐射出比初始能量更多的能量, 即 Bondi 能量是非负的. 关于该猜想的证明曾被断言可以使用 Schoen-Yau 和 Witten 的正能量猜想的证明方法给出 (参见文献 [31] 及其中的参考文献). 然而, 当数学上找到严格、完整的证明时, 发现需要假设一些额外的条件^[30].

设 $\mathcal{M}(u, \theta, \psi) = M(u, \theta, \psi) - \frac{1}{2}(l_\theta + l \cot \theta + \bar{l}_\psi \csc \theta)$. 文献 [30] 得出 $\mathcal{M}_{,u} = -c_{,u}^2 - d_{,u}^2$. 假设在 $[u_1, u_0]$ 上, $m_0(u) = |m(u)|$. 如果 $m_0(u) \neq 0$, 那么 Bondi 能量动量损耗公式说明 $m_i(u) = |m(u)|n^i$. 除非 $m_i = 0$, 否则这是不可能的, 因为 m_i 与 θ 和 ψ 无关, 但是 n^i 依赖于 θ 和 ψ . 因此, 在 $[u_1, u_0]$ 上, $m_0(u) = 0$. 应用 Bondi 能量损耗公式, 可以得到在 $[u_1, u_0]$ 上, $c_{,u} = d_{,u} = \mathcal{M}_{,u} = 0$. 因此,

- (i) 如果对某些常数 C , $\mathcal{M}(u_0, \theta, \psi) = C$, 那么在整个区间 $[u_1, u_0]$ 上, $\mathcal{M}(u, \theta, \psi) = C$;
- (ii) 如果 $c(u_0, \theta, \psi) = d(u_0, \theta, \psi) = 0$, 那么在整个区间 $[u_1, u_0]$ 上, $c(u, \theta, \psi) = d(u, \theta, \psi) = 0$.

下面两个关于 Bondi 能量动量正性的定理是由 Huang 等^[30] 证明的, 这里采用了更加精确的表述. 首先应用 Schoen-Yau 方法可以证明以下结论:

定理 3 (Bondi 能量的正性 (Schoen-Yau 方法)) 假设在真空 Bondi-Sachs 时空中存在 u_0 , 使得 $\mathcal{M}(u_0, \theta, \psi)$ 是常数, 那么

- (i) $m_0(u_0) \geq |m(u_0)|$, 并且 Bondi 能量动量损耗公式给出对所有 $u \leq u_0$, 有 $m_0(u) \geq |m(u)|$;
- (ii) 如果 $m_0(u_0) = |m(u_0)|$, 并且存在 $u_1 < u_0$ 使得 $m_0(u_1) = |m(u_1)|$, 那么 $\mathcal{M}$ 在 $[u_1, u_0]$ 上是常数, 因此时空在区域 $(u_1, u_0]$ 中是平坦的.

应用 Witten 方法证明正性需要渐近类光初始数据集的正能量定理. 在 Minkowski 时空 $\mathbb{R}^{3,1}$ 中, 光锥是 $t = r$, 类空超曲面 $t = \sqrt{1 + r^2}$ 在无穷远处趋向类光无穷远, 并且具有双曲度量 $\check{g}$ 和非平凡第二基本形式 $\check{h}$. 在极坐标下,

$$\check{g} = \check{h} = \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2).$$

记 $\check{e}_i$ 、 $\check{e}^i$ 和 $\check{\nabla}$ 分别表示标架、余标架和 Levi-Civita 联络. 如果在每个端满足

$$\{a_{ij}, \check{\nabla}_k a_{ij}, \check{\nabla}_l \check{\nabla}_k a_{ij}, b_{ij}, \check{\nabla}_k b_{ij}\} = O(r^{-\tau}), \quad \tau > \frac{3}{2},$$

这里 $a_{ij} = g(\check{e}_i, \check{e}_j) - \check{g}(\check{e}_i, \check{e}_j)$, $b_{ij} = h(\check{e}_i, \check{e}_j) - \check{h}(\check{e}_i, \check{e}_j)$, 那么初始数据集 (M, g, h) 称为渐近类光的. 设 R 、 ∇ 和 ρ_z 分别表示 g 的数量曲率、Levi-Civita 联络及关于 $z \in M$ 的距离函数. 进一步假设 $(R+6)\rho_z$ 和 $(\nabla^j h_{ij} - \nabla_i \text{tr}_g(h))\rho_z$ 是 $L^1(M)$ 的. 在这些条件下, 端 M_l 的渐近类光总能量动量定义为

$$E_\nu = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{E} n^\nu r \check{e}^2 \wedge \check{e}^3, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

这里 $\mathcal{E} = \check{\nabla}^j g_{1j} - \check{\nabla}_1 \text{tr}_{\check{g}}(g) + (a_{22} + a_{33}) + 2(b_{22} + b_{33})$. Zhang^[32] 证明了以下定理:

定理 4 (渐近类光无穷远正能量定理^[32]) 设 (M, g, h) 是一个 $L^{3,1}$ 时空中的渐近类光初始数据集. 假设 $L^{3,1}$ 满足主能量条件, 那么

- (i) 对每个端, $E_0 \geq \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}$;

(ii) 如果对某个端有 $E_0 = 0$, 那么 M 有唯一的端, 并且 $L^{3,1}$ 沿着 M 是平坦的.

这时保证渐近类光总质量 $\sqrt{E_0^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2}$ 是适定的. 为了应用该定理来证明 Bondi 能量的正性, Huang 等^[30] 使用类空超曲面

$$u = u_0 + \sqrt{1 + r^2} - r + \frac{c^2(u_0, \theta, \psi) + d^2(u_0, \theta, \psi)}{12r^3} + \frac{a_3(\theta, \psi)}{r^4} + o\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

来分割 Bondi-Sachs 度量并得到渐近类光初始数据集. 不幸的是, 这时类空超曲面的度量和第二基本形式与双曲度量相差一些首项为 $\frac{c(u_0)}{r}$ 和 $\frac{d(u_0)}{r}$ 的项. 这破坏了渐近类光无穷远正能量定理成立所需的条件. 所以需要假设 $c(u_0, \theta, \psi) = d(u_0, \theta, \psi) = 0$. 在这个条件下, 渐近类光总能量动量和 Bondi 能量动量相等,

$$E_\nu = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{E} n^\nu r \check{e}^2 \wedge \check{e}^3 = m_\nu(u_0).$$

这里的记号与文献 [30] 中的不完全相同, 这里的 E_ν 和 $\mathcal{E}$ 分别等于文献 [30] 中的 $E_\nu(\mathbb{X}) - P_\nu(\mathbb{X})$ 和 $\mathcal{E} - 2\mathcal{P}$. 在文献 [30] 中, 积分 $\mathcal{E} - \mathcal{P}$ 来得到 $E_\nu(\mathbb{X}) - P_\nu(\mathbb{X}) = \frac{5}{8}m_\nu(u_0)$ 是错误的, 需要修改如上, 这个计算错误并不影响结论. 这样渐近类光无穷远正能量定理给出下面的定理 (参见文献 [30]):

定理 5 (Bondi 能量的正性 (Witten 方法)) 假设在真空 Bondi-Sachs 时空中存在 u_0 , 使得 $c(u_0) = d(u_0) = 0$, 那么

(i) $m_0(u_0) \geq |m(u_0)|$, 且 Bondi 能量动量损耗公式给出, 对所有的 $u \leq u_0$, 有 $m_0(u) \geq |m(u)|$;

(ii) 如果 $m_0(u_0) = |m(u_0)|$, 并且存在 $u_1 < u_0$ 使得 $m_0(u_1) = |m(u_1)|$, 那么在 $[u_1, u_0]$ 上, $c(u) = d(u) = 0$, 因此时空在区域 $(u_1, u_0]$ 中是平坦的.

Bondi 能量正性成立时, Bondi 质量 $\sqrt{m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}$ 是适定的.

在类光无穷远或附近, 总角动量是否能被探测到是一个有意义的问题. 因为 Kerr 时空光滑的 Bondi-Sachs 坐标仍没有找到, 人们不清楚以光速运动的引力系统的旋转是什么意思? 另外, 2013 年, 中国科学技术大学本科刘冰萧在其本科学位论文¹⁾ 中构造了 Kerr 时空中的某些渐近类光初始数据集. 在 Kerr 时空中选取类空超曲面

$$t = r + 2m \ln r + \frac{c_1(\theta, \psi)}{r} + \frac{c_2(\theta, \psi)}{r^2} + \frac{c_3(\theta, \psi)}{r^3} + \dots$$

刘冰萧通过适当选择 $c_i(\theta, \psi)$, 算出度量和第二基本形式有下述的渐近形式:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad g_{12} = \frac{2m^2 a^2 \sin 2\theta}{3r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ g_{13} &= -\frac{2ma \sin \theta}{r} - \frac{4m^2 a \sin \theta}{r^2} - \frac{ma(8m^2 - 5a^2 \cos^2 \theta + a^2) \sin \theta}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ g_{22} &= 1 + O\left(\frac{1}{r^5}\right), \quad g_{23} = O\left(\frac{1}{r^5}\right), \quad g_{33} = 1 + \frac{2ma^2 \sin^2 \theta}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right), \\ h_{11} &= 1 - \frac{m^2 a^2 \sin^2 \theta}{r^2} - \frac{m(16m^2 a^2 - 3a^2) \sin^2 \theta + 2m}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ h_{12} &= \frac{8m^2 a^2 \sin 2\theta}{3r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad h_{23} = O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ h_{13} &= -\frac{2ma \sin \theta}{r} - \frac{4m^2 a \sin \theta}{r^2} \end{aligned}$$

¹⁾刘冰萧. Kerr 时空中渐近双曲、类空超曲面的渐近几何性质. 本科毕业论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2013.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{ma[4a^2(4m^2 + 5)\sin^2\theta + 16m^2 - 4a^2 + 3]\sin\theta}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\
 h_{22} &= 1 + \frac{2m^2a^2\sin^2\theta}{r^2} - \frac{m(4m^2a^2\sin^2\theta - 1)}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\
 h_{33} &= 1 + \frac{2m^2a^2\sin^2\theta}{r^2} + \frac{m[(8m^2 - 1)a^2\sin^2\theta + 1]}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right).
 \end{aligned}$$

记 $\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - g_{ij}$, $\tilde{\pi}_{ij} = \tilde{h}_{ij} - \text{tr}_g(\tilde{h})a \neq 0$, 这时有 $\tilde{\pi}_{12} = O(\frac{1}{r^3})$, $\tilde{\pi}_{13} = O(\frac{1}{r^3})$, 其他的 $\tilde{\pi}_{ij} = O(\frac{1}{r^4})$. 显然, g_{13} 、 $\tilde{\pi}_{12}$ 和 $\tilde{\pi}_{13}$ 衰减不够快达不到能够定义总角动量的要求, 形式上角动量的定义算出来的值是无穷大. 这暗示旋转在类光无穷远或附近无法被观测到.

3 $\Lambda > 0$

本节回顾正宇宙常数时的正能量定理和 Kerr 约束问题. 最近的天文观测说明宇宙在加速膨胀, 宇宙常数应该为正, 这样渐近 de Sitter 时空的正能量定理显得更为重要. 很多文献讨论了正宇宙常数时空的总能量动量定义, 如文献 [33–39], 但是只有很少的文献研究相关的正能量定理^[40–42], 并且在这些文献中, 或者正能量定理的表述和证明是不完整的, 或者证明在数学上是不对的. 文献 [43, 44] 给出了正能量定理完整、严格的表述和证明.

记 $\lambda = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$. de Sitter 时空能被具备 de Sitter 度量

$$\tilde{g}_{dS} = -d\bar{t}^2 + \lambda^2 \cosh^2 \frac{\bar{t}}{\lambda} (d\bar{r}^2 + \sin^2 \bar{r} (d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\psi}^2))$$

的整体坐标完全覆盖. 在整体坐标中, 每个时间片是一个有常曲率的 3 维球面, 无空间无穷远. 因此, 类似 ADM 的总能量动量公式是没有的. 原则上, 有两种方法将 de Sitter 时空划分成两部分, 这给出了两类不同的空间无穷远并在合适的条件下用以建立正能量定理.

沿着超曲面 $X^0 = X^4$ 分割出的一半 de Sitter 时空被具备下述 de Sitter 度量:

$$\tilde{g}_{dS} = -dt^2 + e^{\frac{2t}{\lambda}} g_\delta, \quad g_\delta = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

的 Euclid 坐标覆盖. 这时初始数据集是 $(\mathbb{R}^3, \check{g} = e^{\frac{2t}{\lambda}} g_\delta, \check{K} = \frac{1}{\lambda} \check{g})$. 沿着超曲面 $X^4 = -\lambda$ ($X^4 = \lambda$) 分割出的一半 de Sitter 时空 $X^4 < -\lambda$ ($X^4 > \lambda$) 被具备下述 de Sitter 度量:

$$\tilde{g}_{dS} = -dT^2 + \sinh^2 \frac{T}{\lambda} \check{g}_\mathcal{H}, \quad \check{g}_\mathcal{H} = dr^2 + \lambda^2 \sinh^2 \frac{r}{\lambda} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)$$

的双曲坐标覆盖. 这时初始数据集是 $(\mathbb{H}^3, \check{g} = \sinh^2 \frac{T}{\lambda} \check{g}_\mathcal{H}, \check{K} = \frac{1}{\lambda} \coth \frac{T}{\lambda} \check{g})$, 这里 $\check{g}_\mathcal{H}$ 是标准双曲度量.

为了在 Hamilton 力学框架下定义总能量动量, 需要定义渐近 de Sitter 初始数据集 (M, g, K) , 使其在端上 Euclid 坐标中满足下述条件:

$$g - \check{g} = e^{\frac{2t_0}{\lambda}} a = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad K - \check{K} = e^{\frac{t_0}{\lambda}} b = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

这里 t_0 是常数, 并且 a 和 b 的 1 阶、2 阶导数满足相应的衰减条件. 然后使用 10 个 $\mathbb{R}^{4,1}$ 的 Killing 向量场 $U_{\alpha\beta}$ 以及 a 和 b 来定义 ADM 类型的总能量动量. 但是, 这时没有相应的总能量动量不等式. 另外还有一种在初始数据集框架下的定义总能量和总动量等物理量的方法. 为了简单起见, 我们在 Euclid 坐标下解释一下主要的思想, 双曲坐标情形类似.

一般地, 渐近 de Sitter 时空中的初始数据集 (M, g, K) 应该具有 $g = e^{2u(x)}\bar{g}(x)$, $h = K - \frac{1}{\lambda}g = e^{u(x)}\bar{h}(x)$, $u(x) = \frac{t_0}{\lambda} + o(1)$, 并且 $(M, \bar{g}, \bar{h})$ 是渐近平坦的. 为了保持 g 和 h 的渐近平坦性, 必须有 $u(x) = \frac{t_0}{\lambda} + \frac{a_1}{r} + O(\frac{1}{r^2})$. 这时在端上可以写成 $g = e^{\frac{2t_0}{\lambda}}\bar{g}$, $h = e^{\frac{t_0}{\lambda}}\bar{h}$, 并且 $\bar{g}$ 和 $\bar{h}$ 的 ADM 总能量动量在相差一个常数因子下可以看成是 g 和 h 的总能量动量. 因为 $e^{\frac{t_0}{\lambda}}$ 是常数, 可以假设在整个 M 而不仅仅在端上有 $g = e^{\frac{2t_0}{\lambda}}\bar{g}$, $h = e^{\frac{t_0}{\lambda}}\bar{h}$.

称初始数据集 (M, g, K) 是 $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 的, 如果对某个常数 $\mathcal{P} > 0$, 有 $g = \mathcal{P}^2\bar{g}$, $h = \mathcal{P}\bar{h}$, 并且 $(M, \bar{g}, \bar{h})$ 是渐近平坦的. 设 $\bar{E}$ 、 $\bar{P}_k$ 和 $\bar{J}_k(z)$ 分别是 $(M, \bar{g}, \bar{h})$ 的端 M_l 的总能量、总线性动量和总角动量, $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 初始数据集 (M, g, K) 对应的量定义为

$$E = \mathcal{P}\bar{E}, \quad P_k = \mathcal{P}^2\bar{P}_k, \quad J_k(z) = \mathcal{P}^2\bar{J}_k(z).$$

相应的正能量定理由 Luo 等^[43] 在 2010 年证明.

定理 6 (正能量定理 (Euclid 坐标)) 设 (M, g, K) 是正宇宙常数 ($\Lambda > 0$) 时空 $L^{3,1}$ 中的一个 $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 初始数据集. 假设 $\text{tr}_g(K) \leq \sqrt{3\Lambda}$. 如果 $L^{3,1}$ 满足主能量条件, 那么

(i) 对每个端, $E \geq \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$;

(ii) 如果对某个端有 $E = 0$, 那么 $(M, g, K) \equiv (\mathbb{R}^3, \mathcal{P}^2 g_\delta, \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \mathcal{P}^2 g_\delta)$, 并且时空 $L^{3,1}$ 沿着 M 是 de Sitter 的.

这保证总质量 $\sqrt{E^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2}$ 是适定的. 上述公式计算出 Kerr-de Sitter 时空的总角动量 J , 其等于 $(0, 0, \frac{ma}{(1+\frac{a^2}{r^2})})$ ^[43]. 有趣的是, 如果将正宇宙常数换为负宇宙常数, $J_3(z)$ 与文献 [45] 中的 J_{23} 相同. 另外, 相应的 Kerr 约束也在文献 [43] 中被证明.

定理 7 设 (M, g, K) 是正宇宙常数 ($\Lambda > 0$) 时空 $L^{3,1}$ 中的一个无地平线 $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 初始数据集. 记 $p = C\tilde{h}^z$, 这里 $\tilde{h}^z$ 是由 $\bar{h}$ 定义的局部角动量密度, $C > 0$ 是常数. 假设存在点 $z \in M$, 使得 $(M, \bar{g}, p)$ 是广义渐近平坦的. 如果 $(M, \bar{g}, p)$ 满足广义主能量条件, 那么

(i) 对每个端, 有 $E \geq C|J(z)|_{\bar{g}_P}$;

(ii) 如果对某个端, $E = 0$, 那么 M 有唯一的端, 并且

$$R_{ijkl} + p_{ik}p_{jl} - p_{il}p_{jk} = 0, \quad \nabla_i p_{jk} - \nabla_j p_{ik} = 0, \quad \nabla^i(p_{ij} - p_{ji}) = 0.$$

在初始数据集框架下, $g - \check{g} = O(\frac{1}{r})$, $h = O(\frac{1}{r^2})$, 可得出 $K - \check{K} = O(\frac{1}{r})$. 这与 Hamilton 力学框架下的衰减条件 $K - \check{K} = O(r^{-2})$ 不一样. 虽然两种框架给出相同的总能量, 但总动量是完全不同的. 当用 h 在初始数据集框架下定义出有限的总动量时, 用 $K - \check{K}$ 在 Hamilton 力学框架下定义出的总动量一般是无限的, 上述的正能量定理推不出在 Hamilton 力学框架下总能量和总动量之间的不等式. 进一步, Witten 的方法在正宇宙常数时失效, 也无法用此证明 Hamilton 力学框架下定义出的总能量和总动量之间的不等式.

在双曲坐标中, 对常数 T , 记 $h = K - \frac{1}{\lambda} \coth \frac{T}{\lambda} g$, $\mathcal{H} = \sinh \frac{T}{\lambda}$. 设 $\check{e}_i$ 、 $\check{e}^i$ 和 $\check{\nabla}^{\mathcal{H}}$ 分别是双曲度量 $\check{g}_{\mathcal{H}}$ 的标架、余标架和 Levi-Civita 联络. 一个初始数据集 (M, g, K) 是 $\mathcal{H}$ -渐近 de Sitter 的, 如果 $g = \mathcal{H}^2\bar{g}$, $h = \mathcal{H}\bar{h}$, 并且在每个端上, $a_{ij} = \bar{g}(\check{e}_i, \check{e}_j) - \check{g}_{\mathcal{H}}(\check{e}_i, \check{e}_j)$, $\bar{h}_{ij} = \bar{h}(\check{e}_i, \check{e}_j)$, $\bar{g}$ 和 $\bar{h}$ 满足

$$\{a_{ij}, \nabla_k^{\mathcal{H}} a_{ij}, \nabla_l^{\mathcal{H}} \nabla_k^{\mathcal{H}} a_{ij}, \bar{h}_{ij}, \nabla_k^{\mathcal{H}} \bar{h}_{ij}\} = O(e^{-\frac{\tau}{\lambda}}), \quad \tau > \frac{3}{2}.$$

记 $\bar{R}$ 、 $\bar{\nabla}$ 和 ρ_z 分别是 $\bar{g}$ 的数量曲率、Levi-Civita 联络和关于 $z \in M$ 的距离函数, 假设 $(\bar{R} + \frac{6}{\lambda^2})e^{\frac{\rho_z}{\lambda}}$

和 $(\bar{\nabla}^j \bar{h}_{ij} - \bar{\nabla}_i \text{tr}_{\bar{g}}(\bar{h}))e^{\frac{\rho_2}{\lambda}}$ 是 $L^1(M)$ 的. 端 M_l 的总能量动量定义为

$$E_\nu^{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}^2}{16\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{E} n^\nu e^{\frac{\rho}{\lambda}} \bar{e}^2 \wedge \bar{e}^3, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

这里 $\mathcal{E} = \bar{\nabla}^{\mathcal{H},j} \bar{g}_{1j} - \bar{\nabla}_1^{\mathcal{H}} \text{tr}_{\bar{g}_{\mathcal{H}}}(\bar{g}) + \frac{1}{\lambda}(a_{22} + a_{33}) + 2(\bar{h}_{22} + \bar{h}_{33})$. 这种情形下的正能量定理也由 Luo 等^[43] 证明.

定理 8 (正能量定理 (双曲坐标)) 设 (M, g, K) 是正宇宙常数 $(\Lambda > 0)$ 时空 $L^{3,1}$ 中的一个 $\mathcal{H}$ -渐近 de Sitter 初始数据集. 假设 $\text{tr}_g(K) \sinh \frac{T}{\lambda} \leq \sqrt{3\Lambda} \cosh \frac{T}{\lambda}$. 如果 $L^{3,1}$ 满足主能量条件, 那么

- (i) 对每个端, $E_0^{\mathcal{H}} \geq \sqrt{(E^{\mathcal{H}})_1^2 + (E^{\mathcal{H}})_2^2 + (E^{\mathcal{H}})_3^2}$;
- (ii) 如果对某个端有 $E_0^{\mathcal{H}} = 0$, 那么

$$(M, g, K) \equiv \left(\mathbb{H}^3, \sinh^2 \frac{T}{\lambda} \check{g}_{\mathcal{H}}, \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \sinh \frac{T}{\lambda} \cosh \frac{T}{\lambda} \check{g}_{\mathcal{H}} \right),$$

并且时空 $L^{3,1}$ 沿着 M 是 de Sitter 的.

这保证总质量 $\sqrt{(E_0^{\mathcal{H}})^2 - (E^{\mathcal{H}})_1^2 - (E^{\mathcal{H}})_2^2 - (E^{\mathcal{H}})_3^2}$ 是适定的.

当 M 有有限个内边界时, 并且他们中的每个 $(\Sigma, \bar{g}, \bar{h})$ 具 S^2 拓扑、诱导度量 $\bar{g}$ 和第二基本形式 $\bar{h}$ 在 $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 初始数据集时满足

$$\pm \text{tr}_{\bar{g}}(\bar{h} |_{\Sigma}) = \text{tr}_{g_{\Sigma}}(K |_{\Sigma}) - 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}};$$

而在 $\mathcal{H}$ -渐近 de Sitter 初始数据集时满足

$$\pm \text{tr}_{\bar{g}}(\bar{h} |_{\Sigma}) = \text{tr}_{g_{\Sigma}}(K |_{\Sigma}) - 2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \tanh \frac{T}{2\lambda}.$$

这时上述两个正能量定理仍成立. 但是所有这些内边界与由 Σ 发出或接收到的光线定义的未来/过去地平线 $\pm \text{tr}_{\bar{g}}(\bar{h} |_{\Sigma}) = \text{tr}_{g_{\Sigma}}(K |_{\Sigma})$ 并不一致.

然而, 正如 Witten^[46] 所说, de Sitter 时空中没有正的守恒能量, Lorentz 生成子对应的 Killing 向量场在 de Sitter 时空的一些区域是类时的, 在其他一些区域是类空的 (参见文献 [33]). 这表明, 在没有额外平均曲率限制时, 正能量定理并不成立.

作为 Schoen-Yau 正能量定理的一个推论, $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) 上任意具有数量曲率 $R \geq 0$ 、并在一个紧集外与 Euclid 度量一致的度量一定是平坦的, 因为这时度量是渐近平坦的, 并且总能量为零. 1989 年, Min-Oo^[47] 将流形这样的刚性性质推广到双曲流形, 证明了 $\mathbb{H}^n$ 上任意具有数量曲率 $R \geq -n(n-1)$, 并在一个紧集外与双曲度量一致的度量一定是双曲的. 在整体坐标中, de Sitter 时空沿着超曲面 $X^3 = 0$ 分为两部分. 在这样一半的 de Sitter 时空中, 时间片是半球. 1995 年, Min-Oo 猜想半球 S_+^n ($n \geq 3$) 上任意具有数量曲率 $R \geq n(n-1)$ 、全测地边界 ∂S_+^n , 并且在 ∂S_+^n 上的诱导度量与 ∂S_+^n 上的标准度量一致的度量一定是 S_+^n 上的标准度量. 2010 年, Brendle 等^[48] 构造出 S_+^n ($n \geq 3$) 上数量曲率 $R \geq n(n-1)$ 在 ∂S_+^n 的一个邻域上与其标准度量一致, 但在半球内一些点严格有 $R > n(n-1)$ 的度量. 这给出了 Min-Oo 猜想的反例, 并且提供了另一个正宇宙常数正能量定理失效的例子.

2012 年, Liang 和 Zhang^[44] 构造出了 de Sitter 时空具负总能量的一些渐近 de Sitter 初始数据集, 这些初始数据集违背了两个正宇宙常数正能量定理中的平均曲率应满足的条件.

在 Euclid 坐标中, 对常数 t_0 考虑 de Sitter 时空中的图 $f(x) = t_0 + \varepsilon(1+r^2)^{-\frac{1}{2}}$. 对充分小的 ε , 其是 $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 初始数据集 ($\mathcal{P} = e^{\frac{t_0}{\lambda}}$), 并且

$$g_{ij} = e^{\frac{2f}{\lambda}} \delta_{ij} - \varepsilon^2 \frac{x_i x_j}{(1+r^2)^3}, \quad \text{tr}_g(K) = \frac{3}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \varepsilon^2 \frac{r^2}{(1+r^2)^3} e^{-\frac{2f}{\lambda}} + O(r^{-5}).$$

因此, 如果 $\varepsilon \neq 0$, 那么对充分大 r , 有 $\text{tr}_g(K) > \frac{3}{\lambda}$. 取 $\varepsilon < 0$, 这时总能量

$$E = \frac{\mathcal{P}}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (\partial_j \bar{g}_{ij} - \partial_i \bar{g}_{jj}) * dx^i = \frac{\varepsilon}{\lambda} e^{\frac{t_0}{\lambda}} < 0.$$

在双曲坐标中, 对常数 $T_0 > 0$ 考虑 de Sitter 时空中的图 $f(x) = T_0 + \varepsilon e^{-\frac{3r}{\lambda}}$. 对充分小的 ε , 其是 $\mathcal{H}$ -渐近 de Sitter 初始数据集 ($\mathcal{H} = \sinh \frac{T_0}{\lambda}$), 并且

$$g = \left(\sinh^2 \frac{f}{\lambda} - \frac{9\varepsilon^2}{\lambda^2} e^{\frac{-6r}{\lambda}} \right) dr^2 + \lambda^2 \sinh^2 \frac{f}{\lambda} \sinh^2 \frac{r}{\lambda} (d\theta^2 + \sin^2 \theta \psi^2),$$

$$\text{tr}_g(K) \sinh \frac{T_0}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} \cosh \frac{T_0}{\lambda} = -\frac{12\varepsilon}{\lambda^2 \sinh \frac{T_0}{\lambda}} e^{\frac{-5r}{\lambda}} + O(e^{\frac{-6r}{\lambda}}).$$

因此, 如果 $\varepsilon < 0$, 那么对充分大 r , 有 $\text{tr}_g(K) \sinh \frac{T_0}{\lambda} > \frac{3}{\lambda} \cosh \frac{T_0}{\lambda}$, 这时总能量

$$E_0^{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}^2}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \mathcal{E} n^0 e^{\frac{r}{\lambda}} \check{e}^2 \wedge \check{e}^3 = \varepsilon \tanh \frac{T_0}{2\lambda} \sinh^2 \frac{T_0}{\lambda} < 0.$$

在上述两个正能量定理中, 常数 $\Lambda = \frac{3}{\lambda^2}$ 可以任意选取. 根据 Planck 卫星的实验数据²⁾, 实际上是取 Hubble 常数 $H = \frac{1}{\lambda}$, 并且 $\tilde{g}_{dS}$ 是 $k=0$ 的 FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) 度量

$$\tilde{g}_{FLRW} = -dt^2 + e^{2Ht} g_\delta, \quad g_\delta = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

它是各向同性和齐性的, 这里 $3H^2 = \rho_m + \Lambda_c$ 并且 $\rho_m \cong 0.3156 \times 3H^2$ 是包含暗物质的物质密度, $\Lambda_c \cong 0.6844 \times 3H^2$ 是表述暗能量的宇宙常数的实际值. 考虑实验误差, 真实的宇宙具渐近 FLRW 度量并满足主能量条件, 时间片是 $\mathcal{P}$ -渐近 de Sitter 初始数据集. 关键的问题是, 能否从实验数据得知时间片的平均曲率不超过 $3H$? 因为平均曲率表示宇宙体积膨胀率, 是一个实验数据的平均值, 所以其值和 FLRW 时空中时间片的平均曲率相同, 等于 $3H$. 这样正能量定理表明真实宇宙的总能量总是不小于 FLRW 时空的总能量, 即 FLRW 时空是基态, 宇宙是稳定的.

$\mathcal{H}$ -渐近 de Sitter 初始数据集情形对应 $k < 0$ 的 FLRW 度量, 与目前的实验数据并不相容.

4 $\Lambda < 0$

本节回顾负宇宙常数时的正能量定理和总质量的定义. 这时时空是渐近反 de Sitter 的, 初始数据集具渐近双曲度量和渐近零第二基本形式. 有很多文献物理上讨论了总能量等守恒量的定义及其正性, 参见文献 [33, 45, 49] 及其中的参考文献 (似乎文献 [33] 中首次定义了总能量, 并且用类似于零宇宙常数时的超引力的想法^[50] 给出了正性的证明). 然而, 尽管应用 $3+2$ 维 Lorentz 群的 Killing 向量定义 10 个守恒量是众所周知的, 但是数学上严格、完整的定义直到文献 [45] 才被给出, 并且, 正如该文献指出, 在那之前, 相关的讨论都是形式上的. 文献 [51, 52] 首次在初始数据集的第二基本形式为

²⁾Planck 2015 results I. Overview of scientific results. ArXiv:1502.01582; XIII. Cosmological parameters. ArXiv:1502.01589.

零时, 数学上严格、完整地证明了主能量条件下非平凡初始数据集具正的总能量. 当第二基本形式非零时, 文献 [53, 54] 在特殊的质心坐标系下证明了一个总能量动量不等式. 当第二基本形式的迹是非正时, 文献 [32] 中证明的渐近类光无穷远正能量定理也给出此时一个总能量动量不等式^[55]. 最终, 文献 [56] 证明了一般情形的正能量定理并给出总质量的定义.

记 $\kappa = \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}$. 在坐标变换

$$X^0 = \frac{\cos(\kappa t)}{\kappa} \cosh(\kappa r), \quad X^i = \frac{\sinh(\kappa r)}{\kappa} n^i, \quad X^4 = \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \cosh(\kappa r)$$

下, 反 de Sitter 度量为

$$\tilde{g}_{AdS} = -\cosh^2(\kappa r) dt^2 + dr^2 + \frac{\sinh^2(\kappa r)}{\kappa^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2).$$

初始数据集为 $(\mathbb{H}^3, \check{g} = g_{\mathcal{H}}, \check{h} = 0)$. Killing 向量场 $U_{\alpha\beta}$ 限制在反 de Sitter 时空时依赖于时间 t .

设 $\check{e}_i$ 、 $\check{e}^i$ 和 $\check{\nabla}$ 分别是标架、余标架和双曲度量 $\check{g}$ 的 Levi-Civita 联络. 初始数据集 (M, g, h) 是渐近反 de Sitter 的, 如果 M 具有有限个端, 在每个端上,

$$\{a_{ij}, \check{\nabla}_k a_{ij}, \check{\nabla}_l \check{\nabla}_k a_{ij}, h_{ij}, \check{\nabla}_k h_{ij}\} = O(e^{-\kappa\tau r}), \quad \tau > \frac{3}{2},$$

这里 $a_{ij} = g(\check{e}_i, \check{e}_j) - \check{g}(\check{e}_i, \check{e}_j)$, $h_{ij} = h(\check{e}_i, \check{e}_j)$. 设 R 、 ∇ 和 ρ_z 分别是 g 的数量曲率、Levi-Civita 联络和关于 $z \in M$ 的距离函数, 进一步假设 $(R + 6\kappa^2)e^{\kappa\rho_z}$ 和 $(\nabla^j h_{ij} - \nabla_i \text{tr}_g(h))e^{\kappa\rho_z}$ 是 $L^1(M)$ 的.

1985 年, Henneaux 和 Teitelboim^[45] 定义了与 U_{ab} 相伴的渐近反 de Sitter 时空的总能量动量 J_{ab}^{HT} . 用本文的记号

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\kappa}{16\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{E} U_{40}^{(0)} \check{\omega}, \\ c_i(t) &= \frac{\kappa}{16\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{E} U_{i4}^{(0)} \check{\omega} + \frac{\kappa}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{P}_A U_{i4}^{(A)} \check{\omega}, \\ c'_i(t) &= \frac{\kappa}{16\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{E} U_{i0}^{(0)} \check{\omega} + \frac{\kappa}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{P}_A U_{i0}^{(A)} \check{\omega}, \\ J_i &= \frac{\kappa}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathcal{P}_A V_i^{(A)} \check{\omega}, \end{aligned}$$

这里 $\mathcal{E} = \check{\nabla}^j g_{1j} - \check{\nabla}_1 \text{tr}_{\check{g}}(g) + \kappa(a_{22} + a_{33})$, $\mathcal{P}_j = h_{j1} - g_{j1} \text{tr}_{\check{g}}(h)$, $\check{\omega} = \check{e}^2 \wedge \check{e}^3$, $U_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}^{(\gamma)} \check{e}_\gamma$, $V_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} U_{jk} = V_i^{(A)} \check{e}_A$, $A = 2, 3$.

记 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{c}' = (c'_1, c'_2, c'_3)$, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$, 并且

$$L = (|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}'|^2 + |\mathbf{J}|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad A = (|\mathbf{c} \times \mathbf{c}'|^2 + |\mathbf{c} \times \mathbf{J}|^2 + |\mathbf{c}' \times \mathbf{J}|^2)^{\frac{1}{4}}, \quad V = (\varepsilon_{ijl} c_i c'_j J_l)^{\frac{1}{3}}.$$

量 $2L$ 、 $2A^2$ 和 V^3 是由依赖于 t 的 $\mathbf{c}$ 、 $\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{J}$ 张成的平行六面体的统一量纲后的长度、曲面面积和体积. 显然有 $L^2 \geq 3V^2$, 并且 $|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}'|^2$ 不依赖于 t .

伪 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{3,2}$ 有 2 个类时 Killing 向量和 3 个类空 Killing 向量. 物理上, E 测量时空无穷远处平面 (X^0, X^4) 上的旋转, c_i 测量时空无穷远处平面 (X^i, X^4) 上的旋转, c'_i 测量时空无穷远处平面 (X^0, X^i) 上的旋转, J_i 测量时空无穷远处平面 (X^j, X^k) 上的旋转, 这里 $\{i, j, k\}$ 是 $\{1, 2, 3\}$ 的偶置换. 但是, 这些旋转效应都是在弯曲的反 de Sitter 时空上测量到的, 所以, 它们同时包含渐近反 de Sitter 时空移动和旋转效应. 这表明, 我们不能简单地认为它们是质心、总动量和总角动量. 移动和旋转的总效应由 $\mathbf{c}$ 、 $\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{J}$ 张成的平行六面体给出, 并可用测量边的长度、表面积和体积得到.

2001 年, Wang^[51] 对满足 $a_{12} = a_{13} = 0$ 且第二基本形式为零的渐近反 de Sitter 初始数据集, 数学上严格完整地证明了总能量非负. 这些 a 的额外的条件后来被 Chrúsciel 和 Herzlich^[52] 去掉. 在主能量条件下, 他们证明了在 $t = 0$ 时,

- (i) 对每个端, 有 $E_0 \geq \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$;
- (ii) 如果对某个端有 $E_0 = 0$, 那么 M 是双曲空间.

2006 年, Chrúsciel 等^[54] 证明了在 $t = 0$ 时, 如果 $E_0 > \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$, 那么可以找到 $SO(3, 1)$ 坐标变换, 使得

$$\sqrt{E_0^2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2} \rightarrow \bar{E}_0, \quad c_i, c'_i, J_1, J_2 \rightarrow 0, \quad c'_1 \rightarrow \bar{c}'_1, \quad c'_2 \rightarrow \bar{c}'_2, \quad J_3 \rightarrow \bar{J}_3.$$

在新的、我们称之为反 de Sitter 质心坐标系下, 他们在主能量条件下证明了:

- (i) 对每个端, $\bar{E}_0 \geq \sqrt{|\bar{\mathbf{c}}'|^2 + |\bar{\mathbf{J}}|^2 + 2|\bar{\mathbf{c}}' \times \bar{\mathbf{J}}|}$;
- (ii) 如果对某个端有 $\bar{E}_0 = 0$, 那么 M 有唯一的端, 并且 $L^{3,1}$ 沿着 M 是反 de Sitter 的.

事实上, 应用 Witten 的方法可以找到一个矩阵元包含 E_0 、 $c_i(t)$ 、 $c'_i(t)$ 和 J_i 的 4×4 半正定 Hermite 矩阵 $\mathbf{Q}$, 其迹、二阶子式的和、三阶子式的和及行列式分别为 (参见文献 [56])

$$\text{tr} \mathbf{Q} = 4E_0, \quad \mathbf{Q}^{(2)} = 6E_0^2 - 2L^2, \quad \mathbf{Q}^{(3)} = 4E_0(E_0^2 - L^2) + 8V^3, \quad \det \mathbf{Q} = (E_0^2 - L^2)^2 + 8E_0V^3 - 4A^4,$$

并且这些量都是非负的. 当第二基本形式非零时, 这 4 个一般坐标系下的不等式并不隐含将其变换到反 de Sitter 质心坐标系时所需的条件 $E_0 > \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. 例如, $\mathbf{Q}^{(2)} > 0$ 推出

$$E_0 > \sqrt{\frac{1}{3}(|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}'|^2 + |\mathbf{J}|^2)},$$

但推不出 $E_0 > \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. 另一方面, Chrúsciel-Maerten-Tod 的总能量动量不等式的形式不是 $SO(3, 1)$ 不变量, 当把它从反 de Sitter 质心坐标系变回到原来的一般坐标系时, 其形式会发生复杂变化而无法得出关于总能量的简单不等式. 这些问题需要我们在一般非反 de Sitter 质心坐标系下, 对任意 t 的 Henneaux-Teitelboim 总能量动量建立总能量不等式. 2015 年, Wang 等^[56] 证明了这样的正能量定理.

定理 9 (正能量定理) 如果 (M, g, h) 是具有负宇宙常数时空中的一个渐近反 de Sitter 初始数据集, 可能具有有限个地平线, 每一个都是 M 的内边界并具 S^2 拓扑, 其平均曲率 H 满足 $H \pm \text{tr}_g(h|_{S^2}) = 0$. 假设主能量条件成立, 那么

- (i) 对每个端, 有 $E_0 \geq \sqrt{L^2 - 2V^2 + 2(\max\{A^4 - L^2V^2, 0\})^{\frac{1}{2}}}$;
- (ii) 如果对某个端有 $E_0 = 0$, 那么 M 有唯一的端, 并且时空沿着 M 是反 de Sitter 的.

如果三个向量 $\mathbf{c}$ 、 $\mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{J}$ 线性相关, 即 $V = 0$, 那么上面的总能量不等式简化为 $E_0 \geq \sqrt{L^2 + 2A^2}$, 这在较弱的条件下给出了 Chrúsciel-Maerten-Tod 总能量不等式.

Wang 等^[56] 同时证明了 $\det \mathbf{Q}$ 是端上的下述相容坐标变换下的不变量:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t + o(e^{-\frac{5\kappa}{2}r}), \quad \hat{r} = r + o(e^{-\frac{3\kappa}{2}r}), \quad \hat{\theta}^A = \theta^A + o(e^{-\frac{5\kappa}{2}r}), \\ \check{e}_0(\hat{t}) &= \check{e}_0(t) + o(e^{-\frac{7\kappa}{2}r}), \quad \check{e}_1(\hat{r}) = \check{e}_1(r) + o(e^{-\frac{3\kappa}{2}r}), \quad \check{e}_B(\hat{\theta}^A) = \check{e}_B(\theta^A) + o(e^{-\frac{7\kappa}{2}r}). \end{aligned}$$

因此, $\det \mathbf{Q}$ 不依赖于渐近反 de Sitter 时空无穷远处 $3+1$ 维渐近坐标系的选取, 是几何不变量. 另一方面, Henneaux 和 Teitelboim 定义的 10 个守恒量在相容坐标变换下是协变的, 它们测量渐近反 de Sitter 时空在伪 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{3,2}$ 的 10 个子平面上的旋转效应. 因而, 这 10 个守恒量的数值在 $\mathbb{R}^{3,2}$ 的

$O(3, 2)$ 坐标变换下会改变, 也就是说, 时空无穷远处的不同观测者测量到的 10 个守恒量会不同. 但是 $\det \mathbf{Q} = (\frac{\kappa}{16\pi})^4 (I_1^2 + 2I_2)$, 这里

$$I_1 = \frac{1}{2} J_{ab}^{HT} J^{HT, ab}, \quad I_2 = \frac{1}{2} J_a^{HT, b} J_b^{HT, c} J_c^{HT, d} J_d^{HT, a} - \frac{1}{4} (J_a^{HT, b} J_b^{HT, a})^2$$

是两个 $O(3, 2)$ Casimir 不变量^[45]. 这说明时空无穷远处的不同观测者测量到的 $\det \mathbf{Q}$ 的数值都相同. 注意到 $\det \mathbf{Q}$ 的量纲与总能量的 4 次方相同, 故可以定义 $\sqrt[4]{\det \mathbf{Q}}$ 为渐近反 de Sitter 时空的总质量.

物理上, 总质量的定义应该是唯一的. 一个有意义的问题是, 有没有其他物理量可以用来定义总质量? 注意到 $\text{tr} \mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{Q}^{(2)}$ 和 $\mathbf{Q}^{(3)}$ 都不是 $O(3, 2)$ 不变的, 它们不能用来定义总质量. 另外, 主能量条件得出 $\det \mathbf{Q} \geq 0$, 因而, $I_1^2 + 2I_2 \geq 0$, 但是没有物理原因要求 I_1 和 I_2 具有确定的符号, 所有 $\sqrt{\pm I_1}$ 和 $\sqrt[4]{\pm I_2}$ 也不能用来定义总质量. 目前还看不出有其他的量可以用来定义总质量.

最后, 我们想指出渐近反 de Sitter 时空这些守恒量的物理性质, 或许会在基于反 de Sitter/共形场对偶观点的强耦合超导理论中有所应用, 关于后者请参阅最近的综述文献 [57] 及其中的参考文献.

5 后记

在最近的预印本 [58] 中, 该文献作者定义了由实数 A 及 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 所组成的 Killing 观测向量场

$$\mathcal{O} = \{A \cdot \mathbf{D} = -\mathbf{B} \times \mathbf{C}, A > \max\{|\mathbf{B}|, |\mathbf{C}|, |\mathbf{D}|\}, A^2 + |\mathbf{D}|^2 - |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{C}|^2 = 1\},$$

观测到的总能量动量的下确界 $\inf_{\mathcal{O}} (A \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}' + \mathbf{D} \cdot \mathbf{J})$, 其值为 $m = \frac{\kappa}{16\pi} \sqrt{\frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 + 2I_2}}{2}}$, 并被定义为渐近反 de Sitter 时空的质量 (为方便, 本文暂称其为 Killing 质量). Killing 质量的物理意义仍不清楚. 在零宇宙常数时, Killing 质量的思想曾被用来定义时空有限区域上的拟局部质量, 参见综述文献 [59]. 然而, 正如文献 [59] 第 8 页第 22 和 23 行指出那样, 对 Schwarzschild 时空中的空间中心球而言, 该拟局部质量的值随球半径单调递减趋向 ADM 总质量. 物理上期望满足主能量条件的时空中区域越大, 区域内的总质量越大, 所以, 该拟局部质量应该不是区域内的总质量, 否则在合理的物理近似下太阳的总质量算出来会大于整个太阳系的总质量. Zhang^[60] 曾用 $\sqrt[4]{\det \mathbf{Q}}$ 的思想定义了一个有限区域上的拟局部质量, 其值对 Schwarzschild 时空空间中心球而言是随球半径单调递增趋向 ADM 总质量, 作者认为符合物理上的期望.

参考文献

- 1 Arnowitt R, Deser S, Misner C. The dynamics of general relativity. In: Gravitation: An Introduction to Current Research. New York: Wiley, 1962, 227–264
- 2 Arnowitt R, Deser S, Misner C. The dynamics of general relativity. Gen Relativity Gravitation, 2008, 40: 1997–2027
- 3 Christodoulou D. Mathematical Problems of General Relativity, I. Zürich: European Mathematical Society, 2008
- 4 Zhang X. Recent progress on the positive energy theorem. Internat J Modern Phys A, 2015, 30: 1545018
- 5 Bartnik R. The mass of an asymptotically flat manifold. Comm Pure Appl Math, 1986, 36: 661–693
- 6 Chruściel P. Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view. In: Topological Properties and Global Structure of Space-Time (Erice, 1985). New York: Plenum Press, 1986, 49–59
- 7 Schoen R, Yau S T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. Comm Math Phys, 1979, 65: 45–76
- 8 Schoen R, Yau S T. The energy and the linear momentum of spacetimes in general relativity. Comm Math Phys, 1981, 79: 47–51

- 9 Schoen R, Yau S T. Proof of the positive mass theorem, II. *Comm Math Phys*, 1981, 79: 231–260
- 10 Witten E. A new proof of the positive energy theorem. *Comm Math Phys*, 1981, 80: 381–402
- 11 Parker T, Taubes C. On Witten's proof of the positive energy theorem. *Comm Math Phys*, 1982, 84: 223–238
- 12 Gibbons G, Hawking S, Horowitz G, et al. Positive mass theorems for black holes. *Comm Math Phys*, 1983, 88: 295–308
- 13 Ding L. Positive mass theorems for higher dimensional Lorentzian manifolds. *J Math Phys*, 2008, 49: 022504
- 14 Xu X L, Ding L. Positive mass theorems for high-dimensional spacetimes with black holes. *Sci China Math*, 2011, 54: 1389–1402
- 15 Eichmair M, Huang L H, Lee D, et al. The spacetime positive mass theorem in dimensions less than eight. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2016, 18: 83–121
- 16 Beig R, Chruściel P. Killing vectors in asymptotically flat space-times, I: Asymptotically translational Killing vectors and the rigid positive energy theorem. *J Math Phys*, 1996, 37: 1939–1961
- 17 Chruściel P, Maerten D. Killing vectors in asymptotically flat space-times, II: Asymptotically translational Killing vectors and the rigid positive energy theorem in higher dimensions. *J Math Phys*, 2006, 47: 022502
- 18 Zhang X. Angular momentum and positive mass theorem. *Comm Math Phys*, 1999, 206: 137–155
- 19 Cartan E. Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. *C R Math Acad Sci Paris*, 1922, 174: 593–595
- 20 Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Part I. *Ann Éc Norm*, 1923, 40: 325–412
- 21 Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Part II. *Ann Éc Norm*, 1924, 41: 1–25
- 22 Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Part III. *Ann Éc Norm*, 1925, 42: 17–88
- 23 Regge T, Teitelboim C. Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. *Ann Physics*, 1974, 88: 286–318
- 24 Zhang X. Remarks on the total angular momentum in general relativity. *Commun Theor Phys (Beijing)*, 2003, 39: 521–524
- 25 Huang L H, Schoen R, Wang M T. Specifying angular momentum and center of mass for vacuum initial data sets. *Comm Math Phys*, 2011, 306: 785–803
- 26 Dain S. Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *J Differential Geom*, 2008, 79: 3–67
- 27 Chruściel P. Mass and angular-momentum inequalities for axi-symmetric initial data sets, I: Positivity of mass. *Ann Physics*, 2008, 323: 2566–2590
- 28 Chruściel P, Li Y Y, Weinstein G. Mass and angular-momentum inequalities for axi-symmetric initial data sets, II: Angular momentum. *Ann Physics*, 2008, 323: 2591–2613
- 29 Schoen R, Zhou X. Convexity of reduced energy and mass angular momentum inequalities. *Ann Henri Poincaré*, 2013, 14: 1747–1773
- 30 Huang W L, Yau S T, Zhang X. Positivity of the Bondi mass in Bondi's radiating spacetimes. *Rend Lincei Mat Appl*, 2006, 17: 335–349
- 31 Chruściel P, Jezierski J, Leski S. The Trautman-Bondi mass of initial data sets. *Adv Theor Math Phys*, 2004, 8: 83–139
- 32 Zhang X. A definition of total energy-momentum and the positive mass theorem on asymptotically hyperbolic 3-manifolds, I. *Comm Math Phys*, 2004, 249: 529–548
- 33 Abbott L, Deser S. Stability of gravity with a cosmological constant. *Nuclear Phys B*, 1982, 195: 76–96
- 34 Balasubramanian V, de Boer J, Minic D. Mass, entropy, and holography in asymptotically de Sitter spaces. *Phys Rev D*, 2002, 65: 123508
- 35 Cai R, Myung Y, Zhang Y. Check of the mass bound conjecture in the de Sitter space. *Phys Rev D*, 2002, 65: 084019
- 36 Astefanesei D, Mann R, Radu E. Reissner-Nordstrom-de Sitter black hole, planar coordinates and dS/CFT. *J High Energy Phys*, 2004, 2004: 029
- 37 Ghezelbash A, Mann R. Entropy and mass bounds of Kerr-de Sitter spacetimes. *Phys Rev D*, 2005, 72: 064024
- 38 Ashtekar A, Bonga B, Kesavan A. Asymptotics with a positive cosmological constant, I: Basic framework. *Classical Quantum Gravity*, 2014, 32: 025004
- 39 Ashtekar A, Bonga B, Kesavan A. Asymptotics with a positive cosmological constant, II: Linear fields on de Sitter space-time. *Phys Rev D*, 2015, 92: 044011

- 40 Shiromizu T. Positivity of gravitational mass in asymptotically de Sitter space-times. *Phys Rev D*, 1994, 49: 5026
- 41 Shiromizu T, Ida D, Torii T. Gravitational energy, dS/CFT correspondence, and cosmic no-hair. *J High Energy Phys*, 2001, 2001: 010
- 42 Kastor D, Traschen J. A positive energy theorem for asymptotically de Sitter spacetimes. *Classical Quantum Gravity*, 2001, 19: 5901–5920
- 43 Luo M, Xie N, Zhang X. Positive mass theorems for asymptotically de Sitter spacetimes. *Nuclear Phys B*, 2010, 825: 98–118
- 44 Liang Z, Zhang X. Spacelike hypersurfaces with negative total energy in de Sitter spacetime. *J Math Phys*, 2012, 53: 022502
- 45 Henneaux M, Teitelboim C. Asymptotically anti-de Sitter spaces. *Comm Math Phys*, 1985, 98: 391–424
- 46 Witten E. Quantum gravity in de Sitter space. *ArXiv:hep-th/0106109*, 2001
- 47 Min-Oo M. Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds. *Math Ann*, 1989, 285: 527–539
- 48 Brendle S, Marques F, Neves A. Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature. *Invent Math*, 2011, 185: 175–197
- 49 Aros R, Contreras M, Olea R, et al. Conserved charges for gravity with locally AdS asymptotics. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 1647–1650
- 50 Deser S, Teitelboim C. Supergravity has positive energy. *Phys Rev Lett*, 1997, 39: 249
- 51 Wang X. Mass for asymptotically hyperbolic manifolds. *J Differential Geom*, 2001, 57: 273–299
- 52 Chruściel P, Herzlich M. The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds. *Pacific J Math*, 2003, 212: 231–264
- 53 Maerten D. Positive energy-momentum theorem for AdS-asymptotically hyperbolic manifolds. *Ann Henri Poincaré*, 2006, 7: 975–1011
- 54 Chruściel P, Maerten D, Tod P. Rigid upper bounds for the angular momentum and centre of mass of non-singular asymptotically anti-de Sitter space-times. *J High Energy Phys*, 2006, 11: 084
- 55 Xie N, Zhang X. Positive mass theorems for asymptotically AdS spacetimes with arbitrary cosmological constant. *Internat J Math*, 2008, 19: 285–302
- 56 Wang Y, Xie N, Zhang X. The positive energy theorem for asymptotically anti-de Sitter spacetimes. *Commun Contemp Math*, 2015, 17: 1550015
- 57 Cai R, Li L, Li L F, et al. Introduction to holographic superconductor models. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2015, 58: 1–46
- 58 Chen P N, Hung P K, Wang M T, et al. The rest mass of an asymptotically anti-de Sitter spacetime. *ArXiv:1510.00053*, 2016
- 59 Wang M T. Gravitational energy seen by quasilocal observers. *Classical Quantum Gravity*, 2011, 28: 114011
- 60 Zhang X. On a quasi-local mass. *Class Quantum Grav*, 2009, 26: 245018

The positive energy theorem in general relativity

ZHANG Xiao

Abstract The self-consistency of general relativity requires that the spacetime total energy must be positive for isolated gravitational systems with positive mass density. It is called the positive energy conjecture. It plays a fundamental role in general relativity, moreover, the total mass is well-defined if it holds true. In the case of zero cosmological constant, the positive energy conjecture was first proved by Schoen and Yau in the late 1970s, and soon later by Witten using different method. In this paper, we provide a review on its recent development for 4-dimensional physical spacetimes, which includes the positive energy theorem, Kerr constraint, the positive energy theorem near null infinity and the positivity of the Bondi energy, as well as the positive energy theorem for positive cosmological constant and for negative cosmological constant.

Keywords general relativity, positive energy theorem, cosmological constant

MSC(2010) 83C40, 58Z05

doi: 10.1360/N012016-00210