



黏弹性层合板壳蠕变屈曲的持久临界荷载

彭凡*, 傅衣铭, 刘一凡

湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082

* E-mail: peng_fan1989@yahoo.com.cn

收稿日期: 2007-01-08; 接受日期: 2007-07-08

湖南省自然科学基金(批准号: 05JJ3008)和国家自然科学基金(批准号: 10572049)资助项目

摘要 基于一阶剪切变形理论与经典屈曲理论, 着重分析黏弹性层合板和层合圆柱壳蠕变屈曲的瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载. 利用 Laplace 变换, 由压屈方程导出相空间的临界荷载, 根据 Laplace 逆变换的初、终值定理得到瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载, 论证了两种临界荷载的黏弹性解与准弹性解是等同的. 构造扰动模型对持久临界荷载的含义进行说明. 以碳纤维/环氧树脂基复合材料为例, 分析了层合板与层合圆柱壳所对应的两种临界荷载, 通过对横向剪切刚度以及面内柔度中黏弹性效应的考察, 揭示导致黏弹性层合板、层合圆柱壳蠕变失稳的因素.

关键词

黏弹性
层合板壳
蠕变屈曲
瞬时弹性临界荷载
持久临界荷载
横向剪切变形

由基体材料所引入的黏弹性会导致聚酯基复合材料层合板壳结构的延迟失稳, 其主要特征是存在临界时间为零的瞬时弹性临界荷载与临界时间趋于无穷的持久临界荷载. 一般可通过能表征遗传效应的 Boltzmann 积分型本构关系描述铺设单层的各向异性黏弹性力学特性, 与之相对应, 层合板壳结构的压屈控制方程与边界条件为积分-偏微分型. 严格意义上求解这类定解问题的方法, 称为黏弹性解法, 它计及了材料的记忆能力. 若将控制方程与边界条件中的遗传积分运算简化为乘积运算, 原黏弹性定解问题简化成模量随时间变化的弹性定解问题求解, 这种方法称为准弹性法. 在线性理论的基础上, 文献[1,2]采用黏弹性解法, 通过 Laplace 变换与逆变换得到板的延迟失稳曲线; 文献[3~6]采用准弹性解法, 研究了黏弹性板壳的蠕变屈曲问题. 然而, 两种解法所获得的结果的异同点还未见到明确的结论. 另一方面, 持久临界荷载被认为是安全荷载, 因为当荷载小于该临界值时, 结构不会发生蠕变失稳. 文献[7~16]将持久临界荷载解释为临界转变值, 若施加荷载高于该值, 则会出现结构静、动挠度的无界增长. 本文基于经典屈曲理论, 阐明两种分析途径的异同点; 同时, 与弹性失稳临界荷载的诠释相一致, 给出持久临界荷载的新的含义; 文章的最后, 分析瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载随几何参数变化的特征, 以揭示导致层合板、层合圆柱壳蠕变失稳的关键因素.

1 黏弹性结构蠕变屈曲的两种解法及其关系

在材料主坐标下, 单向纤维增强复合材料铺设层在恒温下的线黏弹性本构关系可写为

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E_{11} \otimes d\varepsilon_{11} + E_{12} \otimes d\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= E_{12} \otimes d\varepsilon_{11} + E_{22} \otimes d\varepsilon_{22}, \\ \tau_{12} &= E_{66} \otimes d\gamma_{12}, \\ \tau_{23} &= E_{44} \otimes d\gamma_{23}, \\ \tau_{13} &= E_{55} \otimes d\gamma_{13},\end{aligned}\quad (1)$$

式中“ $\otimes$ ”表示 Stieltjes 卷积, E_{ij} 为松弛模量, 可取为 Prony-Dirichlet 级数形式

$$E_{ij} = E_{ij0} + \sum_{m=1}^M E_{ijm} e^{-c_{ijm}t}, \quad (2)$$

由层合理论, 黏弹性层合板壳的物理关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [B_{ij}] \\ [B_{ij}] & [D_{ij}] \end{bmatrix} \otimes d \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_{xy})^T$ 为中面内力, $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_{xy})^T$ 为弯扭内力矩, $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = (\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)^T$ 为中面应变, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})^T$ 为中面曲率改变, $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$ 与 $[D_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 6$) 分别为面内刚度、耦合刚度与弯曲刚度. 横向剪力与剪应变的关系为

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \otimes d \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

文中剪切修正系数近似为 5/6.

首先, 以层合板为例分析黏弹性结构蠕变屈曲的黏弹性解法与准弹性解法的关系. 考虑 4 边简支的正交铺设层合矩形板, 其长度、宽度与厚度分别记为 a , b 和 h , 置 $oxyz$ 直角坐标系于板的中面上, 其 x 轴与 y 轴分别沿板的长度与宽度方向. 设板沿 x 方向受面内均布压缩荷载 p 作用, 其中面挠度为 w , 法线转角为 ϕ_x 和 ϕ_y . 基于一阶剪切变形理论, 层合板在小挠度条件下的平衡方程为

$$\begin{aligned}-A_{55} \otimes d(\phi_x + w_{,x}) + D_{11} \otimes d\phi_{x,xx} + D_{12} \otimes d\phi_{y,xy} + D_{66} \otimes d(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) &= 0, \\ -A_{44} \otimes d(\phi_y + w_{,y}) + D_{22} \otimes d\phi_{y,yy} + D_{12} \otimes d\phi_{x,xy} + D_{66} \otimes d(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) &= 0, \\ D_{11} \otimes d\phi_{x,xxx} + (D_{12} + 2D_{66}) \otimes d(\phi_{x,xyy} + \phi_{y,xyx}) + D_{22} \otimes d\phi_{y,yyy} - pH(t)w_{,xx} &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

式中 Heavside 函数 $H(t)$ 表示荷载 p 从 $t = 0$ 开始施加. 取满足边界条件的挠度和转角的试探函数为

$$\begin{aligned}w &= \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \phi_x &= \sum_m \sum_n \varphi_{mn}(t) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \phi_y &= \sum_m \sum_n \psi_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\quad (6)$$

将(6)式代入控制方程(5), 依准弹性法, 将卷积积分换成乘积运算, 得压屈荷载的准弹性解为

$$p_{cr} = \frac{V_{31}(V_{13}V_{22} - V_{23}V_{12}) + V_{32}(V_{11}V_{23} - V_{12}V_{13})}{(V_{11}V_{22} - V_{12}^2)(m\pi/a)^2}, \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} V_{11} &= A_{55} + (m\pi/a)^2 D_{11} + (n\pi/b)^2 D_{66}, \\ V_{12} &= mn\pi^2 (D_{12} + D_{66})/(ab), \\ V_{13} &= m\pi A_{55}/a, \quad V_{22} = A_{44} + (n\pi/b)^2 D_{22} + (m\pi/a)^2 D_{66}, \\ V_{23} &= n\pi A_{44}/b, \\ V_{31} &= (m\pi/a)^3 D_{11} + mn^2\pi^3 (D_{12} + 2D_{66})/(ab^2), \\ V_{32} &= (n\pi/b)^3 D_{22} + m^2n\pi^3 (D_{12} + 2D_{66})/(a^2b). \end{aligned} \quad (8)$$

由黏弹性解法, 将(6)式代入控制方程(5), 并进行Laplace变换, 由相空间中的齐次方程存在非零解的条件^[1-2], 导出相空间中的压屈荷载为

$$\bar{p}_{cr} = \frac{\tilde{V}_{31}(\tilde{V}_{13}\tilde{V}_{22} - \tilde{V}_{23}\tilde{V}_{12}) + \tilde{V}_{32}(\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{23} - \tilde{V}_{12}\tilde{V}_{13})}{(\tilde{V}_{11}\tilde{V}_{22} - \tilde{V}_{12}^2)(m\pi/a)^2}, \quad (9)$$

式中记号“ $\tilde{\cdot}$ ”表示Laplace变换; “ $\tilde{\cdot}$ ”表示Carson变换, $\tilde{V}_{ij}$ 是(8)式中各参量的Carson变换. 对(9)式作Laplace反演, 得物理空间中的压屈荷载与临界时间关系为^[1]

$$p_{cr}(t) = L^{-1}[\bar{p}_{cr}/s], \quad (10)$$

式中 s 是Laplace变换参数. 本文采用Bellman的数值反演算法^[17,18]求解(10)式.

考虑硼纤维/环氧树脂基复合材料, 铺设单层的模量为^[7]

$$\begin{aligned} E_{11} &= 2.002 \times 10^5 + 1.724 \times 10^3 e^{-0.02248 t}, \quad E_{22} = 2.215 \times 10^3 + 4.668 \times 10^3 e^{-0.02392 t}, \\ E_{12} &= 8.924 \times 10^2 + 1.816 \times 10^3 e^{-0.02271 t}, \quad E_{55} = 4.773 \times 10^2 + 1.068 \times 10^3 e^{-0.02614 t}, \\ E_{44} &= 3.67 \times 10^2 + 8.234 \times 10^2 e^{-0.02619 t}, \quad E_{66} = E_{55}, \end{aligned} \quad (11)$$

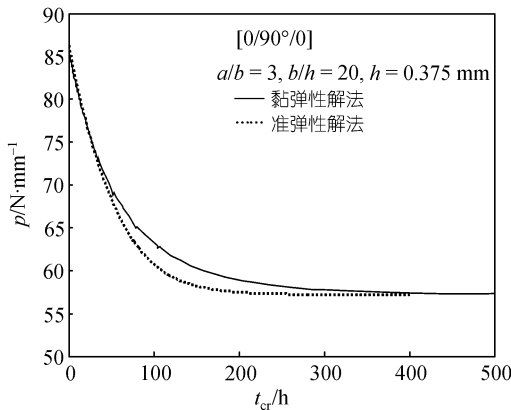


图1 压屈荷载与临界时间的关系

式中 t 为时间, 单位以小时(h)记; 模量单位为MPa. 取三层正交铺设[0/90°/0], 几何参数 $h = 0.375$ mm, $b/h = 20$, $a/b = 3$, 得出 $m = 2$, $n = 1$ 为瞬时弹性失稳的失稳半波数且其在延迟失稳分析中保持不变. 黏弹性解法和准弹性解法所得压屈荷载-临界时间曲线示于图1, 临界时间 t_{cr} 分别为零和无穷时所对应的压屈荷载分别称为瞬时弹性失稳临界荷载与持久临界荷载. 从图1中可见, 由黏弹性解与准弹性解给出的这两类临界荷载是相同的; 而在临界时间的中间段, 准弹性解法给出的结果小一些. 一般可通过瞬时

弹性失稳临界荷载与持久临界荷载的差值来表征延迟失稳的程度, 若两种临界荷载的差别较大, 表明蠕变失稳现象明显.

下面对基于黏弹性解法与准弹性解法所得的这两组临界荷载的等同性进行说明, 根据 Laplace 逆变换的终值与初值定理, 由(9)式, 得物理空间的瞬时弹性失稳临界荷载为

$$p_0 = \min_{m,n} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} [s(\bar{p}_{cr}/s)] \right\} \\ = \min_{m,n} \frac{\tilde{V}_{31}(\infty)[\tilde{V}_{13}(\infty)\tilde{V}_{22}(\infty) - \tilde{V}_{23}(\infty)\tilde{V}_{12}(\infty)] + \tilde{V}_{32}(\infty)[\tilde{V}_{11}(\infty)\tilde{V}_{23}(\infty) - \tilde{V}_{12}(\infty)\tilde{V}_{13}(\infty)]}{[\tilde{V}_{11}(\infty)\tilde{V}_{22}(\infty) - \tilde{V}_{12}^2(\infty)](m\pi/a)^2}, \quad (12)$$

持久临界荷载为

$$p_\infty = \min_{m,n} \left[\lim_{s \rightarrow 0} [s(\bar{p}_{cr}/s)] \right] \\ = \min_{m,n} \frac{\tilde{V}_{31}(0)[\tilde{V}_{13}(0)\tilde{V}_{22}(0) - \tilde{V}_{23}(0)\tilde{V}_{12}(0)] + \tilde{V}_{32}(0)[\tilde{V}_{11}(0)\tilde{V}_{23}(0) - \tilde{V}_{12}(0)\tilde{V}_{13}(0)]}{[\tilde{V}_{11}(0)\tilde{V}_{22}(0) - \tilde{V}_{12}^2(0)](m\pi/a)^2}. \quad (13)$$

另一方面, 由(8)式可知, $\tilde{V}_{ij}$ 是 $\tilde{D}_{ij}$ 与 $\tilde{A}_{ij}$ 的组合, 因此有

$$\tilde{V}_{kl}(0) = \tilde{V}_{kl}[\tilde{D}_{ij}(0), \tilde{A}_{ij}(0)], \quad (k, l = 1, 2, 3), \\ \tilde{V}_{kl}(\infty) = \tilde{V}_{kl}[\tilde{D}_{ij}(\infty), \tilde{A}_{ij}(\infty)], \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (14)$$

根据层合理论, 各刚度为时间的函数, 在(2)式的基础上, 可表示成如下一般形式:

$$D_{ij} = D_{ij0} + \sum_{m=1}^M D_{ijm} e^{-c_{ijm}t}, \quad (i, j = 1, 2, 6), \\ A_{ij} = A_{ij0} + \sum_{m=1}^M A_{ijm} e^{-c_{ijm}t}, \quad (i, j = 4, 5), \quad (15)$$

上式的 Carson 变换为

$$\tilde{D}_{ij}(s) = D_{ij0} + \sum_{m=1}^M \frac{sD_{ijm}}{s + c_{ijm}}, \quad (i, j = 1, 2, 6), \\ \tilde{A}_{ij}(s) = A_{ij0} + \sum_{m=1}^M \frac{sA_{ijm}}{s + c_{ijm}}, \quad (i, j = 4, 5). \quad (16)$$

故有

$$\tilde{D}_{ij}(\infty) = D_{ij0} + \sum_{m=1}^M D_{ijm} = D_{ij}(0), \quad \tilde{D}_{ij}(0) = D_{ij0} = D_{ij}(\infty), \quad (i, j = 1, 2, 6), \\ \tilde{A}_{ij}(\infty) = A_{ij0} + \sum_{m=1}^M A_{ijm} = A_{ij}(0), \quad \tilde{A}_{ij}(0) = A_{ij0} = A_{ij}(\infty), \quad (i, j = 4, 5). \quad (17)$$

将上式代入(12)和(13)式, 并注意到(15)式, 可知: 将材料的瞬时弹性模量与持久模量代入弹性失稳临界荷载计算公式将分别得到黏弹性层合板的瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载. 进一

步比较(7), (12)和(13)式可知, 在小挠度前提下, 准弹性法可得到与黏弹性解法相同的持久临界荷载. 显然, 这一结论可推广到一般情形.

2 持久临界荷载含义的分析

考虑到小挠度下完善弹性梁柱失稳的这样一种机制: 对无初挠度的柱施加横向扰动, 若轴向压荷载小于弹性临界荷载, 无论该横向扰动维持多长时间, 一旦扰动撤去, 柱将会恢复原来的平直状态. 基于上述思路, 本文提出下面的扰动模型, 以给出黏弹性结构持久临界荷载的含义. 仍以四边简支的正交铺设层合板为例进行讨论, 假设板受面内压荷载作用的同时, 被施加一横向扰动荷载, 且将该横向扰动荷载记为 $f(x, y, t)$, 板的平衡方程为

$$\begin{aligned} -A_{55} \otimes d(\phi_x + w_{,x}) + D_{11} \otimes d\phi_{x,xx} + D_{12} \otimes d\phi_{y,xy} + D_{66} \otimes d(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) &= 0, \\ -A_{44} \otimes d(\phi_y + w_{,y}) + D_{22} \otimes d\phi_{y,yy} + D_{12} \otimes d\phi_{x,xy} + D_{66} \otimes d(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) &= 0, \\ D_{11} \otimes d\phi_{x,xxx} + (D_{12} + 2D_{66}) \otimes d(\phi_{x,xyy} + \phi_{y,xyx}) + D_{22} \otimes d\phi_{y,yyy} - \mu P_\infty H(t) w_{,xx} &= f(x, y, t), \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\mu = p/p_\infty$, 为面内压缩荷载与板的持久临界荷载之比. 为分析简单起见, 文中设横向扰动荷载的分布与板的瞬时弹性失稳波形相同, 即

$$f(x, y, t) = \begin{cases} f_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), & (0 \leq t \leq t_c), \\ 0, & (t > t_c), \end{cases} \quad (19)$$

式中 f_0 为任意常数, t_c 为横向扰动维持时间. $t > t_c$, $f = 0$, 表示横向扰动荷载被撤去. 将(6)式代入(18)式, 并将 $(\varphi_{mn}, \psi_{mn}, q_{mn})$ 中的下标略去, 得到

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{12} & V_{22} & V_{23} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} \end{bmatrix} \otimes d \begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0 \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

式中 $V_{33} = (m\pi/a)^2 p H(t)$, 其余各 V_{ij} 与(8)式所示相同. 本文采用Taylor的卷积积分数值方法 [19,20]

求解(20)式.

取与图1算例相同的铺设条件和几何参数, $f_0 = 0.035 \text{ N/mm}^2$, 设横向扰动维持时间 $t_c = \infty$, 即横向扰动总是保持而不撤去, 挠度-时间关系示于图2, 其中纵坐标为最大无量纲挠度, 即以最大挠度除以板厚. 从图2中可见, 当 $\mu < 1$, 挠度有界且趋于一稳定值; 当 $\mu = 1$, 挠度随时间直线增长; 当 $\mu > 1$, 挠度随时间无界增长, 这些结果与文献[7,8]所述相同. 设面内压荷载参数 $\mu < 1$, 针对不同横向扰动维持时间 t_c , 挠度随时间变化的关系示于图3, 可知, 当

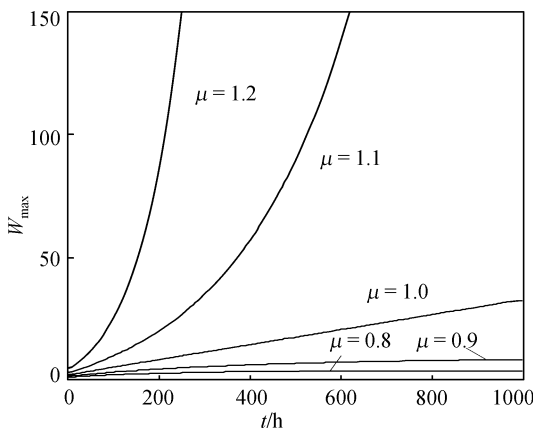
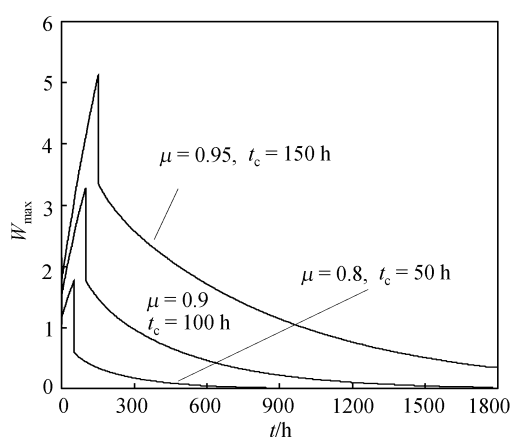
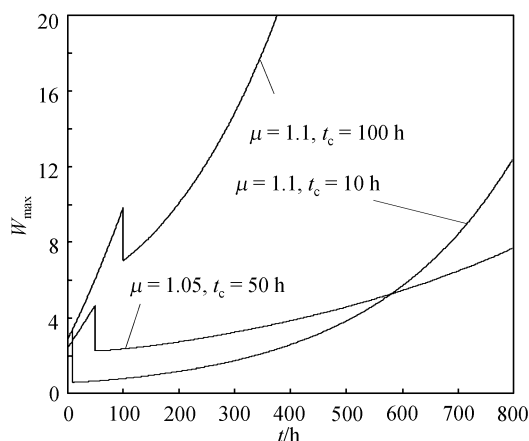


图2 $t_c = \infty$ 时挠度与时间的关系

横向扰动消失后, 挠度将逐渐恢复至零. 取荷载参数 $\mu > 1$, 针对不同横向扰动维持时间 t_c , 结果示于图 4, 可见, 此时只要存在横向扰动, 挠度都会趋于无界, 这一结果与横向扰动维持时间的长短无关. 注意到 μ 为面内压荷载与持久临界荷载之比, 由此, 本文得到了持久临界荷载的另外一种含义: 当板所受的压缩荷载小于持久临界荷载时, 若给板施加横向扰动且将该扰动维持任意一段时间后撤去, 板的挠度将回复到零. 可见, 黏弹性结构的持久临界荷载与弹性结构临界荷载的含义是统一的.

图 3 $\mu < 1$ 时挠度与时间的关系图 4 $\mu > 1$ 时挠度与时间的关系

3 黏弹性层合板壳蠕变屈曲的影响因素

本节通过对瞬时弹性临界荷载 p_0 与持久临界荷载 p_∞ 的分析, 讨论层合板与层合圆柱壳延迟失稳的引发机制. 两类临界荷载分别依薄板或薄壳假设的经典理论(CT)和一阶剪切变形理论(FSDT)得出. 考虑 4 边简支的对称正交铺设层合板, 图 5 给出了其瞬时弹性临界荷载和持久临界荷载随宽厚比 b/h 的变化特征, 可见, 基于薄板理论得到的两种临界荷载 p_0 和 p_∞ (曲线 1 和 2) 几乎相同; b/h 比增大, p_0 和 p_∞ 两者趋近相同, 与之相反, b/h 越小, 分别由薄板理论以及一阶剪切变形理论得到的两组 p_0 (曲线 1 和 3) 与两组 p_∞ (曲线 2 和 4) 之间差别越显著, 且基于一阶剪切变形理论得出的 p_0 与 p_∞ 之间相差也增大. 这些结果是由横向剪切变形效应所致, 薄板理论未计及这种效应, 故曲线 1 和 2 基本接近. b/h 比

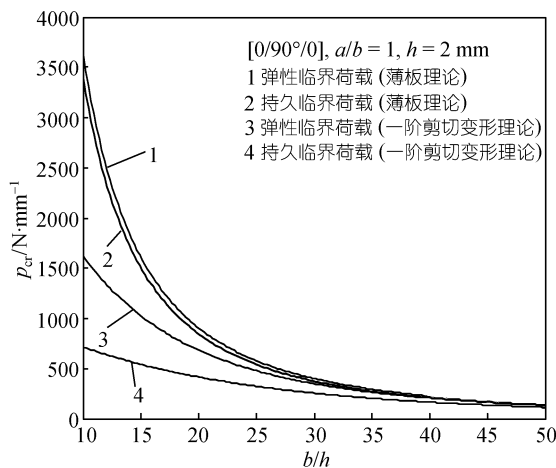


图 5 层合板临界荷载与宽厚比的关系

较大时, 横向剪切变形效应很小, 所有临界荷载趋于一致, 对较小的宽厚比, 横向剪切变形效应明显, 两种临界荷载差值变大. 因此, 对具有高的纵横模量比值 E_{11}/E_{22} 的复合材料(如(11)式), 引起层合板延迟失稳的主要因素是横向剪切变形的黏弹性效应.

下面分析正交铺设层合圆柱壳, 设其两端简支; 中面半径、轴向长度和厚度分别为 R , L 和 h , 中曲面上直角坐标轴 x 沿轴向, y 沿环向. 圆柱壳两端沿轴向受均布压荷载 p 作用, 引入力函数 $F(x, y, t)$, 层合圆柱壳的 Donnell 型平衡方程为

$$\begin{aligned} -A_{55} \otimes d(\phi_x + w_{,x}) + D_{11} \otimes d\phi_{x,xx} + D_{12} \otimes d\phi_{y,xy} + D_{66} \otimes d(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) &= 0, \\ -A_{44} \otimes d(\phi_y + w_{,y}) + D_{22} \otimes d\phi_{y,yy} + D_{12} \otimes d\phi_{x,xy} + D_{66} \otimes d(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) &= 0, \\ D_{11} \otimes d\phi_{x,xxx} + (D_{12} + 2D_{66}) \otimes d(\phi_{x,xyy} + \phi_{y,xyx}) + D_{22} \otimes d\phi_{y,yyy} - F_{,xx}/R - pH(t)w_{,xx} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

变形协调方程为

$$a_{11} \otimes dF_{,yyy} + (2a_{12} + a_{66}) \otimes dF_{,xyy} + a_{22} \otimes dF_{,xxx} = w_{,xx}/R, \quad (22)$$

式中 $a_{ij}(t)$ 为面内柔度, 不计材料老化, 且在温度、湿度等条件不变时, 有

$$[a_{ij}] \otimes d[A_j] = H(t)I, \quad (23)$$

其中 I 为三阶单位阵. 取满足两端简支边界条件的挠度、转角和应力函数分别为

$$\begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \quad \phi_x = \sum_m \sum_n \phi_{mn}(t) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \\ \phi_y &= \sum_m \sum_n \psi_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \quad F = \sum_m \sum_n f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \end{aligned} \quad (24)$$

将上式代入平衡方程与变形协调方程, 得到准弹性解, 即

$$p_{cr} = \frac{V_{31}(V_{13}V_{22} - V_{23}V_{12}) + V_{32}(V_{11}V_{23} - V_{12}V_{13})}{(V_{11}V_{22} - V_{12}^2)(m\pi/L)^2} + V_{34}, \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} V_{11} &= A_{55} + (m\pi/L)^2 D_{11} + (n/R)^2 D_{66}, \\ V_{12} &= mn\pi(D_{12} + D_{66})/(LR), \\ V_{13} &= A_{55}m\pi/L, \quad V_{22} = A_{44} + (n/R)^2 D_{22} + (m\pi/L)^2 D_{66}, \\ V_{23} &= A_{44}n/R, \\ V_{31} &= (m\pi/L)^3 D_{11} + mn^2\pi(D_{12} + 2D_{66})/(LR^2), \\ V_{32} &= (n/R)^3 D_{22} + (D_{12} + 2D_{66})(m\pi/L)^2(n/R), \\ V_{34} &= (m\pi/L)^2 \{R^2[(n/R)^4 a_{11} + (2a_{12} + a_{66})(m\pi/L)^2(n/R)^2 + (m\pi/L)^4 a_{22}]\}^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

根据第 2 节所得结论, 将模量的瞬时弹性值与持久值代入(25)式, 可得到层合圆柱壳的瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载. 以下分析中考虑了两种情形, 一是取 $L/R=2$, $h=2$ mm, 3 层铺设, 另一情形是 $L/R=1$, $h=2$ mm, 5 层铺设. 临界荷载与圆柱壳径厚比的关系示于图 6 和 7, 可以看出, 随着圆柱壳的径厚比增加, 横向剪切变形效应减小, 基于薄壳理论与一阶剪切变形理论得到的两组瞬时弹性临界荷载接近相同, 且两组持久临界荷载也呈现相同的变化

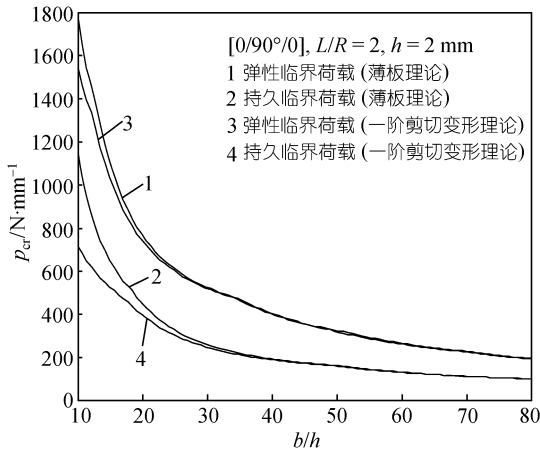


图 6 层合圆柱壳临界荷载与径厚比的关系
3 层正交铺设

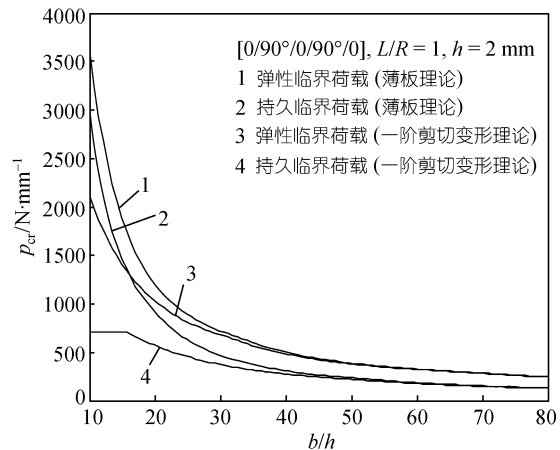


图 7 层合圆柱壳临界荷载与径厚比的关系
5 层正交铺设

特征. 两图都表明, 即使径厚比很大, 瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载的差别也是很显著的, 这一特点有别于板的结果. 注意到(25)式的右边由两项组成, 第一项与(7)式右边形式相同, 和弯曲刚度及横向剪切变形刚度有关, 第二项与面内柔度相关联. 很明显, 横向剪切变形效应体现在第一项中, 第二项体现了与时间相关的面内变形, 后者是两类临界荷载在大径厚比时存在明显差别的主要因素. 由上述讨论可知, 对具有高的纵横模量比的复合材料, 面内变形的黏弹性是导致层合圆柱壳延迟失稳的主要因素, 厚壳情形下, 横向剪切变形的黏弹性加剧了这种与时相关的失稳现象.

4 总结

在经典屈曲理论的基础上, 本文着重分析与讨论了黏弹性复合材料层合板壳结构的蠕变失稳的瞬时弹性临界荷载与持久临界荷载. 所得结果如下: (i) 两种临界荷载的黏弹性解与准弹性解是等同的; (ii) 构造了横向扰动模型, 与弹性稳定临界荷载的解释相统一, 给出了黏弹性层合板持久临界荷载的力学含义; (iii) 当基体模量远小于纤维模量时, 层合板的蠕变屈曲是由于横向剪切变形的黏弹性引入的. 而对层合圆柱壳, 面内变形与横向剪切变形的黏弹性是导致其延迟失稳的主要因素.

参考文献

- 1 杨挺青, 张晓春, 刚芹果. 黏弹性薄板蠕变屈曲的载荷-时间特性研究. 力学学报, 2000, 32(3): 319—325
- 2 彭凡, 傅依铭. 黏弹性结构蠕变屈曲特性的分析. 力学学报, 2003, 35(3): 353—356
- 3 Wilson D W, Vinson J R. Viscoelastic analysis of laminated plate buckling. AIAA J, 1984, 22(7-12): 982—988
- 4 Vinogradov A M, Glockner P G. Buckling of spherical viscoelastic shells. Proc ASCE, 1980, 106(ST1): 59—67
- 5 Kim C G, Hong C S. Viscoelastic sandwich plates with cross-ply faces. J Struct Eng, 1988, 114(2): 150—164
- 6 Huang N N. Viscoelastic buckling and postbuckling of circular cylindrical laminated shells in hygrothermal envi-

- ronment. J Marin Sci Technol, 1994, 2(1): 9—16
- 7 孙远翔, 马和中, 高镇同, 等. 正交铺设层合板的蠕变屈曲分析. 固体力学学报, 1998, 19(4): 347—354
- 8 Minahen T M, Knauss W G. Creep buckling of viscoelastic structures. Int J Solids Struct, 1993, 30(8): 1075—1092[DOI]
- 9 王颖坚, 王震鸣. 正交铺设层合圆柱曲板的蠕变失稳. 应用数学和力学, 1993, 14(4): 295—300
- 10 Ishakov V I. Stability analysis of viscoelastic thin shallow hyperbolic paraboloid shells. Int J Solids Struct, 1999, 36(28): 4209—4223[DOI]
- 11 Akbarov S D, Yahnioğlu N, Kutug Z. On the three-dimensional stability loss problem of the viscoelastic composite plate. Int J Eng Sci, 2001, 39(13): 1443—1457[DOI]
- 12 Szyszkowski W, Glockner P G. The stability of viscoelastic perfect columns: A dynamic approach. Int J Solids Struct, 1985, 21(6): 545—559[DOI]
- 13 Chandiramani N K, Librescu L, Aboudi J. The theory of orthotropic viscoelastic shear deformable composite flat panels and their dynamic stability. Int J Solids Struct, 1989, 25(5): 465—482[DOI]
- 14 彭凡, 傅依铭. 黏弹性圆柱壳在轴向恒压下的动力稳定性. 工程力学, 2002, 19(6): 49—53
- 15 丁睿, 朱正佑, 程昌钧. 黏弹性柱壳的若干动力学性质. 应用数学与力学, 1999, 20(3): 221—228
- 16 程昌钧, 范晓军. 黏弹性环形板的临界荷载及动力稳定性. 力学学报, 2001, 33(3): 365—375
- 17 Bellman R, Kalaba R E, Lockett J. Numerical inversion of the Laplace transform. New York: Elsevier Publishing Co. 1966
- 18 Swanson S R. Approximate Laplace transform inversion in dynamic viscoelasticity. J Appl Mech ASME, 1980, 47(6): 769—774
- 19 Taylor R L, Pister K S, Goudreau G L. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. Int J Numer Method Engin, 1970, 2(1): 45—51[DOI]
- 20 Bradshaw R D, Brinson L C. Mechanical response of linear viscoelastic composite laminates incorporating non-isothermal physical aging effects. Comp Sci Technol, 1999, 59(9): 1411—1427[DOI]