

具有较少非循环子群共轭类的有限群

孟伟^{①*}, 李世荣^②

① 云南民族大学数学与计算机科学学院, 昆明 650031;

② 广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004

E-mail: mlwhappyhappy@163.com, shirong@gxu.edu.cn

收稿日期: 2014-05-07; 接受日期: 2014-07-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11361075, 11361076, 11171243 和 11201385) 资助项目

摘要 设 G 是有限群, 用 $\delta(G)$ 表示群 G 的非循环子群的共轭类数, $\pi(G)$ 表示整除 $|G|$ 的素因子的集合. 本文主要研究满足条件 $\delta(G) \leq |\pi(G)| + 1$ 的有限群, 得到这类群可解, 并给出它们的同构分类. 进一步证明, $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ 的有限非可解群必同构于 A_5 或 $SL(2, 5)$.

关键词 非循环子群 共轭类 同构分类

MSC (2010) 主题分类 20D10, 20D15

1 引言

本文仅考虑有限群. 设 G 是群, $\delta(G)$ 表示群 G 的非循环子群的共轭类数, $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子的集合. 显然, $\delta(G) = 1$ 等价于 G 是极小非循环群 (每个真子群皆循环的非循环群). 1903 年, Miller 和 Moreno^[1] 给出了 $\delta(G) = 1$ 时有限群的同构分类. 2007 年, Li 和 Zhao^[2] 给出了 $\delta(G) = 2$ 时有限群的同构分类, 进一步, 他们证明了, $\delta(G) \leq 4$ 的有限群可解; $\delta(G) = 5$ 的非可解群只有 A_5 和 $SL(2, 5)$. 文献 [2] 还用 $\delta(G)$ 刻画了可解群的 Fitting 高和导列长. 2013 年, Meng 等人^[3] 给出了 $\delta(G) = 3$ 时有限群的同构分类.

由 5 次交错群 A_5 的子群结构可知, $\delta(A_5) = |\pi(A_5)| + 2 = 5$. 受此结果的启发, 本文主要研究 $\delta(G) \leq |\pi(G)| + 1$ 的有限群. 为了叙述的方便, 我们引入如下定义:

定义 1.1 设 G 是一个有限群, 若 $\delta(G) \leq |\pi(G)| + 1$, 则称 G 是一个 $\delta\pi$ -群.

本文将证明所有的 $\delta\pi$ -群可解 (见定理 3.1), 并给出 $\delta\pi$ -群的同构分类 (见定理 3.2-3.4), 进一步得到满足 $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ 的有限非可解群必同构于 A_5 和 $SL(2, 5)$ (见定理 4.1).

本文用 $A : B$ 表示正规子群 A 被子群 B 的可裂扩张, 即 A 与 B 的半直积. 其他未说明的符号和术语都是标准的^[4-7].

2 预备引理

引理 2.1^[5] 设有限群 G 的所有 Sylow 子群皆为循环群. 若 G 交换, 则 G 为循环群; 而若 G 非交换, 则 G 为由下列定义确定的亚循环群:

$$G = \langle a, b \mid a^m = b^n = 1, a^b = a^r \rangle, \quad r^n \equiv 1 \pmod{m}, \quad 1 \leq r < m, \quad (n(r-1), m) = 1, \quad |G| = mn.$$

英文引用格式: Meng W, Li S R. Finite groups with few conjugacy classes of non-cyclic subgroups (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 939-944, doi: 10.1360/012014-41

引理 2.2^[1] 设 G 是有限群, 则 $\delta(G) = 1$ 当且仅当 G 有下列 3 种互不同构的类型:

- (1) $G \cong Z_p \times Z_p$, p 是素数;
- (2) $G \cong Q_8$, 8 阶四元数群;
- (3) $G \cong \langle a, b : a^p = b^{q^m} = 1, b^{-1}ab = a^r \rangle$, $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, $r^q \equiv 1 \pmod{p}$, p 和 q 为互异素数.

引理 2.3^[2] 设 G 是有限群, 则 $\delta(G) = 2$ 当且仅当 G 有下列 9 种互不同构的类型:

- (1) G 同构于 (p^2, p) -型交换 p -群, p 是素数;
- (2) G 同构于 p^3 阶方次数为 p^2 的非交换 p -群, p 是奇素数;
- (3) $G \cong Z_p \times Z_p \times Z_q$, p 和 q 为互异素数;
- (4) $G \cong Q_8 \times Z_p$, p 是奇素数;
- (5) $G \cong \langle a, b : a^{p^2} = b^{q^m} = 1, b^{-1}ab = a^r \rangle$, $r \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, $r^q \equiv 1 \pmod{p^2}$, p 和 q 为互异素数;
- (6) $G \cong H \times Z_r$, 其中 $H = \langle a, b : a^p = b^{q^m} = 1, b^{-1}ab = a^t \rangle$, $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, $t^q \equiv 1 \pmod{p}$, p , q 和 r 为互异素数;
- (7) $G \cong Z_p^2 : Z_q$, $[Z_p^2, Z_q] = Z_p^2$, p 和 q 为互异素数且 $q \nmid (p-1)$;
- (8) $G \cong Q_8 : Z_3$, $[Q_8, Z_3] = Q_8$;
- (9) $G \cong \langle a, b : a^p = b^{q^m} = 1, b^{-1}ab = a^r \rangle$, $r^{q^2} \equiv 1 \pmod{p}$, $r^q \not\equiv 1 \pmod{p}$, $m \geq 2$, p 和 q 为互异素数.

引理 2.4^[3] 设 G 是有限群, 则 $\delta(G) = 3$ 当且仅当 G 有下列 14 种互不同构的类型:

- (1) G 同构于 (p^3, p) -型交换 p -群, p 是素数;
- (2) $G \cong \langle a, b : a^{p^3} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{1+p^2} \rangle$;
- (3) $G \cong \langle a, b : a^8 = 1, b^2 = a^4, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$;
- (4) $G \cong \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$;
- (5) $G \cong Z_p^2 \times Z_{q^2}$, p 和 q 为互异素数;
- (6) $G \cong Q_8 \times Z_{p^2}$, p 是奇素数;
- (7) $G \cong \langle a, b : a^{p^3} = b^{q^m} = 1, b^{-1}ab = a^t \rangle$, $t \not\equiv 1 \pmod{p^3}$, $t^q \equiv 1 \pmod{p^3}$, p 和 q 为互异素数;
- (8) $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^{q^m} = c^r = 1, b^{-1}ab = a^t, b^{-1}cb = c^s, [a, c] = 1 \rangle$, $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, $t^q \equiv 1 \pmod{p}$, $s \not\equiv 1 \pmod{p}$, $s^q \equiv 1 \pmod{p}$, p 和 q 为互异素数;
- (9) $G \cong H \times Z_{r^2}$, 其中 $H = \langle a, b : a^p = b^{q^m} = 1, b^{-1}ab = a^t \rangle$, $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, $t^q \equiv 1 \pmod{p^2}$, p , q 和 r 为互异素数;
- (10) $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^p = c^q = 1, [a, b] = 1, [b, c] = 1, c^{-1}ac = a^t \rangle$, $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, $t^q \equiv 1 \pmod{p}$, $q \mid (p-1)$, p 和 q 为互异素数;
- (11) $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^q = c^r = 1, b^{-1}ab = a^t, c^{-1}ac = c^s, [b, c] = 1 \rangle$, $t \not\equiv 1 \pmod{p}$, $s \not\equiv 1 \pmod{p}$, p , q 和 r 为互异素数;
- (12) $G \cong Z_p^2 : Z_{q^2}$, p 和 q 为互异素数且 $q \nmid (p-1)$;
- (13) $G \cong Q_8 : Z_9$;
- (14) $G \cong \langle a, b : a^p = b^{q^n} = 1, b^{-1}ab = a^t \rangle$, $t^{q^2} \not\equiv 1 \pmod{p}$, $t^{q^3} \equiv 1 \pmod{p}$, p 和 q 为互异素数.

引理 2.5^[2] 设有限群 G 的 Sylow 子群皆循环, H 和 K 是 G 的子群, 则 H 与 K 共轭的充要条件是 $|H| = |K|$.

根据 A_5 和 $SL(2, 5)$ 的子群结构, 可得到如下引理:

引理 2.6 若 $G \cong A_5$ 或 $SL(2, 5)$, 则 $\delta(G) = |\pi(G)| + 2 = 5$.

引理 2.7 设 G 是一个非循环的可解群且 $|\pi(G)| \geq 2$. 则下述结论成立:

(1) 若 G 所有的 Sylow 子群皆循环, 则 $\delta(G) \geq 2^{|\pi(G)|-2}$;

(2) 若 G 有一个非循环的 Sylow 子群, 则 $\delta(G) \geq 2^{|\pi(G)|-1}$.

证明 这里仅证明结论 (1), 结论 (2) 的证明过程与之类似.

设 $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ($n \geq 2$), $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 因为 G 是可解群, 所以, G 有 Sylow 系. 不失一般性, 设集合 $\mathbb{S} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 是 G 的 Sylow 系. 任取 $\mathbb{S}$ 中的两个不同元素 P_i 和 P_j ($i \neq j$), 则有 $P_i P_j = P_j P_i$. 因此, 任取 $\{1, \dots, n\}$ 一个子集 $\{i_1, \dots, i_k\}$, $P_{i_1} \cdots P_{i_k}$ 是 G 的 Hall-子群 [5, 第 332 页].

若 $n = 2$. 由于 G 非循环, 则有 $\delta(G) \geq 1 = 2^{|\pi(G)|-2}$, 此时, 结论 (1) 成立.

若 $n \geq 3$. 考虑 G 所有形如 $P_i P_j$ ($i \neq j$) 的子群. 若这些子群皆循环, 则 $P_i P_j = P_i \times P_j$. 所以有 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ 是交换群. 根据引理 2.1 知, G 是循环群, 矛盾. 因此, 至少存在一个形如 $P_i P_j$ 子群非循环. 不失一般性, 假设 $H = P_1 P_2$ 非循环. 令 $\Omega = \{H P_{i_1} \cdots P_{i_k} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{3, \dots, n\}\}$. 由于 Ω 中的每个群皆包含 H , 因此, 它中的每个群皆为非循环群. 显然, Ω 中群的阶互不相同, 从而彼此互不共轭. 由于 $\{3, \dots, n\}$ 有 2^{n-2} 个子集, 所以, $\delta(G) \geq 2^{|\pi(G)|-2}$. 完成结论 (1) 的证明. $\square$

3 $\delta\pi$ -群

根据引理 2.2-2.4 知, $\delta(G) \leq 3$ 的有限群已被完全分类, 因此, 仅需考虑 $|\pi(G)| \geq 3$ 的 $\delta\pi$ -群. 首先证明 $\delta\pi$ -群可解.

定理 3.1 如果 G 是一个 $\delta\pi$ -群, 那么, G 必是可解群.

证明 假设 G 是非可解群, 则 G 的幂零剩余 $G^{\mathcal{N}} \neq 1$. 设 $\eta(G) = \{r \mid r \in \pi(G), G \text{ 是 } r\text{-幂零}\}$. 若 $\eta(G) \neq \emptyset$, 令 $U(r)$ 为 G 的正规 r -补子群, 则 $U = \bigcap_{r \in \eta(G)} U(r)$ 是 G 的正规 Hall $\eta(G)'$ -子群 (若 $\eta(G) = \emptyset$, 则 $U = G$). 由 Schur-Zassenhaus 定理知, U 有一个补子群 W , 满足 W 是 G 的一个幂零 Hall-子群且 $\pi(W) = \eta(G)$. 从而有

$$G = U : W, \quad G^{\mathcal{N}} \leq U, \quad |\pi(G)| = |\pi(U)| + |\pi(W)|.$$

设 $\pi(U) = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, P_i 是 U 的 Sylow p_i -子群, 其中 $i = 1, 2, \dots, m$. 因为 G 非可解, 所以, U 也非可解. 根据 Feit-Thompson 奇数阶群可解定理 [8] 知, U 为偶数阶群. 记 $p_1 = 2$, $T = P_1$ 是 U 的 Sylow 2-子群. 接下来的证明分为 4 步.

第 1 步 T 非循环.

假设 T 循环, 因为 2 是最小素因子, 所以, $N_G(T) = C_G(T)$. 由 Burnside 定理 [7, 定理 7.50] 知, U 是 2-幂零群, 从而 U 可解, 矛盾.

第 2 步 设 M 是 U 的一个极大子群且 $T \leq M$, 则 $\delta(M) \geq 2$.

由第 1 步知, $D_0 = T$ 为 M 的一个非循环子群. 如果 $\delta(T) > 1$, 则取 D_1 为 T 的一个非循环的真子群. 显然, $|D_0| > |D_1|$, 所以, $\delta(M) \geq 2$. 假设 $\delta(T) = 1$. 根据引理 2.2 知, $T \cong Z_2 \times Z_2$ 或 Q_8 . 因为 U 非可解, 所以, T 不可能是 U 的一个极大子群, 即 $T < M$. 取 $D_1 = M$, 显然, D_1 非循环且有 $|D_1| \neq |D_0|$, 所以也有 $\delta(M) \geq 2$.

第 3 步 $N_U(P_i)$ ($i = 2, \dots, m$) 非循环.

假设 $N_U(P_i)$ 循环, 则有 $N_U(P_i) = C_U(P_i)$. 由 Burnside 定理知, U 是 p_i -幂零群, 进而知 G 也是一个 p_i -幂零群, 矛盾.

第 4 步 $\delta(G) \geq |\pi(G)| + 2$.

由于 $N_U(P_i)$ 非循环, 因此, U 中存在一个 p_i' -元素 x_i 使得 $P_i\langle x_i \rangle$ 非循环. 此时, 令 $D_i = P_i\langle x_i \rangle$. 这样就得到 U 至少有 $|\pi(U)| + 2$ 个非循环子群:

$$D_0, D_1, D_2, \dots, D_{|\pi(U)|}, D_{|\pi(U)|+1} = U.$$

显然, $|D_i| \neq |D_j|$ ($i \neq j$).

若 $\eta(G) = \emptyset$, 则 $G = U$. 此时, $\delta(G) \geq |\pi(G)| + 2$. 如果 $\eta(G) \neq \emptyset$. 设 $\eta(G) = \{r_1, \dots, r_n\}$ ($n \geq 1$). 令 R_i 为 W 的 Sylow r_i -子群, $E_i = UR_i$, 则得到 G 的下列子群:

$$D_0, D_1, \dots, D_{|\pi(U)|+1}, E_1, \dots, E_n$$

皆为非循环群, 并且两两不共轭. 因此有 $\delta(G) \geq |\pi(U)| + 2 + n = |\pi(G)| + 2$.

这与 $\delta(G) \leq |\pi(G)| + 1$ 矛盾, 因此, G 必为可解群. 完成定理的证明. $\square$

定理 3.2 设 G 是有限群且 $|\pi(G)| \geq 5$, 则 G 是一个 $\delta\pi$ -群当且仅当 G 是循环群.

证明 充分性是显然的, 我们仅证明必要性.

设 G 是一个 $\delta\pi$ -群且 $|\pi(G)| \geq 5$, 则有 $\delta(G) \leq |\pi(G)| + 1$. 另一方面, 根据定理 3.1 知, G 可解. 假设 G 非循环, 由引理 2.7 可知, $\delta(G) \geq 2^{|\pi(G)|-2}$. 因此有 $2^{|\pi(G)|-2} \leq |\pi(G)| + 1$, 这迫使 $|\pi(G)| \leq 4$, 矛盾. 所以, G 必是循环群, 证毕. $\square$

定理 3.3 设 G 是一个非循环群且 $|\pi(G)| = 4$, 则 G 是一个 $\delta\pi$ -群当且仅当 $G \cong H \times Z_r \times Z_s$, 其中 $\delta(H) = 1$, $|\pi(H)| = 2$, $(|H|, rs) = 1$, r 和 s 是互异素数.

证明 充分性是显然的, 我们仅证明必要性.

设 G 是一个非循环的 $\delta\pi$ -群. 由于 $|\pi(G)| = 4$, 则 $\delta(G) \leq 5$. 令 $\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, P_i 为 G 的 Sylow p_i -子群. 假设 G 有一个非循环的 Sylow-子群, 由于 G 可解, 根据引理 2.7(2) 知, $\delta(G) \geq 2^{4-1} = 8$, 这与 $\delta(G) \leq 5$ 矛盾. 所以, G 的 Sylow-子群皆为循环群. 由引理 2.7(1) 知, $\delta(G) \geq 2^{4-2} = 4$, 因此, $\delta(G) = 4$ 或 5 . 再次应用 G 的可解性知, G 有 Sylow 系, 不妨设 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 为 G 的 Sylow 系.

令 $H_{i,j} = P_i P_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$), 则每个 $H_{i,j}$ 皆为 G 的子群. 若 $H_{i,j}$ 皆循环, 则有 $[P_i, P_j] = 1$, 从而, G 是循环群, 矛盾. 所以, 必有某个子群 $H_{i,j}$ 非循环, 不失一般性, 可假设 $H = H_{1,2} = P_1 P_2$ 是一个非循环子群.

接下来证明 $j \neq 2$ 时, 所有的 $H_{i,j}$ 是循环群. 若否, 假设某个 $K = H_{i,j}$ ($j \neq 2$) 是非循环群. 若 $(|H|, |K|) = 1$, 则 $K = H_{3,4} = P_3 P_4$. 此时, 子群 $G, H, K, HP_3, HP_4, KP_1$ 和 KP_2 都是非循环群. 因此有 $\delta(G) \geq 7$, 与 $\delta(G) \leq 5$ 矛盾. 所以, $(|H|, |K|) \neq 1$. 不失一般性, 可取 $K = H_{1,3}$, 进一步知, 子群 G, H, K, HP_3, HP_4 和 KP_4 皆为非循环群. 这导致 $\delta(G) \geq 6$, 又一次矛盾. 因此, 所有形如 $H_{i,j}$ ($j \neq 2$) 的子群皆为循环群.

根据上面的讨论知, $G = H \times P_3 \times P_4$. 显然, 子群 G, H, HP_3 和 HP_4 皆为非循环群. 因为 $\delta(G) \leq 5$, 所以, $\delta(H) \leq 2$. 假设 $\delta(H) = 2$. 令 K 是 H 的一个非循环的真子群, 则 KP_3 和 KP_4 皆是 G 的非循环子群, 因此, $\delta(G) \geq 7$, 矛盾. 所以必有 $\delta(H) = 1$. 类似上面的证明可得到 P_3 和 P_4 皆为素数阶循环群. 完成定理的证明. $\square$

定理 3.4 设 G 是一个非循环群且 $|\pi(G)| = 3$, 则 G 是一个 $\delta\pi$ -群当且仅当 G 是下列情形之一:

- (1) G 同构于引理 2.3 的第 (6) 型群;
- (2) G 同构于引理 2.4 的第 (8)、(9) 或 (11) 型群之一;
- (3) $G \cong H \times Z_{r,3}$, 其中 H 同构于引理 2.2 的类型 (3), $(|H|, r) = 1$ 且 r 是素数;

(4) $G \cong H \times Z_r$, 其中 H 同构于引理 2.3 的类型 (5) 或 (9), $(|H|, r) = 1$ 且 r 是素数;

(5) $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^{q^m} = c^r = [b, c] = 1, a^b = a^s, a^c = a^t \rangle$, $s, t \not\equiv 1 \pmod{p}$, $s^q \equiv 1 \pmod{p}$, 且 p, q 和 r 为互异素数;

(6) $G \cong H : Z_{qr}$, 其中 $H \cong Q_8$ 或 $Z_p \times Z_p$, $(|H|, pr) = 1$, 且 p, q 和 r 为互异素数.

证明 充分性是显然的, 我们仅证明必要性.

设 G 是一个 $\delta\pi$ -群. 由于 $|\pi(G)| = 3$, 可得 $\delta(G) \leq 4$. 若 $\delta(G) \leq 3$, 则根据引理 2.2–2.4 可得定理的结论 (1) 和 (2). 因此, 我们仅需考虑 $\delta(G) = 4$.

设 $\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3\}$, P_i 是 G 的 Sylow p_i -子群, $\{P_1, P_2, P_3\}$ 为 G 的 Sylow 系. 令 $H_1 = P_1P_2$, $H_2 = P_1P_3$, $H_3 = P_2P_3$. 接下来分两种情形证明:

情形 1 G 的 Sylow 子群皆循环.

根据引理 2.1 知, G 是亚循环群. 首先, 假设 H_1 非循环, H_2 和 H_3 循环, 于是 $G = H_1 \times P_3$. 因为 $\delta(G) = 4$, 所以, $\delta(H_1) \leq 3$. 若 $\delta(H_1) = 3$. 根据引理 2.5, 可选取 H_1 的两个非循环真子群 K_1 和 K_2 , 且 $|K_1| \neq |K_2|$. 从而, K_1P_3 和 K_2P_3 也是 G 的非循环子群, 因而有 $\delta(G) \geq 5$, 矛盾. 于是, $\delta(H_1) \leq 2$, 得到定理的结论 (3) 和 (4).

接下来, 假设 H_1 和 H_2 皆为非循环群. 根据引理 2.1 知, H_3 必为循环群, 且有 $P_1 \trianglelefteq G$ 或 $H_3 \trianglelefteq G$. 假设 $H_3 \trianglelefteq G$. 由于 $\delta(G) = 4$, 则 $\delta(H_1) \leq 2$. 若 $\delta(H_1) = 2$. 取 H_1 的一个非循环真子群 K , 则 KP_3 也是一个非循环子群, 因此, $\delta(G) > 4$, 矛盾. 所以必有 $\delta(H_i) = 1$ ($i = 1, 2$). 根据引理 2.2 可得 $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^{q^m} = c^r = 1, b^{-1}ab = a^t, b^{-1}cb = c^s, [a, c] = 1, t \not\equiv 1 \pmod{p}, t^q \equiv 1 \pmod{p}, s \not\equiv 1 \pmod{p}, s^q \equiv 1 \pmod{p} \rangle$. 根据引理 2.4, 得 $\delta(G) = 3$, 这与 $\delta(G) = 4$ 矛盾. 所以必有 $P_1 \trianglelefteq G$. 类似上面讨论可得定理的结论 (5).

情形 2 G 有一个非循环的 Sylow 子群.

不失一般性, 假设 $P = P_1$ 是非循环群. 那么, 子群集合 $\{G, PP_2, PP_3, P\}$ 构成 G 的所有非循环子群共轭类的代表元集合. 由 $\delta(G) = 4$, 可得 $\delta(PP_2) = \delta(PP_3) = 2$, $\delta(P) = 1$ 且 P_2P_3 循环. 根据引理 2.3 知, P 是 G 的正规子群. 类似定理 3.3 的讨论可知, P_2 和 P_3 皆为素数阶循环群. 因此, 定理结论 (6) 成立.

定理证明完成. $\square$

4 $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ 的非可解群

定理 4.1 设 G 是一个非可解群, 则 $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ 当且仅当 $G \cong A_5$ 或 $SL(2, 5)$.

证明 根据引理 2.6 可知定理的充分性成立, 这里仅需证明必要性.

设 G 是非可解群. 类似定理 3.1 的证明可得 $G = U : W$, 其中 W 是 G 幂零 Hall-子群, U 是 G 的非可解子群且 $(|U|, |W|) = 1$, U 的 Sylow 2-子群 T 非循环. 进一步可得 $N_G(T)$ 是 G 的一个非循环真子群.

先证 $W = 1$, 即 $G = U$.

假设 $W \neq 1$, 则 $|\pi(W)| \geq 1$. 若 $|\pi(W)| \geq 2$. 设 $\pi(W) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ ($n \geq 2$), R_i 为 W 的 Sylow r_i -子群. 显然, $E_i = UR_i$ 也是 G 的非循环真子群且两两互不同构. 因此有 $\delta(G) \geq \delta(U) + |\pi(W)| + 1$. 由于 U 非可解, 所以, $\delta(U) \geq |\pi(U)| + 2$, 从而可得 $\delta(G) \geq |\pi(U)| + |\pi(W)| + 3 = |\pi(G)| + 3$, 这与定理假设矛盾. 于是有 $|\pi(W)| = 1$. 此时, 由于 $N_G(T)$ 也是 G 的一个非循环真子群, 所以可得 $N_G(T) < U$. 由 Frattini 论断可知, $G = UN_G(T) = U$, 这迫使 $W = 1$, 从而, $G = U$.

设 $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, P_i 是 G 的 Sylow p_i -子群. 令 $T = P_1$ 为 G 的 Sylow 2-子群, 则 T 非循环. 类似定理 3.1 的证明可知, 对于任意的 $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, $N_G(P_i)$ 是 G 的非循环子群. 因此, G 中存在一个 p_i' -元素 x_i 使得 $P_i \langle x_i \rangle$ 非循环. 此时, 令 $D_i = P_i \langle x_i \rangle$, 则 $|D_i| \neq |D_j|$ ($i \neq j$). 设 M 是 G 的一个极大子群且 $T \leq M$, 则 $\delta(M) \geq 2$. 下证 $\delta(M) = 2$.

假设 $\delta(M) \geq 3$, 则 M 至少包含三个彼此不共轭的非循环子群, 记为 T_1 、 T_2 和 T_3 . 所以, G 至少有 $|\pi(G)| + 3$ 个彼此互不共轭的非循环子群:

$$T_1, T_2, T_3, D_2, \dots, D_{|\pi(G)|}, D_{|\pi(G)|+1}.$$

这与 $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ 矛盾. 所以, $\delta(M) = 2$.

若 $\delta(T) = 2$, 根据引理 2.3, T 是 $(2^2, 2)$ -型交换群. 因为非可解群的极大子群不可能为交换群, 所以, $T < M$. 这导致 $\delta(M) \geq 3$, 矛盾. 因此, $\delta(T) = 1$. 由引理 2.2 知, $T \cong Z_2 \times Z_2$ 或 Q_8 . 而 $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ 迫使 $\delta(D_i) = 1$. 此时, $\{M, D_2, \dots, D_{|\pi(G)|}\}$ 中的每个元素皆为 G 的极大子群, 并且彼此互不同构. 这些群皆为 Schmidt-群 (每个真子群皆幂零的非幂零群). 所以, G 的每个二次极大子群皆为幂零群, 这样的非可解群已被 Janko [9] 分类, 根据文献 [9] 的结果可知, $G \cong A_5$ 或 $SL(2, 5)$. 定理证明完成. $\square$

致谢 作者衷心感谢审稿人对本文提出有用的建议和帮助.

参考文献

- 1 Miller G A, Moreno H C. Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. Trans Amer Math Soc, 1903, 4: 398–404
- 2 Li S R, Zhao X B. Finite groups with Few non-cyclic subgroups. J Group Theory, 2007, 10: 225–233
- 3 Meng W, Lu J K, Li S R. Finite groups with Few non-cyclic subgroups, II. Algebra Colloq, 2013, 20: 81–88
- 4 Doerk K, Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1992
- 5 Gorenstein D. Finite Groups. New York: Chelsea Publishing Co, 1980
- 6 Huppert B. Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer, 1967
- 7 Robinson D J. A Course in the Theory of Groups. Berlin: Springer, 1980
- 8 Feit W, Thompson J. Solvability of groups of odd order. Pacific J Math, 1963, 13: 775–1027
- 9 Janko Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen. Math Z, 1962, 79: 422–424

Finite groups with few conjugacy classes of non-cyclic subgroups

MENG Wei & LI ShiRong

Abstract Let G be a finite group and $\delta(G)$ denote the number of conjugacy classes of all non-cyclic subgroups of G . The symbol $\pi(G)$ denotes the set of the prime divisors of $|G|$. In this paper, a group G is called $\delta\pi$ -group if $\delta(G) \leq |\pi(G)| + 1$. We show all $\delta\pi$ -groups are solvable. Furthermore, $\delta\pi$ -groups are classified completely and non-solvable groups with $\delta(G) = |\pi(G)| + 2$ must be isomorphic to A_5 or $SL(2, 5)$.

Keywords non-cyclic subgroup, conjugacy class, isomorphism classification

MSC(2010) 20D10, 20D15

doi: 10.1360/012014-41