

# 恒星速度椭球分布的由来

岳 曾 元

## 摘 要

恒星速度椭球分布是关于恒星运动的一个基本的观测规律,从本世纪初提出以来,它得到了进一步的观测证实,并在星系动力学研究中被广泛地运用。但是这一规律本身的由来——即恒星速度椭球分布最初是怎样形成的——却一直没有得到解释。

根据恒星是从原始星云转化而来这一辩证唯物主义自然观,本文考察了银河系前身原始气体云内部的湍流运动,证明这种湍流运动必导致速度椭球分布。这一分布首先为星胚所继承,以后星场的随机引力则只是引起椭球参数和方位的变化。这样,便为恒星速度椭球分布的最初形成提供了一个解释。

## 一、引 言

在人们对恒星速度长期观测积累了丰富资料的基础上,1904 年荷兰天文学家 Kapteyn 总结出恒星运动的一项重要规律(卡普坦图)。他为了解释这一发现,提出了二流假说,即认为存在着两个星流,它们运动方向相反却又彼此掺混。德国天文学家 Schwarzschild 不赞成二流假说,他在 1907 年提出速度椭球分布假说。这两个假说都能解释卡普坦图,但从动力学观点看来, Schwarzschild 速度椭球假说显然优于二流假说,因而被广泛地接受。此后,观测表明,不仅对于亮星,而且对于 10—12 等微星,速度分布亦满足椭球规律。这表明,速度椭球分布不只是太阳附近的局部现象,它至少在 1500 秒差距<sup>1)</sup>范围内均得到了观测证实<sup>[1]</sup>。

在星系动力学理论研究中, J. H. Oort 和 Chandrasekhar 把 Schwarzschild 速度椭球分布作为基本假设而得到了一系列结果<sup>[2]</sup>。在近年来林家翘提出的旋涡星系密度波理论中,对于平衡、轴对称的基本态也使用了 Schwarzschild 速度椭球分布<sup>[3]</sup>。

Schwarzschild 分布既作为一个观测事实,又在理论研究中起到这样基本的作用,因而,探索这一规律最初的形成原因,对于星系动力学和星系演化是很有意义的。

我们知道,气体在达到平衡态时,分子速度服从 Maxwell 分布,而分子间频繁的相互碰撞则是达到 Maxwell 分布的根本原因<sup>[4]</sup>。

如果把星类比为气体,把每个星类比为气体分子,并考虑到 Schwarzschild 速度椭球分布律与 Maxwell 分布律的相似性,那么,一个容易产生的想法是试图由恒星之间的碰撞或“紧密接近”来解释恒星速度椭球分布的形成。在这种想法之中,代替分子碰撞这一随机因素的是恒星之间的随机引力。然而我们知道,两恒星间平均距离与恒星直径之比远远大于通常气体分

本文 1974 年 7 月 24 日收到。

1) 一秒差距约等于 3.26 光年。

子间平均距离与分子直径之比。因此,恒星间的碰撞极少发生,甚至极少互相接近。据估计<sup>[4,5]</sup>,恒星在星系中如此稀疏,以至平均说来,每个星需要 $\sim 10^{15}$ 年才会与另一星发生一次“紧密接近”(即引起轨道偏转大于 $90^\circ$ 的接近),需要 $\sim 10^{17}$ 年才会与另一星发生一次碰撞。这比恒星本身的年龄大许多个数量级。换言之,绝大多数恒星在其全部生存时间内,并不与其它星发生碰撞或“紧密接近”。Chandrasekhar<sup>[2]</sup>曾估计,银河系的弛豫时间(即不规则引力的累积效应发生显著影响所需时间)为 $\sim 10^{14}$ 年,这比银河系年龄( $\sim 10^{10}$ 年)大几个量级。因此,我们可以断言,只由恒星间的随机引力绝不足以造成如此有规律的、类似于 Maxwell 分布律的 Schwarzschild 速度椭球分布律。

然而另一方面, Schwarzschild 速度椭球分布必然是由某种随机因素经过相当充分的作用而产生的结果。这种随机因素既然主要地不是恒星之间的随机引力,我们就应当来考察一下每个恒星的历史,看看它们之间过去是否存在过某种其它类型的、足以造成速度椭球分布的随机因素。

当所有星都还处于原始星云状态时,它们的全体(即银河系的前身)构成了一团巨大的原始气体云。由于特征长度极其巨大,雷诺数极高,因此任何轻微的扰动都将使原始气体云的运动成为湍流运动。这是典型的大雷诺数湍流。曾有一些作者预言过湍流对于天体物理和宇宙学可能有重要作用,特别是 Chandrasekhar<sup>[6]</sup>和 von Weizsäcker<sup>[7]</sup>。Chandrasekhar 还估计了直径 $\sim 10$ 秒差距、相对速度 $\sim 10$ 公里/秒的星际云雷诺数为 $10^5$ 量级。此外我们还可指出,恒星角动量方向分布的随机性也为原始气体云中湍流提供了证据<sup>[8]</sup>。

整个银河系前身的原始气体云的直径 $L$ 的量级为 $\sim 2 \times 10^4$ 秒差距 $\approx 6 \times 10^{22}$ 厘米,每个恒星前身的一团气体的直径 $D \sim 1$ 秒差距 $\approx 3 \times 10^{18}$ 厘米,而星前介质的分子平均自由程 $l \sim 10^{15}$ 厘米( $l = 0.7/\pi n \sigma^2$ ,  $\sigma \sim 10^{-8}$ 厘米,  $n \sim 2/\text{厘米}^3$ ),因此

$$L \gg D \gg l. \quad (1)$$

这表明,当我们考察恒星前身气体团在整个银河系前身气体云中的运动时, i) 可使用连续介质力学的概念; ii) 可将每个恒星前身气体团看成一个“气体微团”。本文第二节将证明,银河系前身气体云内部的湍流随机作用,必然使“气体微团”的速度分布达到椭球分布。至于星前介质中“气体微团”速度的椭球分布如何导致恒星的速度椭球分布,我们将放在第三节中来讨论。

## 二、星前介质中速度椭球分布的证明

如上节所述,银河系前身原始气体云的运动是典型的大雷诺数湍流运动。鉴于大雷诺数湍流的统计结构与布朗运动存在着相似性,近年来已有一些作者对大雷诺数湍流使用与布朗运动类似的简化统计模型,并在湍流扩散、湍流的关联结构等方面取得了若干有益的结果<sup>[9-13]</sup>。限于篇幅,这里对有关资料不一一列举。

银河系前身气体云中的湍流运动要比通常讨论的情形更为复杂。由于引力和角动量的存在,我们不能把原始气体云中的湍流严格作为均匀的。同样,严格来说,这里的湍流运动也不是平稳的。由于银河系前身气体云形状可能远远偏离球对称(例如为扁盘状)、以及存在较差旋转等原因,湍流将是非各向同性的。虽然现象这样复杂,但由于我们关心的只是“气体微团”的脉动速度分布,因此仍有可能抓住主要的物理因素而得到问题的解。

我们将恒星前身的“气体微团”在银河系前身气体云中的运动,分解为平均运动和脉动运

动两部分。平均运动主要受银河系前身气体云整体的万有引力支配(例如围绕中心作大尺度的旋转),而脉动运动则主要受近旁其它“气体微团”湍流随机作用的支配。我们主要关心的是脉动运动。下面我们就来建立描述原始气体云中“气体微团”脉动运动的适当的统计模型。

我们将“气体微团”的真实速度、平均速度和脉动速度分别记为  $v_i$ ,  $U_i$  和  $u_i$ , 则有

$$v_i = U_i + u_i. \quad (2)$$

我们知道,在均匀各向同性大雷诺数湍流理论中,使用郎之万方程的基本思想就是把湍流随机力分成两部分。一部分是与脉动速度成线性关系的“阻力” $-\beta u_i$ ,而其余的力则归入随机力  $f_i$  (它具有比  $\beta^{-1}$  短得多的自相关时间尺度)。在银河系前身的原始气体云中,为反映湍流非各向同性的影响,我们自然地用一张量  $\beta_{ij}$  代替标量  $\beta$ 。我们将支配着平均运动的力记为  $F_i$  (它主要是银河系前身气体云整体的万有引力),即

$$\frac{D}{Dt} U_i = F_i, \quad (3)$$

其中

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4)$$

按通常的张量符号规则,本文中重复指标代表从 1 到 3 求和。如有例外情形,则加以说明。于是真实运动满足的方程可表为:

$$\frac{dv_i}{dt} = F_i - \beta_{ij} u_j + f_i. \quad (5)$$

但

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{du_i}{dt} + \frac{dU_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial U_i}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{du_i}{dt} + \frac{DU_i}{Dt} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

代入(5)式,并考虑到(3)式,便得到脉动运动的方程

$$\frac{du_i}{dt} = -\gamma_{ij} u_j + f_i, \quad (7)$$

其中

$$\gamma_{ij} = \beta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (8)$$

这里几点需指出: i)  $du_i/dt$  为脉动速度的随体导数。平均速度梯度  $\partial U_i/\partial x_j$  对脉动速度随体变化的影响已通过  $-(\partial U_i/\partial x_j)u_j$  而被包括进  $-\gamma_{ij}u_j$  这一项之中。ii)  $-\gamma_{ij}u_j$  是与脉动速度成线性关系的力的一般表示,因此如果在某种情况下科里奥利力需要考虑的话,它也可以包括进  $-\gamma_{ij}u_j$  的一般形式中。iii) 银河系前身气体云的湍流是既不均匀、也不平稳的。因此,严格来说,不仅  $\gamma_{ij}$  随位置和时间而变化,而且  $f_i$  的概率分布也随时间而变化(即严格来说,  $f_i$  不是平稳随机函数)。但这两种变化所需时间尺度均与平均运动周期(即整个银河系前身气体云的旋转周期)同阶,而湍流随机作用的弛豫时间,则与典型的脉动时间尺度(含能漩涡周期)同阶。事实上,我们下面将看到,只需几倍于这一时间尺度,速度椭球分布便可达到。在这样一段时间里,  $\gamma_{ij}$  以及  $f_i$  的概率分布均未来得及发生显著变化。因此,  $\gamma_{ij}$  和  $f_i$  的概率

分布随位置和时间变化可看成是缓变的. 即在解方程过程中认为  $\gamma_{ij}$  为不变的张量, 认为  $f_i$  为平稳随机函数, 得到解之后, 再把解中与  $\gamma_{ij}$  和  $f_i$  有关的参数作为变量, 以便得出统计性质在长时间中的变化规律. 我们把在解方程过程中作为参数处理的位置和时间记为  $\mathbf{X}$  和  $T$ , 则 (7) 式可更明确地写为:

$$\frac{du_i}{dt} = -\gamma_{ij}(\mathbf{X}, T)u_j + f_i(t; \mathbf{X}, T). \quad (9)$$

如上所述,  $-\gamma_{ij}u_j$  为与  $u_i$  成线性关系的力的一般表示. 从物理上考虑, 我们只对  $\gamma_{ij}$  作一点限制, 即假定矩阵  $\gamma_{ij}$  有三个实特征值  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , 并且

$$\gamma_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

这一限制的必要性和合理性可由下文看出. 由随机微分方程 (9), 利用资料 [12] 同样的分析, 可知速度空间的转移概率函数  $W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0)$  满足如下形式的福克-普朗克方程:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u_i} (\gamma_{ij}u_j W) + B_i \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2}, \quad (11)$$

其中

$$B_i = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle / \Delta t = \bar{f}_i^2 T_{ii} \quad (\text{不对 } i \text{ 求和}). \quad (12)$$

$T_{ii}$  意义见资料 [12], 而

$$T_{ii} = \int_0^\infty R_{ii}(\tau) d\tau, \quad (13)$$

$R_{ii}(\tau)$  为  $f_i$  的自相关系数. 利用 Kolmogoroff 局部各向同性的概念, 可进一步简化方程 (11). 由作者另一文<sup>1)</sup>的分析, 随机力  $f_i$  主要与耗损范围漩涡相联系, 因此满足局部各向同性:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B. \quad (14)$$

于是方程 (11) 简化为<sup>2)</sup>:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u_i} (\gamma_{ij}u_j W) + B \nabla_{\mathbf{u}}^2 W. \quad (15)$$

下面我们来求方程 (15) 在初始条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0) = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (16)$$

之下的特解.

1. 先考虑一个简单的特殊情形, 即  $\gamma_{ij}$  为对称张量的情形. 这时, 对于指定的  $\mathbf{X}, T$ , 存在直角坐标系  $K$  (称为“局部主坐标系”), 其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{ii} &= \gamma_i, & \text{当 } i &= j, \\ \gamma_{ij} &= 0, & \text{当 } i &\neq j. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在局部主坐标系  $K$  中, 方程 (15) 简化为:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1 W) - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial u_2} (u_2 W) - \gamma_3 \frac{\partial}{\partial u_3} (u_3 W) - B \nabla_{\mathbf{u}}^2 W = 0. \quad (18)$$

1) “湍流的 Markov 过程理论与 Kolmogoroff 理论的联系以及对 Kolmogoroff 定律的推广”一文, 尚未发表.

2) 这一简化对于最后结论并不是必需的. 从方程 (11) 出发, 仍可推出椭球分布.

利用富里叶变换方法, 可得方程 (18) 在初始条件 (16) 式之下的特解为:

$$W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0) = \frac{1}{\prod_{i=1}^3 \left[ \frac{2\pi B}{\gamma_i} (1 - e^{-2\gamma_i t}) \right]^{1/2}} \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^3 (u_i - u_{i0} e^{-\gamma_i t})^2 / \frac{2B}{\gamma_i} (1 - e^{-2\gamma_i t}) \right\}, \quad (19)$$

其中  $u_i$  和  $u_{i0}$  分别为  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{u}_0$  在局部主坐标系  $K$  中的分量. 该式中重复指标不代表求和.

当  $t \gg \gamma_i^{-1}$ , 初速  $\mathbf{u}_0$  的后效性便消失, 因此上式当  $t \gg \gamma_i^{-1}$  的渐近解, 就是“气体微团”脉动速度的概率分布. 即

$$W(\mathbf{u}) = \frac{(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)^{1/2}}{(2\pi B)^{3/2}} e^{-(\gamma_1 u_1^2 + \gamma_2 u_2^2 + \gamma_3 u_3^2)/2B}. \quad (20)$$

显然, 这就是速度椭球分布的表达式. 椭球系数和方位随位置  $\mathbf{X}$  和时间  $T$  而变化.

2.  $\gamma_{ij}$  可能为非对称的一般情形.

先写出  $W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0)$  的富里叶变换式:

$$f(\boldsymbol{\rho}, t) = \iiint W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0) e^{i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}} d\mathbf{u} \quad (21)$$

及其逆变换式:

$$W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint f(\boldsymbol{\rho}, t) e^{-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}} d\boldsymbol{\rho}, \quad (22)$$

其中  $d\mathbf{u}$  和  $d\boldsymbol{\rho}$  分别为  $\mathbf{u}$  空间和  $\boldsymbol{\rho}$  空间的体积元. 积分号表示在整个空间积分. 注意, (21) 式和 (22) 式与坐标系取法无关. 但若将  $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}$  写成

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u} = \rho_i u_i, \quad (23)$$

则  $u_i$  和  $\rho_i$  必须为同一直角坐标系中的分量. 将方程 (15) 乘以  $e^{i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}}$ , 并积分, 得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \gamma_{ij} \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_j} + B \rho_i \rho_i f = 0. \quad (24)$$

初始条件 (16) 式则化为:

$$f(\boldsymbol{\rho}, 0) = e^{i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}_0} \quad (25)$$

或

$$\ln f(\boldsymbol{\rho}, 0) = i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}_0. \quad (25')$$

方程 (24) 的特征方程为:

$$\frac{dz}{1} = \frac{d\rho_1}{\gamma_{11}\rho_1} = \frac{d\rho_2}{\gamma_{12}\rho_1} = \frac{d\rho_3}{\gamma_{13}\rho_1} = - \frac{df}{B\rho_i\rho_i f}. \quad (26)$$

由于  $\gamma_{ij}$  的三个特征值  $\gamma_i$  皆为实数, 因此存在直角坐标系  $K_1$  (与  $\mathbf{X}$ ,  $T$  有关), 使得  $\gamma_{ij}$  在  $K_1$  中为三角形:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & a & b \\ 0 & \gamma_2 & c \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

容易证明, 在  $K_1$  中, 方程 (26) 的第一个第一积分为

$$\rho_1 e^{-\gamma_1 t} = C_1. \quad (28)$$

第二个第一积分为以下二式之一:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \rho_2 - \frac{a}{\gamma_1 - \gamma_2} \rho_1 \right) e^{-\gamma_2 t} = C_2 \quad (\text{当 } \gamma_2 \neq \gamma_1), \\ \text{或} & (\rho_2 - at \rho_1) e^{-\gamma_2 t} = C_2 \quad (\text{当 } \gamma_2 = \gamma_1). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

第三个第一积分为以下五个公式之一:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \rho_3 - \left( b - \frac{ac}{\gamma_2 - \gamma_3} \right) \frac{\rho_1}{\gamma_1 - \gamma_3} - \frac{c}{\gamma_2 - \gamma_3} \rho_2 \right\} e^{-\gamma_3 t} = C_3 \quad \left( \text{当 } \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3, \right. \\ & \text{或} \quad \left\{ \rho_3 + \left[ \frac{ac}{(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_1 - \gamma_2)} - \left( b + \frac{ac}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) t \right] \rho_1 - \frac{c}{\gamma_2 - \gamma_3} \rho_2 \right\} e^{-\gamma_3 t} = C_3 \\ & \text{或} \quad \left. \left( \text{当 } \gamma_2 \neq \gamma_1 = \gamma_3 \right), \right. \\ & \left\{ \rho_3 + \left[ \frac{act}{\gamma_1 - \gamma_2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \right] \rho_1 - ct \rho_2 \right\} e^{-\gamma_3 t} = C_3 \quad (\text{当 } \gamma_1 \neq \gamma_2 = \gamma_3), \\ & \text{或} \quad \left\{ \rho_3 + \left[ \frac{ac}{(\gamma_2 - \gamma_3)^2} - \frac{b}{\gamma_1 - \gamma_3} \right] \rho_1 - \frac{c}{\gamma_2 - \gamma_3} \rho_2 \right\} e^{-\gamma_3 t} = C_3 \quad (\text{当 } \gamma_1 = \gamma_2 \neq \gamma_3), \\ & \text{或} \quad \left. \left\{ \rho_3 + \left( \frac{act^2}{2} - bt \right) \rho_1 - ct \rho_2 \right\} e^{-\gamma_3 t} = C_3 \quad (\text{当 } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3). \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

而第四个第一积分则为:

$$\ln f + BA_{ij}\rho_i\rho_j = C_4. \quad (31)$$

其中  $A_{ij}$  为对称张量, 并且满足方程

$$\gamma_{ik}A_{kj} + \gamma_{jk}A_{ki} = \delta_{ij}. \quad (32)$$

因此, 在  $K_1$  中的通解表达式为:

$$\ln f = -BA_{ij}\rho_i\rho_j + F(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3). \quad (33)$$

这里  $\Psi_i$  表示第  $i$  个第一积分的左端, 由 (28)–(30) 式可知, 无论哪种情况, 皆有

$$\Psi_i \sim 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{当 } t \gg \gamma_i^{-1}). \quad (34)$$

因此

$$\ln f \sim -BA_{ij}\rho_i\rho_j + F(0, 0, 0) \quad (\text{当 } t \gg \gamma_i^{-1}). \quad (35)$$

另一方面, 由初始条件 (25') 式, 得

$$\iota(\rho_1 u_{1_0} + \rho_2 u_{2_0} + \rho_3 u_{3_0}) = -BA_{ij}\rho_i\rho_j + F(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0)). \quad (36)$$

其中  $\Psi_i(0)$  为  $\Psi_i$  当  $t = 0$  的值. 由 (28)–(30) 式可知,  $\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0)$  都是  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  的线性齐次式. (36) 式对一切  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  成立. 令  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ , 得到

$$F(0, 0, 0) = 0. \quad (37)$$

代回 (35) 式, 便得到

$$\ln f \sim -BA_{ij}\rho_i\rho_j \quad (\text{当 } t \gg \gamma_i^{-1}). \quad (38)$$

由 (27), (32) 式及  $\gamma_i > 0$ , 通过计算可以证明,  $A_{ij}$  的三个顺序主子式皆大于零, 因而  $A_{ij}$  正定. 因此, 在  $A_{ij}$  的局部主坐标系  $K_2$  (它依赖于  $\mathbf{X}, T$ ) 中, 有

$$\ln f \sim -B(A_1\rho_1^2 + A_2\rho_2^2 + A_3\rho_3^2) \quad (\text{当 } t \gg \gamma_i^{-1}), \quad (39)$$

其中  $A_i > 0$ . 代回 (22) 式, 便得到  $W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0, 0)$  当  $t \gg \gamma_i^{-1}$  的渐近解, 亦即脉动速度  $\mathbf{u}$  的

概率分布为:

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{(4\pi B)^{3/2}(A_1 A_2 A_3)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{4B} \left( \frac{u_1^2}{A_1} + \frac{u_2^2}{A_2} + \frac{u_3^2}{A_3} \right)}, \quad (40)$$

其中  $u_i$  为  $\mathbf{u}$  在  $A_i$  的局部主坐标系  $K_2$  中的分量。因此, 在  $r_{ij}$  可能为非对称的一般情形下, 速度椭球分布仍然成立。椭球系数和方位随位置  $\mathbf{X}$  和时间  $T$  而变化。这便完成了本节的证明。当  $r_{ij}$  对称时,  $a = b = c = 0$ ,  $A_i = 1/2r_i$ , 于是 (40) 式便回到 (20) 式。

由以上推导过程可以看出,  $r_i^{-1}$  与湍流随机作用的弛豫时间相联系, 因而  $r_i > 0$  这一要求是很自然的。

### 三、讨 论

上节我们证明了, 在银河系前身的气体云中, 由于湍流随机作用, 处处存在着速度椭球分布。椭球参数和方位随位置和时间而变化。

在银河系前身的原始气体云中, 当某云块内的密度涨落大到足以使自引力的收缩效应超过分子热运动和湍流引起的弥散效应时, 云块将会在自引力作用下坍缩。关于坍缩的具体触发机构, 本节末尾还要谈到, 但可首先指出<sup>[13,14]</sup>, 一般说来, 只有质量足够大(例如  $10^3 - 10^5 M_\odot$ ) 的大云块才能首先发生引力坍缩。在大云块坍缩的过程中, 其内部的湍流运动会得到进一步加强。湍流能量的增加和分子热运动能量的增加(温度升高)都是由引力势能转化而来。上节给出的证明对于坍缩以后的大云块内部仍然适用。只是由于坍缩后的湍流状态与坍缩前不同, 因而椭球参数也将不同罢了。大云块的坍缩进一步触发了其中一批质量与恒星相当的小云块(或“气体微团”)的坍缩, 于是便导致一批星胚的形成。由于引力收缩, 使各星胚之间的间隔逐渐拉开。星际气体也逐渐被吸引到各星胚中去(当然, 实际上并非所有气体都形成星, 会有一定量气体以星际介质状态继续存在)。此后, 各星胚(以及以后的各恒星)的运动将受星系动力学方程的支配。我们在上节证明的星前介质中的速度椭球分布, 在星前介质碎裂为星胚的过程中, 将首先为星胚所继承(“气体微团”本身的坍缩不改变其质心速度), 于是便为星系动力学方程提供了一个满足速度椭球分布的初始条件。Oort 和 Chandrasekhar 的工作表明, 速度椭球分布和星系动力学方程是相容的<sup>[2]</sup>。换言之, 如果初始时刻恒星在相空间的分布函数满足 Schwarzschild 速度椭球分布, 则尽管椭球参数在以后可能发生变化, 但 Schwarzschild 速度椭球分布本身是能够长期保持的。

需强调指出的一点是, 星胚所直接继承的是星胚形成前夕大云块内部的湍流脉动速度。这要比目前观测的星际气体湍流速度为高。理由是: i) 银河系前身气体云内部的湍流运动比目前星际气体湍流运动强烈(因目前银河系大部分物质已转化为星, 气体只剩下很少一部分); ii) 大云块收缩过程加强了内部的湍流运动, 使星胚形成前夕大云块内部湍流速度比坍缩之前为高。这样便解释了星的弥散速度为什么比目前观测的星际气体湍流速度为高(前者  $\sim 30$  公里/秒, 后者  $\sim 8$  公里/秒, 见资料 [3] 附录 D)。

关于引力坍缩的触发机构, 在近年来林家翘及合作者关于星系漩涡结构的密度波理论中, 提出大云块的坍缩是由激波触发的这一想法<sup>[3,14]</sup>, 认为某些大云块在到达激波前已处于引力坍缩的边缘, 经过激波压缩的触发而发生坍缩。大云块的坍缩进而触发了内部一批小云块的坍缩, 从而形成一批星胚。用这一想法成功地解释了为什么年轻星和电离氢大部分沿旋臂

分布。

可以想象,不同的大云块中的湍流状况一般是不同的。因而,按本文观点,由它们产生出的年轻星群将具有不同的椭球参数。

\*

\*

\*

本文基本观点是,星前介质的湍流运动导致速度椭球分布的最初形成。这种分布首先为星胚所继承。以后,星系中的不规则引力则是在长时间中引起椭球参数的变化。

速度椭球分布包含两方面:一是正态性,二是非各向同性。非各向同性可由各种因素而导致;正态性则需要有足够的随机因素。既然不规则随机引力发生显著影响所需时间远远大于银河系年龄,因此,认为这种“足够的随机因素”最初是由星前介质湍流运动所提供的这一观点是很自然的。

按本文观点,恒星速度椭球分布和恒星角动量方向的随机性这两个观测事实,不过是银河系前身气体云中具有很强湍流运动这同一历史事实在不同方面的表现而已。

本文从理论上证明了星前介质的湍流运动必导致速度椭球分布的建立。这便证实了恒星速度椭球分布律既不是凭空出现,也不是偶然巧合,它主要是由于自然界内部矛盾的发展,是自然界按照本身规律形成的。

### 参 考 资 料

- [1] Паренато, Г. Г., 恒星天文学教程,戴文赛等译,人民教育出版社,1959.
- [2] Chandrasekhar, S., *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York, 1960.
- [3] Lin, C.C., in *Galactic Astronomy* (ed. Hong-Yee Chiu & Amador Muriel), V. 2, 1—93.
- [4] 王竹溪,统计物理学导论,高等教育出版社,1965.
- [5] 戴文赛,恒星天文学,科学出版社,1965.
- [6] Chandrasekhar, S., *The Astrophysical Journal*, **110** (1949), 329—339.
- [7] Weizsäcker, C.F. von, *The Astrophysical Journal*, **114** (1951), 165—186.
- [8] Huang, S.—S., *Vistas in Astronomy* (ed. Arthur Beer), V. 11, 1969.
- [9] Lin, C.C. & Reid, W. H., *Handbuch der Physik* (ed. S. Flügge), VIII/2, 1963.
- [10] Krasnoff, F. & Peskin, R. L., *Geophysical Fluid Dynamics*, **2** (1971), 123—146.
- [11] Obukhov, A.M., *Advances in Geophysics*, **6**(1959), 113.
- [12] 岳曾元,李荫亭,关德相,张彬,中国科学,1974, 148.
- [13] Идлис, Г. М., 宇宙物质,李竞译,科学出版社,1959.
- [14] Roberts, W.W., in *Galactic Astronomy* (ed. Hong-Yee Chiu & Amador Muriel), V.2, 201—214.