中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 10 期: 1427～1442
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

论 文

不可压 Navier-Stokes 方程在变指标函数空间上的整体适定性

献给王斯雷教授 85 华诞

汝少雷

浙江师范大学数学系, 金华 321004
E-mail: rushaolei@outlook.com

收稿日期: 2017-04-25; 接受日期: 2018-07-05; 网络出版日期: 2018-10-10
浙江省自然科学基金 (批准号: LQ17A010001) 和国家自然科学基金 (批准号: 11626218, 11671363 和 11471288) 资助项目

摘要 本文首先构造了一类变指标的 Fourier-Besov 空间, 在这类空间上, 我们可以克服一般变指标函数空间 (如变指标 Besov 空间和变指标 Lebesgue 空间等) 应用于方程时所遇到的困难. 基于在这类空间上的半群估计和时空估计, 本文可得 Navier-Stokes 方程在这类空间上小初始值的整体适定性.

关键词 变指标函数空间 Navier-Stokes 方程 整体适定性

MSC (2010) 主题分类 42B25, 42B35, 35K15

1 引言

较为古典的变指标函数空间可追溯到 Orlicz [1,2]、Musielak [3] 和 Nakano [4,5]. 现代变指标函数空间理论主要是从 Kováčik 和 Rákosník [6]、Cruzuribe [7] 及 Diening [8] 开始发展起来的. 这类空间在调和分析领域得到了很充分的研究, 可参见文献 [9–12] 等. 特别地, 最近, Leopold [13–15] 及 Leopold 和 Schrohe [16] 在变指标的 Besov 空间 $B^{s(\cdot)}_{p,p}(\mathbb{R}^N)$ 上研究了拟微分 (pseudo-differential) 算子; Noi 和 Sawano [17] 研究了变指标 Besov 空间和变指标 Triebel-Lizorkin 空间的复插值; Yang 等 [18] 引进了变指标 Besov 型空间的可积性等. 事实上, 这类空间在动力系统 [19,20]、图像处理 [21] 和偏微分方程 [22,23] 等方面已经有了一些应用, 但由于这类空间结构的特殊性, 使其在一些方程的局部、整体适定性方面应用时所受的限制较大. 本文主要试图克服这类空间所受限制, 将其应用于不可压的 Navier-Stokes 方程的整体适定性问题, 从而获得更加一般性的结果.

英文引用格式: Ru S L. Global well-posedness of the incompressible Navier-Stokes equations in function spaces with variable exponents (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1427–1442, doi: 10.1360/N012017-00078

1.1 函数空间

从调和分析的观点看, 在过去的几十年里, 变指标的函数空间越来越受到大家的注意. 在这个领域, 一个较为突破性的结论是 Hardy-Littlewood 极大算子的有界性, 可参见文献 [24]. 随后, 这种类型的空间被应用到电流变 (electrorheological) 流体 [25] 和 PDE [26] (partial differential equation) 等.

令 $\mathcal{P}_0$ 为所有满足

$$0 < p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^N} p(x), \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} p(x) = p_+ < \infty$$

的可测函数 $p(\cdot):\mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ 构成的集合. 对于任意的 $p\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$, 令 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 为所有满足

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx \leqslant 1, \quad \lambda>0$$

定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的可测函数的全体. 所有满足以上条件的最小值记作 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$. 该集合被赋予 Luxemburg-Nakano 范数 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$ (参见文献 [4,5,27]) 时, 它就是一个拟 Banach 空间, 其中这类范数的精确定义如下:

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda>0 : \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx \leqslant 1\right\}.$$

需要说明的是, 为了考虑 Hardy-Littlewood 极大函数在空间上的有界性, 下面介绍一下在这种类型空间上的一类标准条件. 我们把满足条件 (1) 和 (2) 的所有实值函数的全体记作 $C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, 其中

(1) (局部 log-Hölder 连续) 存在常数 $C_{\log}(p)$, 使得 $|p(x)-p(y)| \leqslant \frac{C_{\log}(p)}{\log(\mathrm{e}+|x-y|^{-1})}$ $(x,y\in\mathbb{R}^N,\, x\neq y)$;

(2) (整体 log-Hölder 连续) 存在常数 $C_{\log}(p)$ 和 p_∞, 满足 $|p(x)-p_\infty| \leqslant \frac{C_{\log}(p)}{\log(\mathrm{e}+|x|)}$ $(x\in\mathbb{R}^N)$.

下面定义变指标的 Besov 空间. 我们使用 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换和 Fourier 逆变换. 首先回顾 Littlewood-Paley 分解 (有时也被称为二进制分解) 算子的定义. Littlewood-Paley 分解算子是针对频率空间进行局部化得到的, 也是调和分析领域精妙而深刻的想法之一. 令 χ 为光滑的非负函数且满足当 $|\xi|<1$ 时, $\chi(\xi)=1$; 当 $|\xi|>2$ 时, $\chi(\xi)=0$. 并定义 $\varphi(\xi)=\chi(\xi)-\chi(2\xi)$, $\varphi_j(\xi)=\varphi(2^{-j}\xi)$, $\varphi_0(\xi)=1-\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(\xi)$, 则 Littlewood-Paley 分解算子的定义如下: 对于任意的 $j\geqslant 0$, 令 $\Delta_j=\varphi_j^{\vee}*\cdot$, $S_j=\sum_{i\leqslant j-1}\Delta_i$, 则有当 $|j-k|\geqslant 2$ 时, $\Delta_j\Delta_k u\equiv 0$; 当 $|j-k|\geqslant 5$ 时, $\Delta_j(S_{k-1}u\Delta_k u)\equiv 0$. 从形式上容易看出,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Delta_j \equiv I.$$

令 $p(\cdot),q(\cdot)\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$. 空间 $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的可测函数序列 $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ 的集合, 且满足

$$\|\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} = \inf\left\{\mu>0, \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\left\{\frac{f_j}{\mu}\right\}_{j=0}^{\infty}\right)\leqslant 1\right\}<\infty,$$

其中

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}(\{f_j\}_{j=0}^{\infty}) = \sum_{j=0}^{\infty}\inf\left\{\lambda_j : \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|f_j(x)|}{\lambda_j^{\frac{1}{q(x)}}}\right)^{p(x)}dx\leqslant 1\right\}.$$

由上易知,

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}(\{f_j\}_{j=0}^{\infty}) = \sum_{j=0}^{\infty}\||f_j|^{q(\cdot)}\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}}.$$

定义 1.1 令 $p(\cdot),q(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ 和 $s(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)$. 变指标的 Besov 空间定义如下:

$$B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}=\{f\in\mathcal{S}':\|f\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}<\infty\},$$
$$\|f\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}:=\|\{2^{js(\cdot)}\Delta_j f\}_0^\infty\|_{\ell^{q(\cdot)}L^{p(\cdot)}}<\infty.$$

设 $T>0$, $\rho\in[1,\infty]$, 令 $L^\rho(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r})$ 为满足

$$\|u\|_{L^\rho(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r})}:=\bigg\|\bigg(\sum_{j=0}^\infty\|2^{js(\cdot)}\Delta_j u\|^r_{L^{p(\cdot)}}\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^\rho_T}<\infty$$

的所有缓增分布 u 构成的集合. 混合空间 $\widetilde{L}^\rho(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r})$ 为满足

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r})}:=\bigg(\sum_{j=0}^\infty\|2^{js(\cdot)}\Delta_j u\|^r_{L^\rho_T L^{p(\cdot)}}\bigg)^{\frac{1}{r}}<\infty$$

的所有缓增分布 u 构成的集合. 为了书写方便, 我们有时令

$$L^\rho_T B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}:=L^\rho(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}),\quad \widetilde{L}^\rho_T B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}:=\widetilde{L}^\rho(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}).$$

由 Minkowski 不等式, 若 $\rho\leqslant r$, 则

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}}\leqslant\|u\|_{L^\rho_T B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}};$$

若 $r\leqslant\rho$, 则

$$\|u\|_{L^\rho_T B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}}\leqslant\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r}}.$$

变指标的 Besov 空间在应用于 Navier-Stokes 方程的适定性问题时局限性较大, 在这类空间上, 最基本的 Young 不等式都不能保证成立. 为了克服这些困难, 并更好地处理 Navier-Stokes 方程的整体适定性, 我们引入以下这种变指标的齐次 Fourier-Besov 空间.

设 φ 为以上所定义的光滑函数, 我们可以很自然地定义下面的函数列 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$:

$$\varphi_j(\xi)=\varphi(2^{-j}\xi),\quad j\in\mathbb{Z}.$$

易知

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j(\xi)=1,\quad \xi\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

定义 1.2 令 $p(\cdot),q(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ 和 $s(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)$. 变指标的齐次 Fourier-Besov 空间定义如下:

$$F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}=\{f\in\dot{\mathcal{S}}':\|f\|_{F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}<\infty\},$$
$$\|f\|_{F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}:=\|\{2^{js(\cdot)}\varphi_j\widehat{f}\}_{-\infty}^\infty\|_{\ell^{q(\cdot)}L^{p(\cdot)}}<\infty,$$

其中

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^N)=\{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N):(D^\alpha\widehat{f})(0)=0,\forall\alpha\},$$

$\dot{\mathcal{S}}'$ 为 $\dot{\mathcal{S}}$ 的对偶空间.

这种类型的空间与 Besov 空间有较大的区别, 更适合在频率空间上考虑算子有界性. 事实上, 对于非变指标的 Fourier-Besov 型空间及其在方程中的应用已有较长的历史, 参见文献 [28,29] 等.

类似地, 定义混合空间 $\widetilde{L}^\rho([0,T),F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r})$ 为满足

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho([0,T),F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),r})} := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|2^{js(\cdot)}\varphi_j\widehat{u}\|^r_{L^\rho_T L^{p(\cdot)}}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

的所有缓增分布 u 构成的集合.

1.2 Navier-Stokes 方程

本文主要在变指标的 Besov 空间上考虑三维不可压 Navier-Stokes (NS) 方程:

$$\begin{cases}\partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0,\\ \mathrm{div} u = 0, \quad u(0,x) = u^0(x)\end{cases} \tag{$*$}$$

的局部、整体适定性, 其中 $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial^2_{x_i}$, $\nabla = (\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3})$, $\mathrm{div} u = \partial_{x_1}u_1 + \partial_{x_2}u_2 + \partial_{x_3}u_3$ 及 $u=(u_1,u_2,u_3)$, 这里 $u:[0,T)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 表示流体的速度, $p:[0,T)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 表示压强. 为了方便, 这里令流体的黏度系数为 1. 这类方程可以表示许多的物理模型, 如二维的 FHP (Frish-Pomeau-Hasslacher) 和三维的 FCHC [30] (four-D center hypercube) 等.

设 (u,p) 为 NS 方程的光滑解. 在 NS 方程的两端同时取散度, 并结合 $\mathrm{div} u = 0$, 立即可得

$$\Delta p + \mathrm{div}[(u\cdot\nabla)u] = 0,$$

则有 $\nabla p = (-\Delta)^{-1}\nabla\mathrm{div}[(u\cdot\nabla)u]$. 为了方便, 记 $\mathbb{P} := I + (-\Delta)^{-1}\nabla\mathrm{div}$. 再将 ∇p 代入 NS 方程, 可得

$$\partial_t u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla u) - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x).$$

容易发现非线性项 $\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)$ 是一个一阶的 Fourier 乘子作用在双线性表示上的项.

NS 方程被公认为是流体力学领域的最基本的方程, 对于这类方程适定性的研究已有很长的历史, 其研究内容主要有以下几个方向:

首先, Leray [31] 证明了弱解的存在性. 关于这类方程在临界空间上的小初值的整体适定性较为突破性的成果首先是由 Fujita 和 Kato[32] 给出的, 他们证明了这类方程的局部适定性及初始值在 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 空间中充分小时的整体适定性. 随后, Kato [33] 证明了 NS 方程 $(*)$ 在 $L^3(\mathbb{R}^3)$ 上是局部适定的, 且当初始值在 $L^3(\mathbb{R}^3)$ 中充分小时, 方程是整体适定的. 通过将压缩映射原理应用于 NS 方程的等价积分方程, Cannone 等 [34] 将这一结论推广到了更一般的 Besov 空间 $\dot{B}^{-1+\frac{N}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$ (其中 $p<\infty$), 即当初始值在 $\dot{B}^{-1+\frac{N}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$ 上的范数充分小时, NS 方程 $(*)$ 存在唯一整体解. 需要指出的是, 这个结果准许我们构造一类强振荡的初始值, 使其在 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 或 $L^3(\mathbb{R}^3)$ 中的范数可以任意大. 一个经典的例子如下:

$$u^0_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\alpha}\sin\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)(-\partial_2\varphi(x),\partial_1\varphi(x),0), \tag{1.1}$$

其中 $0<\alpha<1$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. NS 方程的局部及小初始值整体适定性随后得到了进一步的研究, 可参见文献 [35–39] 等. 特别地, 文献 [39] 证明了, 当初始值在 $\mathrm{BMO}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ 空间 (BMO (bounded mean oscillation) 空间的导数空间) 的范数充分小时, NS 方程存在整体唯一解. 此后, Bourgain 和 Pavlović [40]

证明了三维的 NS 方程在 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$ 中是不适定的. 容易验证, 如果 $(u(t,x),p(t,x))$ 是 NS 方程 $(*)$ 的解, 则 $(u_\lambda(t,x),p_\lambda(t,x))$ 为 NS 方程关于初始值 $u^0_\lambda=\lambda u^0(\lambda x)$ 的解, 其中

$$u_\lambda(t,x)=\lambda u(\lambda^2 t,\lambda x),\quad p_\lambda(t,x)=\lambda^2 u(\lambda^2 t,\lambda x).$$

注意到

$$\|u_\lambda(0,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}=\lambda\|u_0(\lambda\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}=\lambda^{1-\frac{N}{r}}\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^N)},$$

我们知道 $r=N$ 恰好满足对任何 $\lambda>0$, $u_\lambda(0,x)$ 的 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 范数保持不变. 从这种角度看, 我们称 L^N 是 N 维 NS 方程在所有 L^r 空间类中的临界空间. 以上这种伸缩 (scaling) 不变的函数空间, 记为 NS 方程的临界空间. 容易发现, 如上所述的函数空间均为临界空间, 且有如下嵌入关系:

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow \dot{B}^{-1+\frac{3}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow \mathrm{BMO}^{-1}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3).$$

其次, 在以上所述的小初值的整体适定性的基础之上, 还有许多学者考虑 NS 方程大初始值的整体适定性问题. 如上所述, 若我们想要考虑 NS 方程大初始值的适定性问题, 首先需要验证初始值在 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$ 中的范数可否任意大. 不幸的是, 在 (1.1) 中所述的例子不能满足这个条件. 在这之后, 文献 [41] 构造了一类周期初始值, 这类初始值在 $B^{-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^3)$ 中的范数可以任意大, 但却可以产生整体解. 这类初始值的形式如下:

$$u^0_N=(N\nu^0_h(x_h)\cos(Nx_3),-\mathrm{div}_h\nu^0_h(x_h)\sin(Nx_3)),$$

其中 $x_h=(x_1,x_2)$, $\|\nu^0_h(x_h)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\leqslant C(\ln N)^{\frac{1}{4}}$. 这类初始值的底空间随后被文献 [42] 推广到 $\mathbb{R}^3$. 此后, 文献 [43] 证明了当初始值的一个方向变化很慢时, NS 方程存在整体解. 这类初始值的具体形式如下:

$$u^0_\varepsilon(x_h,x_3)=(\nu^0_h(x_h,\varepsilon x_3),0)+(\varepsilon\omega^0_h(x_h,\varepsilon x_3),\omega^0_3(x_h,\varepsilon x_3)),$$

其中 ε 充分的小, $(\nu^0_h,0)$ 和 ω^0 为两个散度为零的光滑函数. 这种初始值被称为 "很好准备 (well prepared)" 的情形 (它的范数可以任意大, 但不依赖于参数 ε). 随后, 这种类型的初始值在文献 [44] 中被推广为 "未很好准备 (ill prepared)" 的情形 (它的范数随着参数 ε 趋于 0, 而变得无穷大). 更确切地讲, 他们证明了存在 ε_0 和 η, 使得对任意的 $\varepsilon<\varepsilon_0$, 若 $\|\mathrm{e}^{a|D_3|}\nu^0\|_{H^4}\leqslant\eta$, 则初始值

$$u^0_\varepsilon=\left(\nu^0_h(x_h,\varepsilon x_3),\frac{1}{\varepsilon}\nu^0_3(x_h,\varepsilon x_3)\right)$$

在 $\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$ 上产生 NS 方程 $(*)$ 的整体光滑解. 关于这方面更多的信息, 可参见文献 [45,46] 等.

最后, 除了以上我们所讨论的关于 NS 方程的两个方向之外, 还有许多学者关心这类方程的轴对称解. 轴对称解的形式如下:

$$u(t,x)=u^r(t,r,x_3)e_r+u^\theta(t,r,x_3)e_\theta+u^3(t,r,x_3)e_3,$$

其中 $e_r=(\frac{x_1}{r},\frac{x_2}{r},0)$, $e_\theta=(\frac{-x_2}{r},\frac{x_1}{r},0)$, $e_3=(0,0,1)$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. 对于这种类型解的研究也有较长的历史, 可参见文献 [47,48] 等.

本文主要试图在变指标的函数空间上考虑不可压 Navier-Stokes 方程的整体适定性, 从而得到更一般的结果. 本文具体安排如下: 第 2 节考虑一些需要用到的在变指标函数空间上的算子估计; 第 3 节证明 Navier-Stokes 方程在变指标函数空间上的局部适定性; 第 4 节证明 Navier-Stokes 方程在变指标齐次 Fourier-Besov 空间上小初始值的整体适定性.

2 热半群的时空估计

众所周知, NS 方程与以下积分方程等价:

$$u(t)=H(t)u^0-\int_0^t H(t-\tau)\mathbb{P}[\mathrm{div}(u\otimes u)]d\tau=H(t)u^0-\mathcal{A}\mathbb{P}[\mathrm{div}(u\otimes u)],$$

其中 $H(t)=\mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}$, $[\mathbb{P}\mathrm{div}(u\otimes u)]_i=[\mathrm{div}(u\otimes u)]_i+R_i\sum_{k=1}^3 R_k[\mathrm{div}(u\otimes u)]_k$.

记 $H(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}=\mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}$. 由于 $\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$ 为指数衰减函数, 这对应物理上的耗散现象, 决定了 $H(t)$ 有非常好的性质. 本节有下面的 $L^{r(\cdot)}\to L^{p(\cdot)}$ 估计, 而对于这一算子在一般的 L^p 空间和 Besov 空间上的估计来历已久, 可参见文献 [49–51].

性质 2.1 在变指标的 Besov 空间上, 以下结论成立:

(1) (Hölder 不等式 [52]) 假设 $1<p_-\leqslant p_+<\infty$. 若 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$, $g\in L^{p^*(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$, 则 $fg\in L^1(\mathbb{R}^N)$ 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)g(x)|dx\leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^{p^*(\cdot)}(\mathbb{R}^N)},$$

其中 $p^*(x):=\frac{p(x)}{p(x)-1}$, C 的值依赖于 p_- 和 p_+, 但与 f 和 g 无关.

在以上的条件下, 利用以上结论, 并通过简单的计算, 我们可以将以上估计式推广为以下形式:

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)g(x)|^\gamma dx\bigg)^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant C\|f\|_{L^{r_1(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^{r_2(\cdot)}(\mathbb{R}^N)},$$

其中 $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r_1(\cdot)}+\frac{1}{r_2(\cdot)}$, $1\leqslant\gamma\leqslant\infty$, $f\in L^{r_1(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$, $g\in L^{r_2(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$. 事实上, 当 $h(x)\in L^\infty$ 时, 利用 $L^{p(\cdot)}$ 的定义容易证明

$$\|fh\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|h(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

也成立.

(2) (缓和 (mollification) 不等式 [52]) 令 $p(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, $\psi\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$. 假设

$$\Psi(x)=\sup_{y\notin B(0,|x|)}|\psi(y)|$$

可积, 则有

$$\|f*\psi_\varepsilon\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

其中 C 是与 f 和 ψ 无关的常数, $\psi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^N}\psi(\frac{1}{\varepsilon})$.

作为这一结论的直接推广, 我们有以下结论:

令 $p\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, 则对任意的 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 及任意的非负、径向递减函数 $g\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\|f*g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

其中 C 是与 f 和 g 无关的常数.

(3) (Sobolev 不等式 [53]) 设 $p_0,p_1,q\in\mathcal{P}_0$, $s_0,s_1\in L^\infty\cap C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, $s_0\geqslant s_1$. 若 $\frac{1}{q}$ 和 $s_0-\frac{N}{p_0}=s_1-\frac{N}{p_1}$ 均局部 log-Hölder 连续, 则有

$$B^{s_0(\cdot)}_{p_0(\cdot),q(\cdot)}\hookrightarrow B^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),q(\cdot)}.$$

(4) 设 $p_0,p_1,q_0,q_1\in\mathcal{P}_0$, $s_0,s_1\in L^\infty\cap C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, $s_0\geqslant s_1$. 若 $\frac{1}{q_0}$、$\frac{1}{q_1}$ 和 $s_0-\frac{N}{p_0}=s_1-\frac{N}{p_1}+\varepsilon(x)$ 均局部 log-Hölder 连续且 $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^N}\varepsilon(x)>0$, 则有

$$B^{s_0(\cdot)}_{p_0(\cdot),q_0(\cdot)}\hookrightarrow B^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),q_1(\cdot)}.$$

性质 2.2　令 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0$, $p_- \in [1,\infty]$, $k=0,1$, 则有

$$\|\nabla^k H(t)f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \lesssim t^{-\frac{k}{2}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}, \quad t>0.$$

证明　首先,

$$\|\partial_{x_1}H(t)f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} = \|(2\pi \mathrm{i}\xi_1 \mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^\vee * f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}.$$

再由 $(\xi_1\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^\vee = t^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{N}{2}}(\xi_1\mathrm{e}^{-|\xi|^2})^\vee(\frac{x}{\sqrt{t}})$ 和缓和不等式, 可得

$$\|\partial_{x_1}H(t)f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \leqslant t^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)},$$

从而可得结论成立. □

作为这个性质的一个直接推广, 还可得

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}H(t)f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)} \lesssim t^{-\frac{s}{2}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}, \quad s\geqslant 0,$$

其中 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^s\mathcal{F}f$.

迄今为止, 我们并没有很多有效的方法处理奇异积分. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式是处理奇异积分的基本工具之一.

设 $0<\alpha<N$, 记 $I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy$.

性质 2.3 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 [54])　设 $1<p,q<\infty$ 和 $0<\alpha<N$ 满足 $1/p = 1/q+\alpha/N$, 则有 $\|I_\alpha f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p}$.

性质 2.4　设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0$, $p_-\in[1,\infty]$ 及 $1<\gamma,\gamma_1<\infty$, 且满足

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_1}+\frac{s}{2}-1, \quad \frac{s}{2}<1, \quad s\geqslant 0,$$

则有

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\mathcal{A}f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^+,L^{p(\cdot)})} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^+,L^{p(\cdot)})}.$$

证明　由性质 2.2, 有

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\mathcal{A}f\|_{L^{p(\cdot)}} \lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{s}{2}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}}d\tau.$$

应用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (性质 2.3), 可得结论成立. □

由于 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的限制, 在性质 2.4 的结论中, 不包含 $\gamma=\infty$ 和 $\gamma=1$ 的情形. 为了处理这两种情形, 我们有下面的结论:

性质 2.5　设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0$, $s(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, $1\leqslant\gamma,\lambda\leqslant\infty$ 及 $0\leqslant\sigma<2$, 则有

$$\|(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\mathcal{A}f\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^N))} \lesssim T^{1-\frac{\sigma}{2}}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^N))}.$$

证明　由性质 2.2, 有

$$\|2^{js(\cdot)}(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\Delta_j\mathcal{A}f\|_{L^{p(\cdot)}} \lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\sigma}{2}}\|2^{js(\cdot)}\Delta_j f\|_{L^{p(\cdot)}}d\tau.$$

应用 Young 不等式, 可得结论成立. □

显然, 在以上所述的性质当中, 若把时间区间 $\mathbb{R}^+$ 换为 $[0,T]$, 则结论仍然成立.

如果我们要考虑方程的局部解和小初值的整体适定性, 在应用半群结构建立了时空估计之后, 关键技术将是选择适当的空间类做非线性项的估计. 方程自身的守恒律在这部分内容中不是必要的. 下面主要建立变指标 Besov 空间中的一个非线性映象估计. 首先, 回顾分布之间的一般乘法运算. 令

$$T_u\nu := \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-1}u\Delta_j\nu,$$

则有如下形式分解:

$$u\nu = T_u\nu + T_\nu u + R(u,\nu),$$

其中

$$R(u,\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j u\widetilde{\Delta}_j\nu, \quad \widetilde{\Delta}_j = \Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}.$$

这种分解被称为 Bony 乘积分解.

下面将叙述在变指标 Besov 空间上的非线性项估计.

性质 2.6 令 $s>0$, $1\leqslant\gamma\leqslant\infty$, $p(\cdot), r(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ 及 $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}$, 则有

$$\|u\nu\|_{B^s_{\gamma,1}} \lesssim \|u\|_{B^0_{r(\cdot),1}}\|\nu\|_{B^s_{p(\cdot),1}} + \|\nu\|_{B^0_{r(\cdot),1}}\|u\|_{B^s_{p(\cdot),1}}.$$

证明 使用 Bony 分解, 对于固定的 $j\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\Delta_j(u\nu) &= \sum_{|k-j|\leqslant 4}\Delta_j(S_{k-1}u\Delta_k\nu) + \sum_{|k-j|\leqslant 4}\Delta_j(S_{k-1}\nu\Delta_k u) + \sum_{k\geqslant j-2}\Delta_j(\Delta_k u\widetilde{\Delta}_k\nu)\\ &=: I + II + III.\end{aligned}$$

我们将分别估计以上三项. 使用 Young 不定式及性质 2.1 中的 Hölder 不等式, 有

$$\|2^{js}\Delta_j(S_{k-1}u\Delta_k\nu)\|_{L^\gamma} \lesssim \|S_{k-1}u\|_{L^{r(\cdot)}}\|2^{js}\Delta_k\nu\|_{L^{p(\cdot)}},$$

则有

$$\|2^{js}I\|_{L^\gamma} \lesssim \sum_{|k-j|\leqslant 4}\|S_{k-1}u\|_{L^{r(\cdot)}}\|2^{ks}\Delta_k\nu\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

类似地, 可得 II 的估计,

$$\|2^{js}II\|_{L^\gamma} \lesssim \sum_{|k-j|\leqslant 4}\|S_{k-1}\nu\|_{L^{r(\cdot)}}\|2^{ks}\Delta_k u\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

下面估计 III. 由 Young 不等式, 有

$$\|\Delta_j(\Delta_k u\widetilde{\Delta}_k\nu)\|_{L^\gamma} \lesssim \|\Delta_k u\|_{L^{p(\cdot)}}\|\widetilde{\Delta}_k\nu\|_{L^{r(\cdot)}}.$$

因此,

$$\|2^{js}III\|_{L^\gamma} \lesssim \sum_{k\geqslant j-2}\|2^{js}\Delta_k u\|_{L^{p(\cdot)}}\|\widetilde{\Delta}_k\nu\|_{L^{r(\cdot)}} = \sum_{k\geqslant j-2}2^{(j-k)s}\|2^{ks}\Delta_k u\|_{L^{p(\cdot)}}\|\widetilde{\Delta}_k\nu\|_{L^{r(\cdot)}}.$$

将以上各个估计分别关于 j 求和, 即可得结论成立. □

性质 2.7 令 $s>0$, $1\leqslant\gamma,\lambda\leqslant\infty$, $p(\cdot),r(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ 及 $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$, 则有

$$\|u\nu\|_{\widetilde{L}_t^{\lambda}B^s_{\gamma,1}}\lesssim\|u\|_{\widetilde{L}_t^{\lambda_1}B^s_{p(\cdot),1}}\|\nu\|_{\widetilde{L}_t^{\lambda_2}B^0_{r(\cdot),1}}+\|\nu\|_{\widetilde{L}_t^{\lambda_1}B^s_{p(\cdot),1}}\|u\|_{\widetilde{L}_t^{\lambda_2}B^0_{r(\cdot),1}}.$$

证明 在性质 2.6 的证明过程中, 将 $L^{p(\cdot)}$ 替换为 $L_t^{\lambda}L^{p(\cdot)}$, 立即可得结论成立. □

3 Navier-Stokes 方程在变指标 Besov 空间上的局部适定性

变指标的 Besov 空间与 Besov 空间有许多不同之处. 在变指标的 Besov 空间上, Young 不等式和乘子定理等一些经典的理论都不成立. 正因如此, 在这类空间上考虑方程的适定性具有较大的难度. 本节主要利用第 2 节所引入的性质并结合经典的不动点原理来考虑不可压 NS 方程的局部适定性.

定理 3.1 令 $p(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^3)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^3)$, $s(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^3)$, $1\leqslant\gamma,p(\cdot)\leqslant\infty$, $s(\cdot)\geqslant c>0$, $\frac{3}{p(\cdot)}-s(\cdot)=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}|s(x)-s(y)|=\delta_1$, $0\leqslant\delta_1<1$. 当 $u_0\in B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}$ 时, 存在 $T^*>0$, 使得 Navier-Stokes 方程存在唯一解

$$u(t)\in\widetilde{L}^{\gamma}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}).$$

若 $T^*<\infty$, 则

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\gamma}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}=\infty.$$

证明 设 $M>0$, $T>0$ 待定. 令

$$\mathcal{D}=\{u\in\widetilde{L}^{\gamma}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}):\|u\|_{\widetilde{L}^{\gamma}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^{\infty}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\leqslant M\},$$

其上赋度量 $d(u,\nu)=\|u-\nu\|_{\widetilde{L}^{\gamma}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^{\infty}(0,T^*,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}$. 现在考虑映射

$$\mathcal{J}:u(t)\to H(t)u_0-\int_0^{\infty}H(t-\tau)\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]d\tau,$$

下面将证明对适当的 $M>0$, $\mathcal{J}:(\mathcal{D},d)\to(\mathcal{D},d)$ 为压缩映射.

首先, 由定义知,

$$\|H(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\infty}(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|2^{js(\cdot)}\Delta_jH(t)u_0\|_{L^{\infty}L^{p(\cdot)}}.$$

再由性质 2.1, 有

$$\begin{aligned}\|2^{js(\cdot)}\Delta_jH(t)u_0\|_{L^{p(\cdot)}}&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{js(x)}\Delta_jH(t)u_0}{\lambda}\right|^{p(x)}dx<1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\Delta_jH(t)u_0}{\lambda}\right|^{p(x)}2^{j(3-\delta_1p(x))}dx<1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{-j\delta_1}H(t)\Delta_ju_0}{\lambda}\right|^{p(x)}2^{3j}dx<1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{-j\delta_1}((\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^{\vee}*\Delta_ju_0)(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}d2^jx<1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{-j\delta_1}((\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^{\vee}*\Delta_ju_0)(2^{-j}y)}{\lambda}\right|^{p(2^{-j}y)}dy<1\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{-j\delta_1}(2^{-3j}(\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})^{\vee}(\frac{\cdot}{2^j})*\Delta_j u_0(2^{-j}\cdot))(y)}{\lambda}\right|^{p(2^{-j}y)}dy<1\right\}\\
&\lesssim \inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{-j\delta_1}\Delta_j u_0(2^{-j}y)}{\lambda}\right|^{p(2^{-j}y)}dy<1\right\}\\
&= \inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{2^{js(x)}\Delta_j u_0(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}dx<1\right\}\\
&= \|2^{js(\cdot)}\Delta_j u_0\|_{L^{p(\cdot)}}.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\|H(t)u_0\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\lesssim\|u_0\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}}.
$$

类似地,

$$
\|H(t)u_0\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\lesssim T^{\frac{1}{\gamma}}\|u_0\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}}.
$$

另一方面, 令 $s_0=\sup_{x\in\mathbb{R}^N}s(x)$, 由 $s(\cdot)-\frac{3}{p(\cdot)}=-\delta_1$, 则存在 $p_0,p_1,p_2\in\mathbb{R}$, 满足

$$
\begin{aligned}
&s_0-\frac{3}{p_0}=s(\cdot)-\frac{3}{p(\cdot)}=-\delta_1,\\
&\frac{1}{p_0}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\quad \frac{3}{p_1}=s_0,\quad \frac{3}{p_2}=\delta_1.
\end{aligned}
$$

再由 $s(\cdot)\geqslant c>0$, 有

$$
0<s_0-\delta_1\leqslant s(\cdot),\quad s_0-\delta_1-\frac{3}{p_1}=s(\cdot)-\frac{3}{p(\cdot)},\quad -\frac{3}{p_2}=s(\cdot)-\frac{3}{p(\cdot)},\quad p(\cdot)\leqslant\min\{p_1,p_2\}.
$$

再由性质 2.5 和 2.6, 有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}&\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant3}\|(-\Delta)^{\frac12}\mathcal{A}\mathbb{P}(u_iu_j)\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\\
&\leqslant(T^{\frac12-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac12})\|uu\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s_0-\delta_1}_{p_0,1})}\\
&\lesssim(T^{\frac12-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac12})\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s_0-\delta_1}_{p_1,1})}\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{0}_{p_2,1})}\\
&\lesssim(T^{\frac12-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac12})\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}.
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}&\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant3}\|(-\Delta)^{\frac12}\mathcal{A}\mathbb{P}(u_iu_j)\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\\
&\leqslant(T^{\frac12-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac12})\|uu\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s_0-\delta_1}_{p_0,1})}\\
&\lesssim(T^{\frac12-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac12})\|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}.
\end{aligned}
$$

令 $X:=\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})$, 则

$$
\|\mathcal{J}u\|_X\lesssim(1+T^{\frac1\gamma})\|u_0\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}}+(T^{\frac12-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac12})(\|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}+\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})})\|u\|_{\widetilde{L}^\infty(0,T,B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1})}.
$$

此时令

$$M=4C\|u_0\|_{B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}}.$$

固定上述 M 之后, 再取 T (<1) 充分小, 使得

$$C(T^{\frac{1}{2}-\frac{\delta_1}{2}}+T^{\frac{1}{2}})M<\frac{1}{4}.$$

则由以上讨论, 有

$$\|\mathcal{J}u\|_X\leqslant M,\quad d(\mathcal{J}u,\mathcal{J}\nu)\leqslant\frac{1}{2}d(u,\nu).$$

所以, $\mathcal{J}:(\mathcal{D},d)\to(\mathcal{D},d)$ 为压缩映射. 故存在 $u\in\mathcal{D}$ 满足 NS 方程的等价积分方程. 考虑映射

$$J:u(t)\to H(t-T)u(T)-\int_T^t H(t-\tau)\mathbb{P}[u\cdot\nabla u]d\tau,$$

其中 $u(T)$ 为上面所得的解在 T 处的取值. 用标准的方法, 可以延拓上面的解. 这样的步骤一直重复下去, 就可以得到存在 T^* 满足定理的条件. 解的唯一性证明与以上讨论类似, 这里从略. □

4　Navier-Stokes 方程在变指标齐次 Fourier-Besov 空间上的整体适定性

如上所述, 在变指标的函数空间上考虑方程的适定性具有较大的限制. 我们很想将变指标的 Besov 空间应用于 NS 方程的整体适定性当中, 但很不幸, 由于一些经典的算子和半群估计在这类空间上所受的限制较大, 导致我们很难将这类空间应用于此类问题. 本节主要通过利用在第 1 节中引入的变指标的 Fourier-Besov 空间及其性质来考虑 NS 方程小初值的整体适定性. 在这类空间上, 我们可以克服在变指标 Besov 空间上处理 NS 方程的适定性问题时所遇到的困难.

定理 4.1　令 $p(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$, $2\leqslant p(\cdot)\leqslant 6$, $1\leqslant\gamma<\infty$, 则存在充分小的 $\varepsilon>0$, 当 $\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1}}<\varepsilon$ 时, Navier-Stokes 方程存在唯一整体解, 且满足

$$u(t)\in C(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}_{2,1}).$$

更进一步地, 若 $p_1(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$, $s_1(\cdot)\in C^{\log}(\mathbb{R}^N)$, $\frac{2}{\gamma}-\frac{3}{p_1(\cdot)}-s_1(\cdot)=-2$, 并存在常数 $c>0$, 使得 $2\leqslant p_1(\cdot)\leqslant c\leqslant p(\cdot)$, 则上述解还满足

$$u(t)\in C(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),1}).$$

注 4.1　首先, 容易验证, 当 $s(\cdot)=2-\frac{3}{p(\cdot)}$ 时, $F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),1}$ 为三维 NS 方程的临界空间. 其次, 从 Fourier-Besov 空间的结构可以发现, 这类空间与变指标的 Besov 空间具有较大的不同, 与变指标的 Besov 空间相比, 这类空间更有利于我们考虑半群算子有界性和非线性项估计等问题. 当然, 利用与定理 3.1 类似的讨论, 我们在这类空间上也可以得到 NS 方程的局部适定性.

证明　设 $M>0$, $\delta>0$ 待定. 令

$$\mathcal{D}=\{u:\|u\|_{\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1})}\leqslant M,\|u\|_{\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}_{2,1})\cap\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,1})}\leqslant\delta\},$$

其上赋度量

$$d(u,\nu)=\|u-\nu\|_{\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}_{2,1})\cap\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,1})}.$$

现在考虑映射

$$\mathcal{J}: u(t) \to H(t)u_0 - \int_0^t H(t-\tau)\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]d\tau,$$

下面将证明对适当的 $M, \delta > 0$, $\mathcal{J}: (\mathcal{D}, d) \to (\mathcal{D}, d)$ 为压缩映射.

首先,

$$\begin{aligned}
\|H(t)u_0\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}_{2,1})} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2})}\varphi_j \mathrm{e}^{-t|\cdot|^2}\widehat{u_0}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^2)} \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell=0,\pm1} \|2^{j(2-\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_j\widehat{u_0}\|_{L^{p(\cdot)}} \|2^{j(\frac{2}{\gamma}-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\mathrm{e}^{-t|\cdot|^2}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^{\frac{2p(\cdot)}{p(\cdot)-2}})} \\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|2^{j(2-\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_j\widehat{u_0}\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\lesssim \|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1}},
\end{aligned}$$

其中, 我们需要用到以下估计:

$$\begin{aligned}
\|2^{j(\frac{2}{\gamma}-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\mathrm{e}^{-t|\cdot|^2}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^{\frac{2p(\cdot)}{p(\cdot)-2}})} &\lesssim \|2^{j\frac{2}{\gamma}}2^{j(-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\mathrm{e}^{-t2^{2(j+\ell)}}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^{\frac{2p(\cdot)}{p(\cdot)-2}})} \\
&\lesssim \|2^{j\frac{2}{\gamma}}\mathrm{e}^{-t2^{2(j+\ell)}}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)} \|2^{j(-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\|_{L^{\frac{2p(\cdot)}{p(\cdot)-2}}} \\
&\lesssim \|2^{j(-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\|_{L^{\frac{2p(\cdot)}{p(\cdot)-2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|2^{j(-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\|_{L^{\frac{2p(\cdot)}{p(\cdot)-2}}} &= \inf\left\{\lambda>0: \int\left|\frac{2^{j(-\frac{3}{2}+\frac{3}{p(x)})}\varphi_{j+\ell}}{\lambda}\right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}}dx<1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda>0: \int\left|\frac{\varphi_{j+\ell}}{\lambda}\right|^{\frac{2p(x)}{p(x)-2}}2^{-3j}dx<1\right\} \\
&\lesssim \inf\left\{\lambda>0: \int\left|\frac{\varphi_{\ell}}{\lambda}\right|^{\frac{2p(2^jx)}{p(2^jx)-2}}dx<1\right\} \lesssim C.
\end{aligned}$$

进一步地, 若 $p_1(\cdot)\leqslant c\leqslant p(\cdot)$, 则

$$\begin{aligned}
\|H(t)u_0\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),1})} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|2^{js_1(\cdot)}\varphi_j\mathrm{e}^{-t|\cdot|^2}\widehat{u_0}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^{p_1(\cdot)})} \\
&\lesssim \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},\\ \ell=0,\pm1}} \|2^{j(2-\frac{3}{c})}\varphi_j\widehat{u_0}\|_{L^c}\|2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{3}{c}-\frac{3}{p_1(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\mathrm{e}^{-t2^{2(j+\ell)}}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^{\frac{cp_1(\cdot)}{c-p_1(\cdot)}})} \\
&\lesssim \|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1}},
\end{aligned}$$

其中, 我们用到了以下估计式:

$$\begin{aligned}
&\|2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{3}{c}-\frac{3}{p_1(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}\mathrm{e}^{-t2^{2(j+\ell)}}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,L^{\frac{cp_1(\cdot)}{c-p_1(\cdot)}})} \\
&\quad= \|2^{j\frac{2}{\gamma}}\mathrm{e}^{-t2^{2(j+\ell)}}\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)}\inf\left\{\lambda>0: \int\left|\frac{2^{j(\frac{3}{c}-\frac{3}{p_1(\cdot)})}\varphi_{j+\ell}}{\lambda}\right|^{\frac{cp_1(\cdot)}{c-p_1(\cdot)}}dx<1\right\}\lesssim C.
\end{aligned}$$

另一方面, 还有

$$\|\mathcal{A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),1})}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\| \int_0^t 2^{js_1(\cdot)} \varphi_j \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\cdot|^2} [\widehat{(u\cdot\nabla)u}] d\tau \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+, L^{p_1(\cdot)})} \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{1\leqslant m,n\leqslant 3} \left\| \int_0^t \|2^{j(s_1(\cdot)+1)} \varphi_j \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\cdot|^2}\|_{L^{\frac{6p_1(\cdot)}{6-p_1(\cdot)}}} \|\Delta_j u_m u_n\|_{L^{\frac{6}{5}}} d\tau \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)} \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{1\leqslant m,n\leqslant 3} \left\| \int_0^t 2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{5}{2})} \|2^{-3j\frac{6-p_1(\cdot)}{6p_1(\cdot)}} \varphi_j \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\cdot|^2}\|_{L^{\frac{6p_1(\cdot)}{6-p_1(\cdot)}}} \|\Delta_j u_m u_n\|_{L^{\frac{6}{5}}} d\tau \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)} \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{1\leqslant m,n\leqslant 3} \left\| \int_0^t 2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{5}{2})} \mathrm{e}^{-(t-\tau)2^{2j}} \|2^{-3j\frac{6-p_1(\cdot)}{6p_1(\cdot)}} \varphi_j\|_{L^{\frac{6p_1(\cdot)}{6-p_1(\cdot)}}} \|\Delta_j u_m u_n\|_{L^{\frac{6}{5}}} d\tau \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)} \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{1\leqslant m,n\leqslant 3} \left\| \int_0^t 2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{5}{2})} \mathrm{e}^{-(t-\tau)2^{2j}} \|\Delta_j u_m u_n\|_{L^{\frac{6}{5}}} d\tau \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)} \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{1\leqslant m,n\leqslant 3} \|2^{j(\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2})} \|\Delta_j u_m u_n\|_{L^{\frac{6}{5}}} \|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+)} \|2^{2j} \mathrm{e}^{-t2^{2j}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\
&\leqslant \|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}})} \|u\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{3,1}^0)}.
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})} &= \|\mathcal{A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, F\dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, F\dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})} \\
&\leqslant \|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})} \|u\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{3,1}^0)}.
\end{aligned}
$$

令 $Y := \widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}})$, 则

$$
\|\mathcal{J}u\|_Y \lesssim \|u_0\|_{F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}} + \|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})} \|u\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})}.
$$

此时取

$$
\delta = M = 2C\|u_0\|_{F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}} < 2C\varepsilon.
$$

若 ε 足够的小, 则有

$$
\|\mathcal{J}u\|_Y \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
$$

同理可证

$$
d(\mathcal{J}u, \mathcal{J}\nu) \leqslant \frac{1}{2} d(u, \nu).
$$

由压缩映射原理可得, 当 $\|u_0\|_{F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}}$ 充分小时, Navier-Stokes 方程存在唯一整体解且满足

$$
u \in \widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}).
$$

另一方面, 若令 $Z := \widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, F\dot{B}_{p_1(\cdot),1}^{s_1(\cdot)}) \cap \widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}})$, 则

$$
\|\mathcal{J}u\|_Z \lesssim \|u_0\|_{F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}} \cap F\dot{B}_{p_1(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p_1(\cdot)}}} + \|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{2}}) \cap \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})} \|u\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}})}.
$$

此时取

$$
\delta = M = 2C\|u_0\|_{F\dot{B}_{p(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}} \cap F\dot{B}_{p_1(\cdot),1}^{2-\frac{3}{p_1(\cdot)}}} < 2C\varepsilon.
$$

则当 ε 足够的小时,
$$\|\mathcal{J}u\|_Z \leqslant \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$
同理可证
$$d(\mathcal{J}u,\mathcal{J}\nu)\leqslant\frac{1}{2}d(u,\nu).$$
由压缩映射原理可得, 当 $\|u_0\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1}\cap F\dot{B}^{2-\frac{3}{p_1(\cdot)}}_{p_1(\cdot),1}}$ 充分小时, Navier-Stokes 方程存在唯一整体解且
$$u\in\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),1})\cap\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+,F\dot{B}^{2-\frac{3}{p(\cdot)}}_{p(\cdot),1}).$$
证毕. □

参考文献

1 Orlicz W. Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math, 1931, 3: 200–211
2 Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull Int Acad Pol Ser A, 1932, 8: 207–220
3 Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1034. Berlin: Springer-Verlag, 1983
4 Nakano H. Modulared Semi-Ordered Linear Spaces. Tokyo: Maruzen, 1950
5 Nakano H. Topology of Linear Topological Spaces. Tokyo: Maruzen, 1951
6 Kováčik O, Rákosnǐk J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math J, 2001, 41: 592–618
7 Cruzuribe D. The Hardy-Littlewood maximal operator on variable-L^p spaces. In: Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003), Coleccion Abierta, 64. Seville: Universidad de Sevilla Secretariado de Publicaciones, 2003, 147–156
8 Diening L. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}(R^n)$. Math Inequal Appl, 2004, 7: 245–253
9 Cruzuribe D, Diening L, Hasto P. The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces. Fract Calc Appl Anal, 2011, 14: 361–374
10 Cruzuribe D, Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Heidelberg: Birkhäuser/Springer, 2013
11 Cruzuribe D, Fiorenza A, Neugebauer C J. The maximal function on variable L^p spaces. Ann Acad Sci Fenn Math, 2003, 28: 223–238
12 Izuki M, Nakai E, Sawano Y. Function spaces with variable exponents—An introduction. Sci Math Jpn, 2014, 77: 187–315
13 Leopold H G. Interpolation of Besov spaces of variable order of differentiation. Arch Math (Basel), 1989, 53: 178–187
14 Leopold H G. On function spaces of variable order of differentiation. Forum Math, 1991, 3: 1–21
15 Leopold H G. Embedding of function spaces of variable order of differentiation in function spaces of variable order of integration. Czechoslovak Math J, 1999, 49: 633–644
16 Leopold H G, Schrohe E. Trace theorems for Sobolev spaces of variable order of differentiation. Math Nachr, 1996, 179: 223–245
17 Noi T, Sawano Y. Complex interpolation of Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents. J Math Anal Appl, 2012, 387: 676–690
18 Yang D, Zhuo C, Yuan W. Besov-type spaces with variable smoothness and integrability. J Funct Anal, 2015, 269: 1840–1898
19 Acerbi E, Mingione G. Regularity results for stationary electro-rheological fluids. Arch Ration Mech Anal, 2002, 164: 213–259
20 Råžička M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1748. Berlin: Springer-Verlag, 2000
21 Chen Y, Levine S, Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. SIAM J Appl Math, 2006, 66: 1383–1406

22 Fan X L. Global $C^{1,\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form. J Differential Equations, 2007, 235: 397–417
23 Ohno T. Compact embeddings in the generalized Sobolev space $W_0^{1,p(\cdot)}(G)$ and existence of solutions for nonlinear elliptic problems. Nonlinear Anal, 2009, 71: 1534–1541
24 Diening L. Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces. Bull Sci Math, 2005, 129: 657–700
25 Rajagopal K, Růžička M. On the modeling of electrorheological materials. Mech Res Comm, 1996, 23: 401–407
26 Diening L, Harjulehto P, Hästö P, et al. Maximal functions in variable exponent spaces: Limiting cases of the exponent. Ann Acad Sci Fenn Math, 2009, 34: 503–522
27 Luxenberg W. Banach function spaces. PhD Thesis. Assen: Delft Institute of Technology, 1955
28 Lei Z, Lin F. Global mild solutions of the Navier-Stokes equations. Comm Pure Appl Math, 2012, 64: 1297–1304
29 Ru S, Chen J. The global well-posedness of the modified quasi-geostrophic equation in frequency spaces. Appl Math Lett, 2015, 43: 1–4
30 Dhumieres D, Lallemand P, Frisch U. Lattice gas models for 3D hydrodynamics. Europhys Lett EPL, 1986, 2: 291–297
31 Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math, 1934, 63: 193–248
32 Fujita H, Kato T. On the Navier-Stokes initial value problem, I. Arch Ration Mech Anal, 1964, 16: 269–315
33 Kato T. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math Z, 1984, 187: 471–480
34 Cannone M, Meyer Y, Planchon F. Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes (in French). [Self-similar solutions of Navier-Stokes equations] Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1993–1994, Exposé VIII No. VIII. Palaiseau: École Polytech, 1994, 12pp
35 Cannone M. A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations. Rev Mat Iberoamericana, 1997, 13: 515–541
36 Giga Y, Miyakawa T. Navier-Stokes flow in R^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces. Comm Partial Differential Equations, 1989, 14: 577–618
37 Planchon F. Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. Ann Inst H Poincaré (C) Non Linéar Anal, 1996, 13: 319–336
38 Coron J, Lissy P. Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components. Invent Math, 2014, 198: 833–880
39 Koch H, Tataru D. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. Adv Math, 2001, 157: 22–35
40 Bourgain J, Pavlović N. Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D. J Funct Anal, 2008, 255: 2233–2247
41 Chemin J, Gallagher I. On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data. Ann Sci École Norm Sup (4), 2005, 39: 679–698
42 Chemin J, Gallagher I. Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. Ann Inst H Poincare Anal Non Linéaire, 2006, 26: 599–624
43 Chemin J, Gallagher I. Large, global solutions to the Navier-Stokes equations, slowly varying in one direction. Trans Amer Math Soc, 2010, 362: 2859–2873
44 Chemin J, Gallagher I, Paicu M. Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations. Ann of Math (2), 2011, 173: 983–1012
45 Wong P. Global wellposedness for a certain class of large initial data for the 3D Navier-Stokes equations. Ann Henri Poincaré, 2013, 15: 633–643
46 Abidi H, Gui G, Zhang P. Well-posedness of 3-D inhomogeneous Navier-Stokes equations with highly oscillatory initial velocity field. J Math Pures Appl (9), 2013, 100: 166–203
47 Ukhovskii M R, Iudovich V I. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space: PMM vol. 32, no. 1, 1968, pp. 59–69. J Appl Math Mech, 1968, 32: 52–61
48 Zhang P, Zhang T. Global axisymmetric solutions to three-dimensional Navier-Stokes system. Int Math Res Not IMRN, 2014, 3: 610–642
49 Chen J, Deng Q, Ding Y, et al. Estimates on fractional power dissipative equations in function spaces. Nonlinear Anal, 2012, 75: 2959–2974

50 Wang B, Huo Z, Hao C, et al. Harmonic Analysis Method for Nonlinear Evolution Equations, I. Hackensack: World Scientific, 2011
51 Ru S, Chen J. The blow-up solutions of the heat equations in $FL^1(\mathbb{R}^N)$. J Funct Anal, 2015, 269: 1264–1288
52 Diening L, Harjulehto P, Hästö P, et al. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2017. Heidelberg: Springer, 2011
53 Almeida A, Hästö P. Besov spaces with variable smoothness and integrability. J Funct Anal, 2010, 258: 1628–1655
54 Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970

Global well-posedness of the incompressible Navier-Stokes equations in function spaces with variable exponents

Shaolei Ru

Abstract In this paper, we construct a new space with variable exponents. Compared with Besov spaces with variable and Lebesgue spaces with variable, the new space can be more easily applied in the Navier-Stokes equations. Based on the semi-group estimates and time-space estimates in $F\dot{B}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$, we can obtain the global well-posedness of the incompressible Navier-Stokes equations with small initial data.

Keywords function spaces with variable exponents, Navier-Stokes equations, global well-posedness

MSC(2010) 42B25, 42B35, 35K15

doi: 10.1360/N012017-00078