论文

一种新型的多层共振结构

陈时*, 林书玉

陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710062

*E-mail: chenshi@snnu.edu.cn

收稿日期: 2011-01-04; 接受日期: 2011-09-09; 网络出版日期: 2011-10-19

中国博士后科学基金(编号:20080441161)、国家自然科学基金(批准号: 10974127)、陕西师范大学中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: GK201002007, GK200901019, GK200901022)资助项目

摘要 我们提出一种新型的多层共振结构, 即带尾巴的共振结构, 它是由尾巴层和共振层两部分构成. 这种共振结构能够在阻抗不匹配的介质间实现声波能量的有效耦合, 这种功能是传统的单层共振结构不可能具备的. 我们讨论了两类带尾巴的共振结构的特性和解释了产生这些特性的原因. 在这种新型的共振结构中, 一般而言尾巴层起振幅放大作用, 而共振层起频率选择作用.

关键词 阻抗失配, 超晶格, 传输系数, 局域模式, 共振结构

PACS: 63.22.-m, 62.30.+d, 63.20.Pw, 46.40.Cd, 68.65.-k, 43.40.+s

众所周知, 当波从阻抗大的介质入射到阻抗小的介质时, 在界面处会发生波的反射和透射. 如果两个介质的阻抗极端不匹配, 那么透射波将变得非常弱. 但是在很多情况下希望在阻抗极端不匹配的介质间实现波的有效耦合(这里所说的有效耦合意指声波的透射系数比较大, 趋于 1 的情况). 例如把固体换能器发射的声波耦合到水中或者非常软的固体(例如橡胶)中. 如果这种耦合能够实现, 那么就有望形成新型的水声换能器^[1], 或者对软物质的声学特性进行比较方便地研究. 另外在阻抗不匹配的介质间实现声波的有效耦合, 其实就是实现了界面的隐形^[2,3], 这也具有一定的运用价值.

有些作者意识到上面的问题, 也找到了他们的解决方案. 例如 Mizuno^[4-7], Martinez 等人^[8]和 Zhao 等人^[9]用理论或者实验的方法研究过固体/超晶格/流体多层结构, 此处固体和流体的阻抗是极端不匹配的. 他们发现处在超晶格禁带内的某些频率的声波

会有效地从固体耦合到流体中. 这种反常的耦合现象是由超晶格中的表面声波^[10]引起的, 这种表面波朝指向固体的一方衰减. 其实他们的结论很容易理解, 要想实现声波在固体和流体间的有效耦合, 就必须满足能量守恒. 由于固体的阻抗远大于流体, 因此流体中声波的振幅必须远大于固体中的. 而超晶格中的表面声波刚好满足这个条件, 因此导致声波的反常耦合现象(即声波能够有效地从大阻抗介质传输到小阻抗介质的现象, 其透射率比较大, 趋于 1). 换言之, 声波反常耦合现象的出现必然和声波振幅的放大效应相伴随.

在本文中我们提出一种新型的多层共振结构, 它能够实现声波振幅的放大效应, 也就是能够在阻抗极端不匹配的介质间实现声波能量的有效耦合. 而传统的单层共振结构不可能具有这样的功能. 我们把这种新型的共振结构称为带尾巴的共振结构, 它是由两个部分组成: 其一是尾巴部分, 其二是共振

引用格式: 陈时, 林书玉. 一种新型的多层共振结构. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 1287-1295

Chen S, Lin S Y. A new type of multilayered resonant structure (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 1287-1295, doi: 10.1360/132011-4

部分. 前者和大阻抗的介质相接, 其中的声波必须是衰减波(这是该部分称为尾巴的原因); 后者和小阻抗的介质相接, 其中的声波为振荡的非衰减波.

带尾巴的共振结构的共振部分由单层均匀介质构成. 尾巴部分可以用声速比较大的单层均匀介质构成. 这是一种双层结构, 即 A/B 结构, 称为 A/B 型共振结构. A 层是尾巴部分, B 层是共振部分. 在这种情况下, 声波必须是倾斜入射的, 因为只有这样才可能在尾巴层内形成衰减波^[11]. 尾巴部分也可以由超晶格(SL)构成, 称这种共振结构为 SL/RC 型共振结构. SL 是尾巴部分, RC 是共振部分. 因为超晶格具有禁带, 禁带内的声波就是衰减的. 在这种情况下, 声波既可以是倾斜入射的, 也可以是正入射的.

在带尾巴的共振结构中, 尾巴部分的主要功能是实现声波振幅的放大. 共振部分的主要功能是实现反常耦合声波的频率选择. 在这类共振结构中, 由于共振部分可以容纳很多个波长, 且其中的声波并不是衰减的, 因此该结构并不存在能量集中在低阻抗介质端的表面声波. 由此可见带尾巴的共振结构的声波振幅的放大机制和 Mizuno^[4]和 Martinez 等人^[8]的研究结果并不一样(在他们所研究的结构中, 主要是靠表面波来实现声波的反常耦合). 带尾巴的共振结构可以实现声波振幅的放大, 在低阻抗介质中产生强的声振动, 因此在研究低阻抗介质的非线性效应时可以用它来作为强声源.

对于 A/B 型共振结构, 我们只讨论硬固体和软固体(例如橡胶等)间的横声波的反常耦合现象, 对于 SL/RC 共振结构, 我们只讨论固体和流体间的纵声波的反常耦合现象, 其它类型声波的反常耦合行为与此类似.

1 A/B 型共振结构

1.1 研究的结构和问题

本节研究的结构如图 1 所示. S 是基底层, 其阻抗是大的; D 是探测器层, 其阻抗是小的. A/B 两层构成双层共振结构, 其中 A 是尾巴层, B 是共振层. 横声波(其弹性位移在 z 方向)从 S 层倾斜入射, 我们想知道 D 层中声波的透射情况, 以及透射系数趋于 1 的条件.

图 1 一个 S/A/B/D 系统, 其中 A/B 是带尾巴的共振结构
Figure 1 One S/A/B/D system, where A/B is a tail-resonant structure.

1.2 传输矩阵方法和透射系数

第 n 层的声波速度和质量密度分别为 $v^{(n)}$ 和 $\rho^{(n)}$. 系统的弹性位移都具有一个公因子, 即

$$\exp(-i\omega t)\exp(ik_y y).$$

其中 ω 和 k_y 分别是声波的角频率和在 y 方向上的波矢量.

因为入射角是 θ , 所以 $k_y = (\omega/v_s)\sin(\theta)$. 其中 v_s 是声波在 S 层的速度. 第 n 层的弹性位移 $u^{(n)}(x)$ 和垂直应力 $T^{(n)}(x)$ 可以表示如下^[12]:

$$u^{(n)}(x) = a^{(n)} \exp(ik^{(n)}x) + b^{(n)} \exp(-ik^{(n)}x), \quad (1)$$

$$T^{(n)}(x) = i\omega Z^{(n)} [a^{(n)} \exp(ik^{(n)}x) - b^{(n)} \exp(-ik^{(n)}x)]. \quad (2)$$

其中 $a^{(n)}$ 和 $b^{(n)}$ 是待定常数.

$$k^{(n)} = \omega \sqrt{1/[v^{(n)}]^2 - \sin^2(\theta)/v_s^2},$$

$$Z^{(n)} = \rho^{(n)} k^{(n)} (v^{(n)})^2 / \omega.$$

$Z^{(n)}$ 是第 n 层的声阻抗, 它们只和入射角和材料参数有关.

透射系数可以用标准的传输矩阵方法^[13]得出. 我们定义一个态矢量 $\Gamma = [u, T]^T$, 其中 u 和 T 分别表示弹性位移和垂直应力. 对于第 n 层, 左边界面(即图 1 中第 n 个界面)的态矢量表示为 $\Gamma_n = [u_n, T_n]^T$; 右边界面(即图 1 中的第 $n-1$ 个界面)的态矢量是 $\Gamma_{n-1} = [u_{n-1}, T_{n-1}]^T$. 第 n 层的传输矩阵是 M_n , 使得 $\Gamma_{n-1} = M_n \Gamma_n$. M_n 可以表示如下:

$$M_n = \begin{bmatrix} \cosh(i\alpha^{(n)}) & \sinh(i\alpha^{(n)})/[i\omega Z^{(n)}] \\ i\omega Z^{(n)} \sinh(i\alpha^{(n)}) & \cosh(i\alpha^{(n)}) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中 $\alpha^{(n)} = k^{(n)}h^{(n)}$, $h^{(n)}$ 是第 n 层的厚度.

透射系数 t_c 定义为 D 层的透射波和 S 层的入射波的能流密度之比, 可以表示为^[12]

$$t_c = \frac{4}{2 + \varepsilon(E_{11}^2 + E_{12}^2) + (1/\varepsilon)(E_{21}^2 + E_{22}^2)}. \quad (4)$$

其中 z_S, z_D 分别是基底和探测器层的阻抗. $\varepsilon = z_D/z_S$. $E = M_3 M_2$ 是系统的总传输矩阵, 它表示为

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12}/[\omega Z_S] \\ \omega Z_S E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

1.3 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 实现基底和探测器层声波反常耦合的条件

方程(4)分母中的每项都是大于零的, 这一点容易检验. 要想实现基底和探测器层声波的反常耦合, 方程(4)右边分母中的每项必须都不是非常大. 因为 $\varepsilon \ll 1$, 所以声波反常耦合的必要条件是

$$E_{21}^2 \ll 1, \quad (6)$$

$$E_{22}^2 \ll 1, \quad (7)$$

我们按如下的规则来选择材料参数和入射角: (1) $v_A > v_S, v_B < v_S$ 和 $v_D < v_S$. 此处 v_A, v_B 和 v_D 分别代表 A, B 和 D 层的声波速度. $v_A \equiv v^{(2)}, v_B \equiv v^{(3)}$ 和 $v_D \equiv v^{(4)}$. (2) 选择适当的入射角 θ , 使得 k_S, k_B 和 k_D 是实数, 但是 k_A 是纯虚数. 此处 $k_S \equiv k^{(1)}, k_A \equiv k^{(2)}, k_B \equiv k^{(3)}$ 和 $k_D \equiv k^{(4)}$, 这种选择意味着 A 层的声波是衰减波, 而其它各层的都是非衰减波.

矩阵 E 的各分量如下:

$$E_{11} = \frac{1}{2}[\exp(-i\alpha)f(A, B) + \exp(i\alpha)g(A, B)],$$

$$E_{12} = -\frac{1}{2i} \frac{Z_S}{z_A} [\exp(-i\alpha)f(A, B) - \exp(i\alpha)g(A, B)],$$

$$E_{21} = -\frac{i}{2} \frac{Z_A}{Z_S} [\exp(-i\alpha)f(B, A) - \exp(i\alpha)g(B, A)],$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}[\exp(-i\alpha)f(B, A) + \exp(i\alpha)g(B, A)],$$

$$f(B, A) = \cosh(i\beta) - \frac{z_B}{z_A} \sinh(i\beta),$$

$$f(A, B) = \cosh(i\beta) - \frac{z_A}{z_B} \sinh(i\beta),$$

$$g(B, A) = \cosh(i\beta) + \frac{z_B}{z_A} \sinh(i\beta),$$

$$g(A, B) = \cosh(i\beta) + \frac{z_A}{z_B} \sinh(i\beta). \quad (8)$$

其中, $z_A = z^{(2)}, z_B = z^{(3)}, \alpha = k_A h_A, \beta = k_B h_B$.

观察发现: (1) $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, Z_S, Z_D, Z_B$ 和 β 都是实数, 然而 α 和 Z_A 却是纯虚数. (2) $z_S > 0, z_D > 0$, 和 $i\alpha < 0$.

从方程(6)~(8), 我们可以得到在 $\varepsilon \ll 1$ 时, 实现声波的反常耦合的具体的条件为

$$f(B, A) = 0, \quad (9)$$

$$\exp(2i\alpha)/\varepsilon \gg 1, \text{ 和 } \exp(-2i\alpha)\varepsilon \gg 1. \quad (10)$$

方程(9)只是声波反常耦合的必要条件, 它消除了透射系数表达式(即方程(4))分母中的最大的项, 这些项正比于 $\exp(-2i\alpha)/\varepsilon$. 为了实现声波的反常耦合, 方程(10)也必须得到满足. 其目的是为了防止透射系数表达式的分母中出现比较大的项(而不是最大的项), 如正比于 $1/\varepsilon$ 或者 $\exp(-2i\alpha)$ 的项. 方程(10)意味着 A 层的厚度 h_A 既不能非常大, 也不能非常小. 只有适当选择 h_A 的值, 才可能实现声波的反常耦合. 随后我们会讨论 h_A 的具体选择方式.

求解方程(9), 可得反常耦合声波的频率为

$$\omega = [m\pi + \tan^{-1}(-iz_A/z_B)]/(h_B k_B'), \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

其中 $k_B' \equiv k_B/\omega, h_B$ 是 B 层的厚度.

下面讨论方程(10)的具体表达形式. 一般而言, 如果确定了反常耦合声波的频率(如用方程(11)), 那么就可以通过使透射系数最大化的程序来确定 h_A 的优化取值. 为了表述的简洁, 把方程(4)改写为

$$t_c = \frac{4}{2 + M(h_A)}, \quad (12)$$

其中

$$M(h_A) = \varepsilon(E_{11}^2 + E_{12}^2) + (1/\varepsilon)(E_{21}^2 + E_{22}^2),$$

且

$$M(h_A) > 0.$$

当声波的频率、入射角 θ, h_B 和材料参数都确定后, 它只是 h_A 的函数. $M(h_A)$ 只有一个最小值点, 它对应着最大的透射系数. 这个最小值点可以用下面的方程求出

$$\frac{d}{dh_A} M(h_A) = 0. \quad (13)$$

方程(13)可以具体表示为

$$b \exp(2i\alpha) - c \exp(-2i\alpha) = 0. \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4\varepsilon} g^2(B, A)H + \frac{\varepsilon}{4} g^2(A, B)L, \\ c &= \frac{1}{4\varepsilon} f^2(B, A)H + \frac{\varepsilon}{4} f^2(A, B)L, \\ H &= 1 + \left(\frac{iz_A}{z_s} \right)^2, \quad L = 1 + \left(\frac{z_s}{iz_A} \right)^2. \end{aligned}$$

方程(14)只有一个解, 从此可以得到对应最大透射系数的 A 层的最优厚度 $h_A^{\max}$ 为

$$h_A^{\max} = -\frac{1}{4ik_A} \ln\left(\frac{b}{c}\right). \quad (15)$$

方程(15)是方程(10)的具体表达形式, 是 A 层厚度的最优化选择方式.

顺便提及, 在 $\varepsilon \ll 1$ 的情况下, 如果 B 层内的声波是非衰减的, 那么 A 层内的声波必须是衰减的, 否则无法实现声波的有效耦合.

为了更加深刻地理解该多层共振结构的声波反常耦合现象, 有必要从其它的角度来考察必要条件方程(9). 其实方程(9)也是一个 A/B 双层结构(注意并非 S/A/B/D 系统中的 A/B 双层结构)的局域声波模式的色散方程. 在这个 A/B 双层结构中, A 层的厚度是无限的, B 层的厚度是有限的, B 层和真空相接. 关于这一点的证明是直接的, 限于篇幅的原因不再赘述. 这意味着 A/B 双层结构存在局域声波模式和 S/A/B/D 系统存在声波的反常耦合是联系在一起的, 因此可以认为 S/A/B/D 系统中声波的反常耦合是由局域声波引起的. 这里所谓的局域声波是指: 声波限制在 B 层, 而不是限制在 B 层和真空的界面处. 做这样区别的原因是 B 层的厚度可以是任意大的. 这说明了导致声波反常耦合的原因是局域声波, 而不是限制在 B 和 D 层界面处的表面声波. 这是与 Mizuno^[4] 和 Martinez 等人^[8]的研究结果不一样的地方.

2 SL/RC 型共振结构

2.1 研究的结构和问题

本节研究的结构如图 2 所示. S 是基底层, 其阻抗是大的; D 是探测器层, 其阻抗是小的. 超晶格 SL(其周期数为 N)和 RC 层组成带尾巴的共振结构, 其中 SL 是尾巴部分, RC 是共振部分. A, B 和 C 层的

图 2 一个 S/SL/RC/D 系统, 其中 SL/RC 是带尾巴的共振结构

Figure 2 One S/SL/RC/D system, where SL/RC is a tail-resonant structure.

厚度分别是 h_A , h_B 和 h_C . 纵声波(其弹性位移在 x 方向)从 S 层正入射, 我们想知道 D 层中声波的透射情况, 以及透射系数趋于 1 的条件.

2.2 透射系数

透射系数依然由方程(4)确定, 我们只需要确定系统的总的传输矩阵 E 就行了.

因为只考虑正入射的情况, 每层的波矢量 $k^{(n)}$ 必然是实数, 所以第 n 层的传输矩阵 M_n 可以表示如下:

$$M_n = \begin{bmatrix} \cos \alpha^{(n)} & \frac{1}{\omega Z^{(n)}} \sin \alpha^{(n)} \\ -\omega Z^{(n)} \sin \alpha^{(n)} & \cos \alpha^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

系统的总的传输矩阵可以表示为 $E = M_C M_{SL}$, 其中 M_C 是 RC 层的传输矩阵, M_{SL} 是超晶格的传输矩阵. 超晶格的传输矩阵可以表示为 $M_{SL} = M_{BA}^N$, M_{BA} 是超晶格一个周期的传输矩阵. $M_{BA} = M_B M_A$, 其中 M_B 和 M_A 分别是 B 和 A 层的传输矩阵.

从文献中[12]中, 可以查到 M_{BA} 和 M_{BA}^N 矩阵的具体形式如下:

$$\begin{aligned} M_{BA} &= \begin{bmatrix} \lambda & \frac{1}{\omega Z_A} \sigma \\ \omega Z_A \zeta & \mu \end{bmatrix}, \\ M_{BA}^N &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda - \mu}{2} S' + C' & \frac{1}{\omega Z_A} \sigma S' \\ \omega Z_A \zeta S' & -\frac{\lambda - \mu}{2} S' + C' \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

其中 Z_A 是 A 层的阻抗, 且

$$\lambda = \cos \alpha \cos \beta - \frac{Z_A}{Z_B} \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sin \alpha \cos \beta + \frac{Z_A}{Z_B} \cos \alpha \sin \beta, \\ \zeta &= -\sin \alpha \cos \beta - \frac{Z_B}{Z_A} \cos \alpha \sin \beta, \\ \mu &= \cos \alpha \cos \beta - \frac{Z_B}{Z_A} \sin \alpha \sin \beta,\end{aligned}\quad (18)$$

其中

$$\alpha = k_A h_A, \quad \beta = k_B h_B.$$

k_A 和 k_B 分别是 A 和 B 层的波矢量, $k_A = \omega/v_A$, $k_B = \omega/v_B$.

$$S' = S'(N) = \begin{cases} \sin(N\theta') / \sin \theta', & \text{当 } |p| \leq 1, \\ \sinh(N\theta') / \sinh \theta', & \text{当 } p > 1, \\ (-1)^{N+1} \sinh(N\theta') / \sinh \theta', & \text{当 } p < -1, \end{cases} \quad (19)$$

$$C' = C'(N) = \begin{cases} \cos(N\theta'), & \text{当 } |p| \leq 1, \\ \cosh(N\theta'), & \text{当 } p > 1, \\ (-1)^N \cosh(N\theta'), & \text{当 } p < -1, \end{cases} \quad (20)$$

其中 θ' 是

$$\begin{cases} \cos \theta' = p, & \text{当 } |p| \leq 1, \\ \cosh(\theta') \equiv p, & \text{当 } p > 1, \\ \cosh(\theta') \equiv -p, & \text{当 } p < -1, \end{cases} \quad (21)$$

此处 $\theta' > 0$, $p = (\lambda + \mu)/2$. 如果 $|p| \leq 1$, 那么波处在超晶格的通带内; 如果 $|p| > 1$, 那么波处在超晶格的禁带内^[12].

2.3 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 实现基底和探测器层声波反常耦合的条件

为了简单起见, 假设 $S=A$, 即 S 层和 A 层的介质是一样的. 从方程(6)和(7), 声波反常耦合的条件可以表示为

$$E_{21} = -\left(\frac{\lambda - \mu}{2} S' + C'\right) \frac{Z_C}{Z_A} \sin \gamma + \zeta S' \cos \gamma \approx 0, \quad (22)$$

$$E_{22} = -\sigma S' \frac{Z_C}{Z_A} \sin \gamma + \left(-\frac{\lambda - \mu}{2} S' + C'\right) \cos \gamma \approx 0. \quad (23)$$

其中 $\gamma = k_C h_C$, k_C 是 RC 层的波矢量, $k_C = \omega/v_C$. 在这一小节中, 我们将导出声波反常耦合的必要条件的明显表达式. 下面分三种情况进行讨论:

(1) $|p| \leq 1$ 的情况

在这种情况下, 声波处在超晶格的通带内. 如果

把 $\frac{Z_C}{Z_A} \sin \gamma$ 和 $\cos \gamma$ 当成两个任意的变量, 那么可以

证明方程(22)和(23)的系数矩阵的行列式等于 1. 方程(22)和(23)同时成立的条件是: $\sin \gamma = 0$ 和 $\cos \gamma = 0$, 这显然是不可能的. 因此当声波的频率处在超晶格的通带内时, 即 $|p| \leq 1$, 不可能实现基底和探测器层声波的反常耦合.

(2) $p > 1$ 的情况

在这种情况下, 声波的频率处在超晶格的禁带内. E_{21} 和 E_{22} 可以进一步表示如下:

$$E_{21} = e^{N\theta'} \bar{F}(A, B, C) + e^{-N\theta'} \bar{G}, \quad (24)$$

$$E_{22} = e^{N\theta'} F(A, B, C) + e^{-N\theta'} G. \quad (25)$$

其中, $\bar{F}(A, B, C)$ 和 $F(A, B, C)$ 依赖于 A, B 和 C 层的材料和几何参数, 如下:

$$\begin{aligned}\bar{F}(A, B, C) &= -\left(\frac{\lambda - \mu}{2} \frac{1}{2 \sinh \theta} + \frac{1}{2}\right) \frac{Z_C}{Z_A} \sin \gamma \\ &\quad + \frac{\zeta}{2 \sinh \theta} \cos \gamma,\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}F(A, B, C) &= -\frac{\sigma}{2 \sinh \theta} \frac{Z_C}{Z_A} \sin \gamma \\ &\quad + \left(-\frac{\lambda - \mu}{2} \frac{1}{2 \sinh \theta} + \frac{1}{2}\right) \cos \gamma.\end{aligned} \quad (27)$$

因为 $\bar{G}$ 和 G 可以直接导出, 且在我们的推理过程中并不用到, 所以省略掉它们的具体表达式.

因为 $\theta' > 0$, 所以声波反常耦合的必要条件为

$$\bar{F}(A, B, C) = 0, \quad F(A, B, C) = 0. \quad (28)$$

如果把 $Z_C/Z_A \sin \gamma$ 和 $\cos \gamma$ 当成两个任意的变量, 那么可以证明方程(28)的系数矩阵的行列式等于零. 这意味着方程(28)中的两个方程是一样的. 因此在这种情况下, 声波处在超晶格的禁带内, 声波反常耦合的必要条件是 $F(A, B, C) = 0$.

值得注意的是 $F(A, B, C) = 0$ 仅仅是声波反常耦合的必要条件. 当它满足时, 我们有

$$(1/\varepsilon)(E_{21}^2 + E_{22}^2) \propto e^{-2N\theta}/\varepsilon, \quad \varepsilon(E_{11}^2 + E_{12}^2) \propto e^{2N\theta}\varepsilon.$$

因此为了实现声波的反常耦合, 必须适当选择超晶格的周期数 N , 使得 $e^{-2N\theta}/\varepsilon$ 和 $e^{2N\theta}\varepsilon$ 都不是很大.

(3) $p < -1$ 的情况

在这种情况下, 声波依然处在超晶格的禁带内. 声波的反常耦合现象可以出现, 同理可得声波反常耦合的必要条件是 $H(A, B, C) = 0$, 此处

$$H(A, B, C) = -\frac{\sigma}{2 \sinh \theta} \frac{Z_C}{Z_A} \sin \gamma + \left(-\frac{\lambda - \mu}{2} \frac{1}{2 \sinh \theta} - \frac{1}{2} \right) \cos \gamma. \quad (29)$$

实现声波反常耦合的必要条件 $F(A, B, C)=0$ 或者 $H(A, B, C)=0$ 其实也是 SL/RC 结构中的局域声波的色散方程. 在这个 SL/RC 结构中, 超晶格 SL 的周期数是无限的, RC 层的厚度是有限的, RC 层和真空相接. 关于这一点的证明是直接的, 限于篇幅的原因不再赘述. 这里所谓的局域声波是指: 声波限制在 RC 层内, 而不是限制在 RC 层和真空的界面处. 做这样区别的原因是 RC 层的厚度可以是任意大的. 这说明了导致声波反常耦合的原因是局域声波, 而不是限制在 RC 和 D 层界面处的表面声波. 这是与 Mizuno^[4] 和 Martinez 等人^[8]的研究结果不一样的地方.

3 数值计算例子和讨论

在本节中, 我们用数值计算方法演示前面提到的两类带尾巴的共振结构(即 A/B 和 SL/RC 型共振结构)的特征. 所用到的材料参数来自于文献[9,14,15], 把它们列出如下: 对于铁, $\rho=7.87 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_T=3.839 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$; 对于熔融石英, $\rho=2.2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_T=3.766 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$; 对于氧化锰, $\rho=3.65 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_T=6.368 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$; 对于橡胶, $\rho=1.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_T=5.547 \text{ m s}^{-1}$; 对于铝, $\rho=2.716 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_L=6.17 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$; 对于玻璃, $\rho=2.427 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_L=5.4 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$; 对于液氢(^4He), $\rho=1.25 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu_L=2.39 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$. 其中 ν_T 代表横声波的速度, ν_L 代表纵声波的速度.

考虑一个 S/D 系统, S 是基底, D 是探测器, 它们的厚度都是无限的. 图 3 显示了阻抗比和透射系数与入射角的关系. 从图中可见, 当入射声波只要不是和界面几乎平行时, 由于阻抗比非常大, 透射系数几乎趋于零.

在 S/D 系统中插入一个带尾巴的共振结构, 即 A/B 双层结构, 就变成 S/A/B/D 系统. 图 4 显示声波以 $\pi/4$ 入射角倾斜入射时的 3 个最低阶的反常透射峰. 透射峰意味着声波在基底和探测器层间的反常耦合. 3 个透射峰的峰值角频率分别是 0.3409, 1.2533 和 2.1659 Mrad/s, 它们和方程(9)或者(11)确定的频率是一样的. 这意味着这种反常耦合现象是由限制在 B

图 3 S/D 系统中阻抗比和透射系数与入射角的关系

S=铁, D=橡胶

Figure 3 The impedance ratio and the transmission coefficient versus the incidence angle of waves in the S/D system, where S=Fe, D=rubber.

图 4 S/A/B/D 系统中最低阶的 3 个反常的透射峰

S=铁, A=氧化锰, B=熔融二氧化硅, D=橡胶, $h_B=18 \text{ mm}$, $\theta=\pi/4$

Figure 4 The lowest three abnormal transmission peaks in the S/A/B/D system, here S=Fe, A=MnO, B=fused SiO_2 , D=rubber, $h_B=18 \text{ mm}$, $\theta=\pi/4$.

层中的局域模式引起的. 图中还显示了对于不同的透射峰, 为了达到较好的声波耦合效果, 尾巴层的厚度也必须适当选择. 图 5 显示了最低阶的 3 个反常耦合频率的透射系数和 A 层厚度的关系. 角频率为 0.3409, 1.2533 和 2.1659 Mrad/s 的声波, 对应最大透射系数时的 h_A 分别是 97.2, 26.5 和 15.3 mm. 这些最优化的 A 层厚度和用方程(15)确定的是一样的. 从图 5 中也可以看到: 对于某个确定角频率的声波, 其透射峰只有一个. 这和方程(14)预言的结果是一致的.

图 6 显示了 S/A/B/D 系统的 3 个最低阶的透射峰

图 5 S/A/B/D 系统中最低阶的 3 个反常耦合频率的透射系数和 A 层厚度的关系

S=铁, A=氧化锰, B=熔融石英, D=橡胶, $h_B=18$ mm, $\theta=\pi/4$. 其中角频率的单位是 Mrad/s

Figure 5 The relation between h_A and the transmission coefficient of the lowest three abnormal transmission waves in the S/A/B/D system, here S=Fe, A=MnO, B=fused SiO₂, D=rubber, $h_B=18$ mm, $\theta=\pi/4$. The used unit of angle frequency is Mrad/s.

图 6 S/A/B/D 系统中 3 个最低阶的共振峰对应的场分布
S=铁, A=氧化锰, B=熔融二氧化硅, D=橡胶, $h_B=18$ mm, $\theta=\pi/4$, $t_c=0.98$

Figure 6 The field distribution of the lowest three abnormal transmission waves in the S/A/B/D system, here S=Fe, A=MnO, B=fused SiO₂, D=rubber, $h_B=18$ mm, $\theta=\pi/4$, $t_c=0.98$.

的场分布. 从图中可见: (1) A 层中的场是衰减的, 好像一个尾巴一样, 因此把 A 层称为尾巴层. 它起声波振幅的一级放大的作用. (2) B 层中的场是振荡的, 它并不限制在 B 和 D 层的界面处, 因此它并不是一个表面波. 当透射峰的阶数越高时, B 层容纳的波长数量就越多. 在 B 层中声波的振幅进一步放大(声波振

幅的二级放大), 这种放大是由 B 层中两个部分振荡波的相位调制造成的(即调节两个部分波的相位, 使得在和低阻抗介质相接段干涉增强, 振幅较大; 使得在和尾巴层相接端干涉相消, 振幅较小. 从而实现声波振幅的二级放大), 而不是由衰减波引起的. 在这种情况下其实二级放大的效果比一级放大的更明显. 这是和 Mizuno^[4]和 Martinez 等人^[8]的研究结果并不一样的地方.

图 7(a)显示了完美的 AB 超晶格中 p 和声波角频率的关系. 在两个箭头所指示的区域内, $P < -1$, 该区域是超晶格中声波的第 1 禁带. 图 7(b)显示了 S/SL/D 系统中声波的透射系数. 在这种情况下, 在超晶格的每个禁带内最多只存在一个透射峰^[4,8,9]. 图 7(c)显示了 S/SL/RC/D 系统中声波的透射系数. 在这种情况下, 在超晶格的每个禁带内可以存在多个透射峰, 这是和 S/SL/D 系统的情况不一样的地方. 图中显示在超晶格的第 1 禁带内存在 3 个透射峰, 它们的中心频率分别是 8.5509, 9.0384 和 9.5271 Mrad/s. 这些透射峰的中心频率和由方程 $H(A, B, C)=0$ 确定的频率是一样的. 这意味着这种反常耦合现象是由限制在 RC 层中的局域模式引起的.

图 7 S/SL/RC/D 系统中声波的透射系数

(a) AB 超晶格中 p 和角频率的关系; (b) S/SL/D 系统中声波的透射系数; (c) S/SL/RC/D 系统中声波的透射系数. 在这 3 个子图中:

A=铝, B=玻璃, D=液氦, RC=B, S=A, $h_A=h_B=1$ mm, $h_C=30$ mm

Figure 7 Frequency dependence of the transmission coefficient of waves in the S/SL/RC/D system. (a) Frequency dependence of P in the A/B superlattice; (b) the transmission coefficient of waves in the S/SL/D system; (c) the transmission coefficient of waves in the S/SL/RC/D system. In all the panels, A=Al, B=glass, D=He, RC=B, S=A, $h_A=h_B=1$ mm, $h_C=30$ mm.

图 8 显示了 S/SL/RC/D 系统中声波透射峰的场分布. 从图中可见: (1) 当出现声波在基底和探测器层间的反常耦合时, 超晶格中的声波是衰减的. 因此超晶格层可以看成是尾巴. 整个共振结构的振幅放大效应几乎在尾巴部分完成, 而共振部分不再起振幅放大作用(它只起频率选择作用). (2) 在 RC 层中声波是振荡的, 不存在振幅的衰减. 声波的能量并不集中在 RC 和 D 层的界面, 而是充满整个 RC 层. 由此可见, 引起声波反常耦合的不是表面声波(其能量限

图 8 S/SL/RC/D 系统中声波透射峰的场分布

(a) 第一禁带内的第 2 个透射峰的场分布, $\omega=8.7095$ Mrad/s, $t_c=0.9486$; (b) 第一禁带内的第 4 个透射峰的场分布, $\omega=9.1110$ Mrad/s, $t_c=0.9709$; (c) 第一禁带内的第 6 个透射峰的场分布, $\omega=9.3318$ Mrad/s, $t_c=0.9236$. 在这 3 个子图中: A=铝, B=玻璃, D=液氮, RC=B, S=A, $h_A=h_B=1$ mm, $h_C=80$ mm, $N=13$

Figure 8 The field distribution of the lowest three abnormal transmission waves in the first stopband of the S/SL/RC/D system. (a) The field distribution of the second abnormal transmission wave, where $\omega=8.7095$ Mrad/s, $t_c=0.9486$; (b) the field distribution of the fourth abnormal transmission wave, where $\omega=9.1110$ Mrad/s, $t_c=0.9709$; (c) the field distribution of the sixth abnormal transmission wave, where $\omega=9.3318$ Mrad/s, $t_c=0.9236$. In all the panels, A=Al, B=glass, D= 4 He, RC=B, S=A, $h_A=h_B=1$ mm, $h_C=80$ mm, $N=13$.

制在 RC 和 D 层的界面处), 而是局域声波(其能量限制在整个 RC 层中). 这是和文献中的结论^[4,8,9]不一样的地方.

4 结论

在本文中, 我们提出了一种新型的共振结构, 即带尾巴的共振结构. 它能够在阻抗极端不匹配的介质间实现声波能量的有效耦合, 而传统的单层共振结构却不具有这样的功能. 用解析和数值计算的方法, 我们讨论了 A/B 型和 SL/RC 型共振结构的普遍的特点, 得出的主要结论如下:

(1) A/B 型和 SL/RC 型共振结构都能够实现阻抗不匹配介质间声波的反常耦合. 这种效应是由局域声波(能量限制在整个共振层)引起的, 而不是由表面声波(能量限制在共振层和低阻抗介质的界面处)引起的.

(2) 在 A/B 型共振结构中, 尾巴部分的功能是实现声波振幅的一级放大; 共振部分的功能有二, 其一是实现反常耦合声波的频率选择, 其二是实现声波振幅的二级放大. 在 SL/RC 型共振结构中, 尾巴部分的功能是实现声波振幅的放大(整个 SL/RC 型共振结构的振幅放大效应在尾巴部分完成); 共振部分的功能是实现反常耦合声波的频率选择.

(3) 在超晶格的一个禁带内, S/SL/RC/D 系统可以存在多个透射峰, 而 S/SL/D 系统最多只能存在一个透射峰.

带尾巴的共振结构在下面几个方面具有一定的运用价值: (1) 由于它具有振幅放大效应, 在研究低阻抗介质的非线性效应时, 它也许可以作为强声源; (2) 由于它具有声波反常耦合效应, 它可以形成新型的水声换能器和水听器; (3) 在界面隐形方面也有望具有一定的应用.

致谢 衷心感谢匿名审稿专家提出的具有启发性的意见.

参考文献

- 1 Fleming R A G, Jones D F, Reithmeier C G. Broadband cluster transducer for underwater acoustics applications. J Acoust Soc Am, 2009, 126: 2285–2293
- 2 Farhat M, Guenneau S, Enoch S. Ultrabroadband elastic cloaking in thin plates. Phys Rev Lett, 2009, 103: 024301

- 3 Farhat M, Guenneau S, Enoch S, et al. Cloaking bending waves propagating in thin elastic plates. *Phys Rev B*, 2009, 79: 033102
- 4 Mizuno S. Theoretical study on resonant transmission of acoustic phonons propagating through a superlattice-liquid interface. *Phys Rev B*, 2000, 63: 035301
- 5 Mizuno S. Phonon propagation through a superlattice-solid interface: Localized vibrational modes and resonant transmission. *Physica E*, 2003, 17: 318–319
- 6 Mizuno S. Acoustic phonons localized at an interface between superlattice and liquid. *Appl Surf Sci*, 2002, 190: 195–199
- 7 Mizuno S. Resonant interaction of bulk phonons with phonons localized at a superlattice-liquid interface. *Physica B*, 2002, 316: 230–233
- 8 Martinez B M, Mendieta F R. Propagation of acoustic waves through finite superlattices: Transmission enhancement by surface resonance assistance. *Phys Rev B*, 2002, 66: 092302
- 9 Zhao D G, Wang W G, Liu Z Y, et al. Peculiar transmission property of acoustic waves in a one-dimensional layered phononic crystal. *Physica B*, 2007, 390: 159–166
- 10 El Boudouti E H, Djafari-Rouhani B, Akjouj A, et al. Acoustic waves in solid and fluid layered materials. *Surf Sci Rep*, 2009, 64: 471–594
- 11 Chen S, Lin S Y, Wang Z H. Delocalized waves in one-dimensional disordered layered systems with oblique incidence. *Solid State Commun*, 2010, 150: 285–288
- 12 Mizuno S, Tamura S. Impurity levels and resonant transmission of acoustic phonons in a double-barrier system. *Phys Rev B*, 1992, 45: 13423–13430
- 13 Lowe M J S. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control*, 1995, 42: 525–542
- 14 Auld B A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. 2nd ed. Malabar, FL: Krieger, 1990. Vol. 1
- 15 Yan Z Z, Zhang C Z, Wang Y S. Wave propagation and localization in randomly disordered layered composites with local resonances. *Wave Motion*, 2010, 47: 409–420

A new type of multilayered resonant structure

CHEN Shi* & LIN ShuYu

School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China

We propose a new type of multilayered resonant structure that is named as tail-resonant structure. It is composed of two components, i.e., a tail component and a resonance component. Compared with traditional monolayered resonant structures, tail-resonant structures have a unique advantage, i.e., it can realize the effective coupling of waves from one medium with large impedance to the other medium with extremely small impedance. By using analytical and numerical methods, we discuss propagation properties of elastic waves in two kinds of tail-resonant structures. In these resonant structures, the tail component can amplify the amplitude of waves; the resonant component can choose proper frequencies of waves for realizing the effective coupling of waves between two media with large impedance mismatching.

impedance mismatching, superlattices, transmission coefficient, localized modes, resonant structures

PACS: 63.22.-m, 62.30.+d, 63.20.Pw, 46.40.Cd, 68.65.-k, 43.40.+s

doi: 10.1360/132011-4