中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 7 期: 873～891
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

抽象控制不等式的理论基础

杨定华

四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610066

E-mail: yangdinghua@msn.com; yangdinghua@yahoo.com.cn

收稿日期: 2008-04-27; 接受日期: 2008-12-08

国家重点基础研究发展规划基金 (批准号: 2004CB318003) 和四川省教育厅自然科学重点基金 (批准号: 07ZA087) 资助项目

摘要 用公理化的方法, 提出了抽象平均、抽象凸函数和抽象控制等概念, 它们分别是平均、凸函数和控制等概念的相应推广. 通过逻辑演绎, 建立了抽象控制不等式的基本定理: 对任意的抽象平均 Σ 和 Σ', 以及区间 I 上任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $f(x)$, 如果 $x_i, y_i \in I$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 满足 $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, 则有 $\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1),f(y_2),\ldots,f(y_n)\}$, 它是控制不等式基本定理的延伸和推广. 另外通过提出抽象向量平均等概念, 将这个基本定理推广到 n 维空间, 建立了抽象向量平均的基本控制不等式: 对于任意对称凸集 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{S}$ 上的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 如果 $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathcal{S}$ 满足 $\bar{x} \prec_n^{\Sigma} \bar{y}$, 则有 $\varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(\bar{y})$; 如果向量组 $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i \in \mathcal{S}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 满足 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m\} \prec_n^{\overline{\Sigma}} \{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m\}$, 则有 $\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1),\varphi(\bar{x}_2),\ldots,\varphi(\bar{x}_m)\} \geqslant \Sigma'\{\varphi(\bar{y}_1),\varphi(\bar{y}_2),\ldots,\varphi(\bar{y}_m)\}$.

关键词 抽象平均 抽象凸函数 抽象控制 抽象控制不等式

MSC(2000) 主题分类 26A51, 26B25, 39B62, 52A01, 60E15

1 引言

众所周知, 不等式在数学的各个领域发挥着重要的作用, 尤其在以分析为主要研究工具的学科或领域. 例如, 数学中许多结论的证明往往都要用到已知的不等式, 或者所要证明的结论常常归结为证明某个不等式. 但不等式作为一门系统的学科则是 1934 年 Hardy 等 [1] 出版《Inequalities》一书以后的事, 这是举世公认的, 该书的影响深远, 是数学上的一本经典著作. 1961 年 Beckenbach 和 Bellman[2] 所著的《Inequalities》一书, 包含了 1934–1960 年期间得到的关于不等式的某些结果. 另外, 1970 年 Mitrinović 和 Vasic[3] 出版的《Analytic Inequalities》一书, 除了介绍一般不等式外, 重点收集了 450 个特殊不等式. 2004 年匡继昌 [4]所著《常用不等式》(第三版) 则收录了五千多个不等式.

在不等式理论得到深入而广泛的发展和应用过程中, 其中控制 (或优化) 不等式的发展尤其迅速. 控制不等式在 1903 年被 Muirhead 等人所注意和使用, 1923 年 Schur 等人又对其

引用格式: 杨定华. 抽象控制不等式的理论基础. 中国科学 A, 2009, 39(7): 873–891
Yang D H. The fundamental principle of abstract majorization inequalities. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0160-1

进行了深入的研究, 但控制不等式成为一门新的学科, 则是在 1979 年 Marshall 和 Olkin[5] 出版著名的《Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications》一书后. 该书的出版引起人们对控制不等式的广泛兴趣, 被大量的文献所引用. 1990 年, 王伯英 [6] 出版了《控制不等式基础》一书, 推动了国内对控制不等式的研究.

控制不等式几乎渗透到数学的各个领域而且处处扮演着精彩的角色. 原因在于它不仅能深刻地描述许多数学量之间的内在本质关系, 得到所需要的结论, 还能把许多已有的从不同方法得来的不等式用一种统一的方法简便地推导出来, 它更是推广已有的不等式、发现新的不等式的一种强有力的工具. 控制不等式在各种应用性较强的学科或领域中的应用, 更加显示了它迷人的魅力.

在控制不等式理论中, 最基础、最重要的是下面的两类控制不等式:

引理 1.1[1,3] 设 $\alpha_i, \beta_i \in I$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, 令 $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 $\bar{\alpha} \prec_n^+ \bar{\beta}$ 的充分必要条件是: 对定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的任意连续算术上凸函数 $f(x)$, 都有

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \cdots + f(\alpha_n) \geqslant f(\beta_1) + f(\beta_2) + \cdots + f(\beta_n), \tag{1.1}$$

当 $f(x)$ 为严格算术下凸函数时, 不等式 (1.1) 等号成立的充要条件是: 存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$, 使得 $\alpha_k = \beta_{\sigma(k)}$. 当 $f(x)$ 在 I 上是连续的算术下凸函数时, 不等式 (1.1) 反向.

引理 1.2[6] 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 是对称凸集, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathcal{S}$, 则 $\bar{\alpha} \prec_n^+ \bar{\beta}$ 的充分必要条件是: 对定义在 $\mathcal{S}$ 上的任意 n 元对称算术上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 有

$$\varphi(\bar{\alpha}) \geqslant \varphi(\bar{\beta}), \tag{1.2}$$

当 $\varphi(\bar{x})$ 为严格算术下凸函数时, 不等式 (1.2) 等号成立的充要条件是: 存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$, 使得 $\alpha_k = \beta_{\sigma(k)}$. 当 $\varphi(x)$ 在 $\mathcal{S}$ 上是连续的算术下凸函数时, 不等式 (1.2) 反向.

注意, 在引理 1.1 和 1.2 中的算术上 (下) 凸函数, 就是我们通常所指的上 (下) 凸函数, 这里加上 "算术" 二字, 是为了与下文中所提到的其它上 (下) 凸函数 (如几何上 (下) 凸函数) 相区别和对应.

这两个结论有着广泛的应用, 人们常常用它来推广已有的许多不等式或者发现新不等式, 例如, 用不等式 (1.1) 或 (1.2) 不仅可以推导出几乎所有的基本不等式, 甚至可以给予某些不等式本质上的推广. 因此不等式 (1.1) 和 (1.2) 是不等式理论的基础内容和基本工具, 在不等式领域中扮演着最重要的角色.

为了拓广控制不等式的应用, 作者在文献 [7] 中建立了与不等式 (1.1) 类似的、涉及几何平均的控制不等式.

引理 1.3[7] 设 $g(x)$ 是在 $\mathbb{R}_+$ 上连续的严格几何下凸函数, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 满足: $\bar{\alpha} \prec_n^\times \bar{\beta}$ (即几何控制, 具体见文献 [7]), 则成立不等式

$$g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) \geqslant g(\beta_1) g(\beta_2) \cdots g(\beta_n), \tag{1.3}$$

等号成立的充要条件是: 存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$, 使得 $\alpha_k = \beta_{\sigma(k)}$. 当 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是连续的严格几何上凸函数时, 不等式 (1.3) 反向.

事实上, 只要在不等式 (1.1) 两边除以 n, 在不等式 (1.3) 两边开 n 次方, 则不等式 (1.1) 的本质在于: $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ 的算术平均不小于 $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n)$ 的算术平均. 不等式 (1.3) 的本质在于: $g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_n)$ 的几何平均不小于 $g(\beta_1), g(\beta_2), \ldots, g(\beta_n)$ 的几何平均. 那么有没有类似于不等式 (1.1) 和 (1.3) 形式的控制不等式, 不等式左右两边是 $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ 与 $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n)$ 或者 $g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_n)$ 与 $g(\beta_1), g(\beta_2), \ldots, g(\beta_n)$ 某种广泛的平均, 而不仅仅限于算术平均或几何平均? 或者等价的, 有没有不等式 (1.1) 和 (1.3) 的一个统一推广, 并且涉及某种比较广泛的平均的基本控制不等式?

这个问题的回答是肯定的. 在本文中, 我们应用公理化的方法, 提出了抽象平均、抽象凸函数和抽象控制等概念, 它们分别是平均、凸函数和控制等概念的相应推广. 本文通过逻辑演绎, 建立了抽象控制不等式的基本定理: 对任意的抽象平均 Σ 和 Σ', 以及任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $f(x)$, 如果 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 则 $\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}$. 这类不等式是控制不等式基本定理的延伸与推广. 另外, 通过提出抽象向量平均等概念, 将这个基本定理推广到 n 维空间, 建立了抽象向量平均的基本控制不等式: 对于任意对称凸集 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{S}$ 上的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 如果 $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathcal{S}$ 满足 $\bar{x} \prec_n^{\Sigma} \bar{y}$, 则有 $\varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(\bar{y})$. 这个不等式不仅是不等式 (1.1) 和 (1.3) 的本质推广, 而且还是不等式 (1.2) 抽象化结果和自然推广. 另外, 我们对这个基本不等式还作了进一步的推广: 如果向量组 $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 满足 $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_m\} \prec_m^{\bar{\Sigma}} \{\bar{y}_1, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_m\}$, 则有 $\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1), \varphi(\bar{x}_1), \ldots, \varphi(\bar{x}_m)\} \geqslant \Sigma'\{\varphi(\bar{y}_1), \varphi(\bar{y}_1), \ldots, \varphi(\bar{y}_m)\}$.

2 抽象平均的基本概念和性质

为书写方便, 我们限定所讨论的问题总是限定在实数域 $\mathbb{R}$ 上, 如果没有特殊的说明, 我们假定所有的变量或权系数总是限定在实数域 $\mathbb{R}$ 或非负实数集 $\mathbb{R}_+$ 或正实数集 $\mathbb{R}_{++}$ 的某个区间 I(或 I') 上, 并且总是满足定义、引理、定理、推论中函数定义域的所需要求, 因此在没有特别说明的地方就不标注所有的变量或权系数的定义域.

我们从抽象平均的定义开始.

定义 2.1 连续函数 $\Sigma(\bar{x}, \bar{p}) = \Sigma\{x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \ldots, x_n^{(p_n)}\}$, 如果满足

(1) 自变量齐一次: 对任意给定的 $\lambda \neq 0$, $y_i = \lambda x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 则

$$\Sigma\{y_1^{(p_1)}, y_2^{(p_2)}, \ldots, y_n^{(p_n)}\} = \lambda \Sigma\{x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \ldots, x_n^{(p_n)}\}; \tag{2.1}$$

(2) 权系数齐零次: 对任意给定的 $\lambda \neq 0$, $q_i = \lambda p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 则

$$\Sigma\{x_1^{(q_1)}, x_2^{(q_2)}, \ldots, x_n^{(q_n)}\} = \Sigma\{x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \ldots, x_n^{(p_n)}\}; \tag{2.2}$$

(3) 吸收律: 对任意给定的 p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, 令 $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_m$, 则

$$\begin{aligned} &\Sigma\{x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \ldots, x_n^{(p_n)}, y_1^{(q_1)}, y_2^{(q_2)}, \ldots, y_m^{(q_m)}\} \\ &\quad = \Sigma\{\Sigma^{(p)}\{x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \ldots, x_n^{(p_n)}\}, \Sigma^{(q)}\{y_1^{(q_1)}, y_2^{(q_2)}, \ldots, y_m^{(q_m)}\}\}; \end{aligned} \tag{2.3}$$

(4) 规范律: 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = y$ 时,

$$\Sigma\{x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \ldots, x_n^{(p_n)}\} = \Sigma\{y^{(p_1)}, y^{(p_2)}, \ldots, y^{(p_n)}\} = y; \tag{2.4}$$

(5) 迭加律: 对任意的 $p_i,q_i,\ i=1,2,\dots,n$, 都有

$$\Sigma\{x_1^{(p_1+q_1)},x_2^{(p_2+q_2)},\dots,x_n^{(p_n+q_n)}\}=\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\dots,x_n^{(p_n)},x_1^{(q_1)},x_2^{(q_2)},\dots,x_n^{(q_n)}\};\tag{2.5}$$

(6) 递增律: 对任意的 $k=1,2,\dots,n,\ x_k\geqslant y_k$ 当且仅当

$$\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\dots,x_n^{(p_n)}\}\geqslant\Sigma\{x_1^{(p_1)},\dots,\check{y}_k^{(p_k)},\dots,x_n^{(p_n)}\};\tag{2.6}$$

(7) 对称律: 对 $1,2,\dots,n$ 的任意一个置换 $i_1,i_2,\dots,i_n$,

$$\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\dots,x_n^{(p_n)}\}=\Sigma\{x_{i_1}^{(p_{i_1})},x_{i_2}^{(p_{i_1})},\dots,x_{i_n}^{(p_{i_n})}\};\tag{2.7}$$

则称 $\Sigma(\bar{x},\bar{p})$ 是 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 关于权系数 $p_1,p_2,\dots,p_n$ 的抽象平均, 简称 $\Sigma(\bar{x},\bar{p})$ 为抽象平均, 称 $p_1,p_2,\dots,p_n$ 为抽象平均 $\Sigma(\bar{x},\bar{p})$ 关于自变量 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的权系数, 当某自变量 x_k 权系数为 $p_k=1$ 时, 我们通常省略自变量 x_k 权系数 p_k 而写成 x_k.

这里的 "$\hat{}$" 表示删除, "$\check{}$" 表示替换, 如: $(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)$, 而 $(x_1,\dots,\check{y}_k,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{k-1},y_k,x_{k+1},\dots,x_n)$, 下同.

例 2.2 对任意 $x_i,p_i\in\mathbb{R}_{++},\ i=1,2,\dots,n,\ q\in\mathbb{R}$, 则 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的加权 q 阶幂平均

$$M^{[q]}(\bar{x},\bar{p})=\left(\frac{p_1x_1^q+p_2x_2^q+\cdots+p_nx_n^q}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{\frac{1}{q}}\tag{2.8}$$

是抽象平均.

注 2.3 在 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的加权 q 阶幂平均 $M^{[q]}(\bar{x},\bar{p})$ 中, 当 $q=1$ 时, $M^{[1]}(\bar{x},\bar{p})$ 即为加权算术平均; 当 $q=0$ 时, $M^{[0]}(\bar{x},\bar{p})$ 即为加权几何平均; 当 $q=-1$ 时, $M^{[-1]}(\bar{x},\bar{p})$ 即为加权调和平均.

例 2.4 对任意的 $x_i,p_i\in\mathbb{R}_{++},\ i=1,2,\dots,n,\ f(x)$ 是严格单调函数, 则 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的加权拟算术 f 平均

$$f(\bar{x},\bar{p})=f^{-1}\left(\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\tag{2.9}$$

是抽象平均.

定义 2.5 设 Σ 和 Σ' 是抽象平均, 如果对任给的 $x,y\in I$, 连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(\Sigma\{x,y\})\geqslant\Sigma'\{f(x),f(y)\},\tag{2.10}$$

则称 $f(x)$ 为抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 上凸函数, 当 $x\neq y$ 时, 如果上述不等号严格成立, 则称 $f(x)$ 为抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数.

当上述不等式反向时, 称 $f(x)$ 为抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 下凸函数, 当 $x\neq y$ 时, 如果上述不等式反向并且不等号严格成立, 则称 $f(x)$ 为抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数.

定理 2.6 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, $x_i\in I\ (i=1,2,\dots,n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数 $f(x)$, 都有

$$f(\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_n\})\geqslant\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)\},\tag{2.11}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 首先用数学归纳法对 $n=2^k$ (其中 k 为自然数) 情况证明. 当 $k=1$ 时, 不等式显然成立, 假设当 $n=2^k$ 时, 不等式亦成立, 令 $m=2^{k+1}$, $\Sigma(\bar{x},m)=\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$, $y_i=x_{n+i},\ i=1,2,\dots,n$, 根据抽象平均的性质得到

$$f(\Sigma(\bar{x},m))=f(\Sigma\{\Sigma^{(n)}\{x_1,x_2,\dots,x_n\},\Sigma^{(n)}\{x_{n+1},x_{n+2},\dots,x_m\}\})$$

$$\begin{aligned}
&= f(\Sigma\{\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \Sigma\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m\}\}) \\
&\geqslant \Sigma'\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}), f(\Sigma\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m\})\} \\
&\geqslant \Sigma'\{\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}, f(\Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n\})\} \\
&\geqslant \Sigma'\{\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}, \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}\} \\
&= \Sigma'\{\Sigma'^{(n)}\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}, \Sigma'^{(n)}\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}\} \\
&= \Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(x_{n+1}), f(x_{n+2}), \ldots, f(x_m)\}, \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

因此对于每个自然数 $n \in \{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k, \ldots\}$, 不等式 (2.11) 均成立.

下面用逆向数学归纳法, 当 $n = t+1$ 时, 假定不等式 (2.11) 成立, 即有

$$f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_{t+1}\}) \geqslant \Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{t+1})\}, \qquad (2.13)$$

下面证明当 $n = t$ 时, 不等式 (2.11) 亦成立. 令 $\Sigma(\bar{x}, t) = \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, 根据抽象平均的性质有

$$\begin{aligned}
\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} &= \Sigma\{x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_t^{(\alpha)}, x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}, \ldots, x_t^{(\beta)}\} \\
&= \Sigma\{\Sigma^{(\alpha)}\{x_1\}, \Sigma^{(\alpha)}\{x_2\}, \ldots, \Sigma^{(\alpha)}\{x_t\}, \Sigma^{(t\beta)}\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\} \\
&= \Sigma\{\Sigma^{(\alpha)}\{x_1\}, \Sigma^{(\alpha)}\{x_2\}, \ldots, \Sigma^{(\alpha)}\{x_t\}, \Sigma^{(\alpha)}\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\} \\
&= \Sigma\{\Sigma\{x_1\}, \Sigma\{x_2\}, \ldots, \Sigma\{x_t\}, \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\} \\
&= \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t, \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\}, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

这里 $\alpha = \frac{t}{t+1}$, $\beta = \frac{1}{t+1}$, 由不等式 (2.13) 得到

$$\begin{aligned}
f(\Sigma(\bar{x}, t)) &= f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}) = f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t, \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\}) \\
&\geqslant \Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t), f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\} \\
&= \Sigma'\{\Sigma'^{(t)}\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)\}, \Sigma'\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\}\} \\
&= \Sigma'\{\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)\}, \Sigma'^{(\frac{1}{t})}\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\}\}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

不妨设 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_t = \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, 于是

$$f(\Sigma_1) = f(\Sigma_2) = \cdots = f(\Sigma_t) = f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}), \qquad (2.16)$$

根据抽象平均的吸收律得到

$$\begin{aligned}
f(\Sigma(\bar{x}, t)) &= f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}) = \Sigma'\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\} \\
&= \Sigma'\{f(\Sigma_1), f(\Sigma_2), \ldots, f(\Sigma_t), f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\} \\
&= \Sigma'\{\Sigma'^{(t)}\{f(\Sigma_1), f(\Sigma_2), \ldots, f(\Sigma_t)\}, \Sigma'\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\}\} \\
&= \Sigma'\{\Sigma'\{f(\Sigma_1), f(\Sigma_2), \ldots, f(\Sigma_t)\}, \Sigma'^{(\frac{1}{t})}\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\}\}, \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

根据不等式 (2.15) 和 (2.17) 得到

$$\begin{aligned}
f(\Sigma(\bar{x}, t)) &= \Sigma'\{\Sigma'\{f(\Sigma_1), f(\Sigma_2), \ldots, f(\Sigma_t)\}, \Sigma'^{(\frac{1}{t})}\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\}\} \\
&\geqslant \Sigma'\{\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)\}, \Sigma'^{(\frac{1}{t})}\{f(\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})\}\}, \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

对不等式 (2.18) 应用抽象平均的递增律直接得到

$$\Sigma'\{f(\Sigma_1), f(\Sigma_2), \ldots, f(\Sigma_t)\} \geqslant \Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)\}, \qquad (2.19)$$

又由于

$$f(\Sigma_1)=f(\Sigma_2)=\cdots=f(\Sigma_t)=f(\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_t\})=\Sigma'\{f(\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_t\})\},\tag{2.20}$$

根据抽象平均的规范律得到

$$\Sigma'\{f(\Sigma_1),f(\Sigma_2),\ldots,f(\Sigma_t)\}=f(\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}),\tag{2.21}$$

于是得到

$$f(\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_t\})=\Sigma'\{f(\Sigma_1),f(\Sigma_2),\ldots,f(\Sigma_t)\}\geqslant\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_t)\},\tag{2.22}$$

这表明对任意不小于 2 的自然数 n, 不等式 (2.11) 都成立, 易见不等式等号成立的充要条件是: $x_1=x_2=\cdots=x_n$, 定理 2.6 证毕.

类似地, 我们可以得到

定理 2.7 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, $x_i\in I$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数 $f(x)$, 都有

$$f(\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_n\})\leqslant\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\},\tag{2.23}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

定理 2.8 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, $x_i\in I,p_i\in I'$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数 $f(x)$, 都有

$$f(\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\ldots,x_n^{(p_n)}\})\geqslant\Sigma'\{f^{(p_1)}(x_1),f^{(p_2)}(x_2),\ldots,f^{(p_n)}(x_n)\},\tag{2.24}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 首先证明 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 全部为非负有理实数的情形. 由于 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 为有理实数, 因此存在自然数 $m_1,m_2,\ldots,m_n$ 和 m, 使得 $p_i=\frac{m_i}{m}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 不妨令 $\Sigma(\bar{x},\bar{p})=\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\ldots,x_n^{(p_n)}\}$, 根据抽象平均的性质得到

$$\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\ldots,x_n^{(p_n)}\}=\Sigma\{x_1^{(\frac{m_1}{m})},x_2^{(\frac{m_1}{m})},\ldots,x_n^{(\frac{m_1}{m})}\}=\Sigma\{x_1^{(m_1)},x_2^{(m_2)},\ldots,x_n^{(m_n)}\},\tag{2.25}$$

根据定义 1.1 中的吸收律得到

$$\Sigma\{x_1^{(m_1)},x_2^{(m_2)},\ldots,x_n^{(m_n)}\}=\Sigma\{\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m_1\text{个}},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{m_2\text{个}},\ldots,\underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{m_n\text{个}}\},\tag{2.26}$$

根据不等式 (2.11) 和抽象平均的吸收律得到

$$\begin{aligned}f(\Sigma(\bar{x},\bar{p}))&=f(\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\ldots,x_n^{(p_n)}\})\\&=f(\Sigma\{\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m_1\text{个}},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{m_2\text{个}},\ldots,\underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{m_n\text{个}}\})\\&\geqslant\Sigma'\{\underbrace{f(x_1),\ldots,f(x_1)}_{m_1\text{个}},\underbrace{f(x_2),\ldots,f(x_2)}_{m_2\text{个}},\ldots,\underbrace{f(x_n),\ldots,f(x_n)}_{m_n\text{个}}\}\\&\geqslant\Sigma'\{f^{(m_1)}(x_1),f^{(m_2)}(x_2),\ldots,f^{(m_n)}(x_n)\},\end{aligned}\tag{2.27}$$

根据抽象平均的性质得到

$$\begin{aligned}\Sigma'\{f^{(m_1)}(x_1),f^{(m_2)}(x_2),\ldots,f^{(m_n)}(x_n)\}&=\Sigma'\{f^{(\frac{m_1}{m})}(x_1),f^{(\frac{m_2}{m})}(x_2),\ldots,f^{(\frac{m_n}{m})}(x_n)\}\\&=\Sigma'\{f^{(p_1)}(x_1),f^{(p_2)}(x_2),\ldots,f^{(p_n)}(x_n)\}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

由不等式 (2.27) 和 (2.28) 得到不等式 (2.24), 这样证明了 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 全部为非负有理实数的情形.

下面考虑 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 为非负实数的情形, 事实上, 对每个 $k=1,2,\ldots,n$, 存在非负有理数列 $\{\lambda_{kr}\}$, 使得 $\lim_{r\to\infty}\{\lambda_{kr}\}=p_k$, 如果对某个 i, p_i 为非负有理实数, 对任意的自然数 r, 可以取 $\{\lambda_{ir}\}=p_i$, 于是对于任意自然数 r, 得到

$$f(\Sigma\{x_1^{(\lambda_{1r})},x_2^{(\lambda_{2r})},\ldots,x_n^{(\lambda_{nr})}\})\geqslant\Sigma'\{f^{(\lambda_{1r})}(x_1),f^{(\lambda_{2r})}(x_2),\ldots,f^{(\lambda_{2r})}(x_n)\},\tag{2.29}$$

由于 $f(x),\Sigma(\bar{x},\bar{p})$ 和 $\Sigma'(\bar{x},\bar{p})$ 均为连续函数, 所以

$$\begin{aligned}&f(\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\ldots,x_n^{(p_n)}\})=f(\Sigma\{x_1^{(\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_{1r})},x_2^{(\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_{2r})},\ldots,x_n^{(\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_{nr})}\})\\&\qquad=f\Big(\lim_{r\to\infty}\Sigma\{x_1^{(\lambda_{1r})},x_2^{(\lambda_{2r})},\ldots,x_n^{(\lambda_{nr})}\}\Big)=\lim_{r\to\infty}f(\Sigma\{x_1^{(\lambda_{1r})},x_2^{(\lambda_{2r})},\ldots,x_n^{(\lambda_{nr})}\}),\end{aligned}\tag{2.30}$$

并且

$$\begin{aligned}&\Sigma'\{f^{(p_1)}(x_1),f^{(p_2)}(x_2),\ldots,f^{(p_n)}(x_n)\}\\&\qquad=\Sigma'\{f^{(\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_{1r})}(x_1),f^{(\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_{2r})}(x_2),\ldots,f^{(\lim\limits_{r\to\infty}\lambda_{nr})}(x_n)\}\\&\qquad=\Sigma'\Big\{\lim_{r\to\infty}f^{(\lambda_{1r})}(x_1),\lim_{r\to\infty}f^{(\lambda_{2r})}(x_2),\ldots,\lim_{r\to\infty}f^{(\lambda_{nr})}(x_n)\Big\}\\&\qquad=\lim_{r\to\infty}\Sigma'\{f^{(\lambda_{1r})}(x_1),f^{(\lambda_{2r})}(x_2),\ldots,f^{(\lambda_{nr})}(x_n)\},\end{aligned}\tag{2.31}$$

在不等式 (2.29) 两边取极限

$$\lim_{r\to\infty}f(\Sigma\{x_1^{(\lambda_{1r})},x_2^{(\lambda_{2r})},\ldots,x_n^{(\lambda_{nr})}\})\geqslant\lim_{r\to\infty}\Sigma'\{f^{(\lambda_{1r})}(x_1),f^{(\lambda_{2r})}(x_2),\ldots,f^{(\lambda_{nr})}(x_n)\}.\tag{2.32}$$

立刻得到不等式 (2.24), 不等式等号成立的充要条件是: $x_1=x_2=\cdots=x_n$, 定理 2.8 证毕.

类似可以得到

定理 2.9 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, $x_i\in I$, $p_i\in I'$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 则对于 I 上任意抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数 $f(x)$, 都有

$$f(\Sigma\{x_1^{(p_1)},x_2^{(p_2)},\ldots,x_n^{(p_n)}\})\leqslant\Sigma'\{f^{(p_1)}(x_1),f^{(p_2)}(x_2),\ldots,f^{(p_n)}(x_n)\},\tag{2.33}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

定义 2.10 设 Σ 为抽象平均, $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)$ 和 $\tau(1),\tau(2),\ldots,\tau(n)$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的两个置换使得 $x_{\sigma(1)}\geqslant x_{\sigma(2)}\geqslant\cdots\geqslant x_{\sigma(n)}$; $y_{\tau(1)}\geqslant y_{\tau(2)}\geqslant\cdots\geqslant y_{\tau(n)}$, 并且对任意的 $k=1,2,\ldots,n-1$ 都有

$$\Sigma\{x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(k)}\}\leqslant\Sigma\{y_{\tau(1)},y_{\tau(2)},\ldots,y_{\tau(k)}\};\tag{2.34}$$

$$\Sigma\{x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\}=\Sigma\{y_{\tau(1)},y_{\tau(2)},\ldots,y_{\tau(n)}\},\tag{2.35}$$

则称 $\bar{y}$ 抽象 Σ 控制 $\bar{x}$, 或称 $\bar{x}$ 被 $\bar{y}$ 抽象 Σ 控制, 记作 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\prec_n^{\Sigma}(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, 或简记为: $\bar{x}\prec_n^{\Sigma}\bar{y}$. 如果对任意的 $k=1,2,\ldots,n$ 都有

$$\Sigma\{x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(k)}\}\leqslant\Sigma\{y_{\tau(1)},y_{\tau(2)},\ldots,y_{\tau(k)}\},\tag{2.36}$$

称 $\bar{y}$ 抽象 Σ 下控制 $\bar{x}$, 或称 $\bar{x}$ 被 $\bar{y}$ 抽象 Σ 下控制, 记作 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\prec_{n,w}^{\Sigma}(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, 或简记为: $\bar{x}\prec_{n,w}^{\Sigma}\bar{y}$. 如果对任意的 $k=0,1,\ldots,n-1$ 都有

$$\Sigma\{x_{\sigma(k+1)},x_{\sigma(k+2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\}\geqslant\Sigma\{y_{\tau(k+1)},y_{\tau(k+2)},\ldots,y_{\tau(n)}\},\tag{2.37}$$

称 $\bar{y}$ 抽象 Σ 上控制 $\bar{x}$, 或称 $\bar{x}$ 被 $\bar{y}$ 抽象 Σ 上控制, 记作 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\prec_n^{\Sigma,w}(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, 或简记为: $\bar{x}\prec_n^{\Sigma,w}\bar{y}$.

为了行文方便, 我们在下文中都约定 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$, $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$, 这样对结果是没有任何影响的.

3 抽象控制不等式的基本定理及证明

本文的主要结果是下面的抽象控制不等式基本定理.

定理 3.1 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, 如果 $x_i, y_i \in I$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 满足 $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $f(x)$, 都有

$$\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1),f(y_2),\ldots,f(y_n)\}, \tag{3.1}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t=1,2,\ldots,n)$.

下边的引理 3.2 是抽象控制的基本定理, 也是我们证明定理 3.1 的关键.

引理 3.2 设 Σ 是抽象平均, $x_i, y_i \in I$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 则 $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 的充分必要条件是: 存在 n 阶双随机矩阵 (见文献 [6]) $P=(p_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$, 使得

$$x_t = \Sigma\{y_1^{(p_{t1})}, y_2^{(p_{t2})},\ldots,y_n^{(p_{tn})}\} \quad (t=1,2,\ldots,n). \tag{3.2}$$

引理 3.2 的证明 先证明充分性, 考虑用数学归纳法证明, 对分量个数 n 用归纳法. 当 $n=1$ 结论显然, 下面考虑 $n>1$ 的情形. 假设当 $n=k-1$ 时, 命题成立, 分两种情形证明.

第 1 种情形, 当 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 和 $(y_1,y_2,\ldots,y_k)$ 有相同的分量时, 不妨假定相同的分量为 $x_r = y_s$, 或 $x_s = y_r$, 当 $r=s$ 时, 显然有

$$(x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_k) \prec_k^{\Sigma} (y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_k), \tag{3.3}$$

因此我们考虑 $r \neq s$ 的情形, 不妨假定 $0<r<s\leqslant k$.

当 $x_r = y_s$, 由于对任意的 $t=1,2,\ldots,k-1$ 都有

$$\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_t\} \leqslant \Sigma\{y_1,y_2,\ldots,y_t\}, \tag{3.4}$$

又 $x_k \leqslant \cdots \leqslant x_{r+1} \leqslant x_r$, 因此对于任意的 $r \leqslant h < s$, 由递增律, 都有

$$\Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1}\} \leqslant \Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_h\} \leqslant \Sigma\{y_1,y_2,\ldots,y_h\}, \tag{3.5}$$

对于任意的 $s \leqslant h < k$, 都有

$$\begin{aligned}\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_{h+1}\} &= \Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1},x_r\}\\ &= \Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1}\},\Sigma\{x_r\}\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

和

$$\begin{aligned}\Sigma\{y_1,y_2,\ldots,y_{h+1}\} &= \Sigma(y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_{h+1},y_s)\\ &= \Sigma\{\Sigma^{(h)}\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_{h+1}\},\Sigma\{y_s\}\},\end{aligned} \tag{3.7}$$

又因为

$$\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_{h+1}\} \leqslant \Sigma\{y_1,y_2,\ldots,y_{h+1}\}, \tag{3.8}$$

于是得到

$$\Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1}\},\Sigma\{x_r\}\} \leqslant \Sigma\{\Sigma^{(h)}\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_{h+1}\},\Sigma\{y_s\}\}, \tag{3.9}$$

根据抽象平均的性质容易得到

$$\Sigma\{\Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1}\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{x_r\}\} \leqslant \Sigma\{\Sigma\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_{h+1}\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{y_s\}\}, \tag{3.10}$$

由于 $\Sigma\{x_r\} = x_r = y_s = \Sigma\{y_s\}$, 现假设 $\Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1}\} > \Sigma\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_{h+1}\}$, 根据抽象平均的递增律得到

$$\Sigma\{\Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_{h+1}\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{x_r\}\} > \Sigma\{\Sigma\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_{h+1}\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{y_s\}\}, \tag{3.11}$$

这与不等式 (3.10) 相矛盾, 因此假设不成立, 于是得到

$$\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\} \leqslant \Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_{h+1}\}. \tag{3.12}$$

又因为 $\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_k\}=\Sigma\{y_1,y_2,\dots,y_k\}$, 根据抽象平均的性质容易得到

$$\Sigma\{\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_k\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{x_r\}\}=\Sigma\{\Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_k\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{y_s\}\}, \tag{3.13}$$

由于 $\Sigma\{x_r\}=x_r=y_s=\Sigma\{y_s\}$, 现假设 $\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_k\}>\Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_k\}$, 根据抽象平均的递增律得到

$$\Sigma\{\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_k\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{x_r\}\}>\Sigma\{\Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_k\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{y_s\}\}, \tag{3.14}$$

同样, 假设 $\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_k\}<\Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_k\}$, 根据抽象平均的递增律得到

$$\Sigma\{\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_k\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{x_r\}\}<\Sigma\{\Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_k\},\Sigma^{(\frac{1}{h})}\{y_s\}\}, \tag{3.15}$$

这两个假设都与 (3.13) 式相矛盾, 因此这两个假设都不成立, 于是得到

$$\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_k\}=\Sigma\{y_1,\dots,\hat{y}_s,\dots,y_k\}. \tag{3.16}$$

我们证明了 (3.3) 式在 $x_r=y_s$ 时的情形.

当 $x_s=y_r$, 由于 $s>r$, 所以容易得到

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_s=y_r \geqslant y_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant y_k, \tag{3.17}$$

所以得到对任意的 $t=r,r+1,\dots,s$ 都有

$$\Sigma\{x_t,x_{t+1},\dots,x_s\} \geqslant \Sigma\{y_t,y_{t+1},\dots,y_s\}. \tag{3.18}$$

由于

$$\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_s\} \leqslant \Sigma\{y_1,y_2,\dots,y_s\}, \tag{3.19}$$

因为

$$\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_s\}=\Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\},\Sigma^{(s-h)}\{x_r,x_{h+2},\dots,x_s\}\}, \tag{3.20}$$

以及

$$\Sigma\{y_1,y_2,\dots,y_s\}=\Sigma\{\Sigma^{(h)}\{y_1,y_2,\dots,y_h\},\Sigma^{(s-h)}\{y_{h+1},y_{h+2},\dots,y_s\}\}, \tag{3.21}$$

于是

$$\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\},\Sigma^{(s-h)}\{x_r,x_{h+2},\dots,x_s\}\}\\ &\quad\leqslant \Sigma\{\Sigma^{(h)}\{y_1,y_2,\dots,y_h\},\Sigma^{(s-h)}\{y_{h+1},y_{h+2},\dots,y_s\}\}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

易知

$$\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\},\Sigma^{(s-h)}\{y_{h+1},y_{h+2},\dots,y_s\}\}\\ &\quad\leqslant \Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\},\Sigma^{(s-h)}\{x_r,x_{h+2},\dots,x_s\}\},\end{aligned} \tag{3.23}$$

所以

$$\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma^{(h)}\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\},\Sigma^{(s-h)}\{y_{h+1},y_{h+2},\dots,y_s\}\}\\ &\quad\leqslant \Sigma\{\Sigma^{(h)}\{y_1,y_2,\dots,y_h\},\Sigma^{(s-h)}\{y_{h+1},y_{h+2},\dots,y_s\}\},\end{aligned} \tag{3.24}$$

于是

$$\Sigma\{x_1,\dots,\hat{x}_r,\dots,x_{h+1}\} \leqslant \Sigma\{y_1,y_2,\dots,y_h\}. \tag{3.25}$$

因为 $\Sigma\{x_r\}=x_r=y_s=\Sigma\{y_s\}$, 仿上面的证明, 同样可以得到: 对任意 $h=s,s+1,\ldots,k-1$, 都有

$$\Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_h\}\leqslant\Sigma\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_h\},\tag{3.26}$$

同样容易验证

$$\Sigma\{x_1,\ldots,\hat{x}_r,\ldots,x_k\}=\Sigma\{y_1,\ldots,\hat{y}_s,\ldots,y_k\}.\tag{3.27}$$

我们证明了 (3.3) 式在 $x_s=y_r$ 时的情形, 因此得证 (3.3) 式.

于是当 $x_r=y_s$ 时, 存在 $k-1$ 阶双随机矩阵 $Q=(q_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,k,\ i\neq r,j\neq s)$, 使得对任意的 $t=1,\ldots,\hat{r},\ldots,k$, 都有

$$x_t=\Sigma\{y_1^{(q_{t1})},\ldots,\hat{y}_s^{(q_{ts})},\ldots,y_k^{(q_{tk})}\}.\tag{3.28}$$

构造 k 阶双随机矩阵

$$Q'=(q'_{ij})=\begin{pmatrix}Q_{11} & O_{r-1}^{\tau} & Q_{12}\\ O_{s-1} & 1 & O_{k-s}\\ Q_{21} & O_{k-r}^{\tau} & Q_{22}\end{pmatrix},\tag{3.29}$$

其中

$$\begin{cases}Q_{11}=(q_{ij})\ (i=1,2,\ldots,r-1;j=1,2,\ldots,s-1);\\ Q_{12}=(q_{ij})\ (i=1,2,\ldots,r-1;j=s+1,s+2,\ldots,k);\\ Q_{21}=(q_{ij})\ (i=r+1,r+2,\ldots,k;j=1,2,\ldots,s-1);\\ Q_{22}=(q_{ij})\ (i=r+1,r+2,\ldots,k;j=s+1,s+2,\ldots,k),\end{cases}$$

O_t 表示 t 维零行向量,“τ” 表示转置. 于是当 $n=k$ 时, 存在 k 阶双随机矩阵 $Q'=(q'_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,k)$, 使得

$$x_t=\Sigma(y_1^{(q'_{t1})},y_2^{(q'_{t2})},\ldots,y_k^{(q'_{tk})})\ \ (t=1,2,\ldots,k),\tag{3.30}$$

第 2 种情形, 当 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 与 $(y_1,y_2,\ldots,y_k)$ 无相同的分量, 而 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)\prec_k^{\Sigma}(y_1,y_2,\ldots,y_k)$, 首先证明: 必然存在 $1\leqslant\mu<k$, 使得

$$y_\mu>x_\mu>y_{\mu+1}.\tag{3.31}$$

若不然, 则必然有 $x_\nu<y_{\nu+1}$ $(\nu=1,2,\ldots,k-1)$, 并且 $x_k\leqslant x_1<y_1$, 于是得到

$$\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}<\Sigma\{y_1,y_2,\ldots,y_k\},\tag{3.32}$$

与 $\Sigma\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}=\Sigma\{y_1,y_2,\ldots,y_k\}$ 矛盾, 于是必然存在 $1\leqslant\mu<k$, 使得 $y_\mu>x_\mu>y_{\mu+1}$. 又因为 Σ 为连续函数, 并且对任意的 $\theta,\vartheta\in\mathbb{R}_{++}$, 有

$$\Sigma\{y_\mu^{(\theta)},y_\mu^{(\vartheta)}\}=y_\mu>x_\mu>y_{\mu+1}=\Sigma\{y_{\mu+1}^{(\theta)},y_{\mu+1}^{(\vartheta)}\},\tag{3.33}$$

所以存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_{++},\alpha\neq\beta$, 满足 $\alpha+\beta=1$, 使得

$$x_\mu=\Sigma\{y_\mu^{(\alpha)},y_{\mu+1}^{(\beta)}\}.\tag{3.34}$$

令 $z_i=y_i$ $(i=1,2,\ldots,k,i\neq\mu,i\neq\mu+1)$, $z_\mu=\Sigma\{y_\mu^{(\alpha)},y_{\mu+1}^{(\beta)}\}=x_\mu$, $z_{\mu+1}=\Sigma\{y_\mu^{(\beta)},y_{\mu+1}^{(\alpha)}\}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\Sigma\{z_u,z_{\mu+1}\}&=\Sigma\{\Sigma\{y_\mu^{(\alpha)},y_{\mu+1}^{(\beta)}\},\Sigma\{y_\mu^{(\beta)},y_{\mu+1}^{(\alpha)}\}\}\\ &=\Sigma\{y_\mu^{(\alpha+\beta)},y_{\mu+1}^{(\alpha+\beta)}\}=\Sigma\{y_\mu,y_{\mu+1}\}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

假定 $z_{\sigma(1)} \geqslant z_{\sigma(2)} \geqslant \cdots \geqslant z_{\sigma(k)}$, 这里 $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)$ 是 $1, 2, \ldots, k$ 的一个排列, 所以

$$\begin{aligned}\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_\mu\} &\leqslant \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}, x_\mu\}\\ &= \Sigma\{\ z_1, z_2, \ldots, z_\mu\ \} \leqslant \Sigma\{z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(\mu)}\},\end{aligned} \tag{3.36}$$

以及

$$\begin{aligned}\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}\} &\leqslant \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_{\mu+1}\}\\ &= \Sigma\{\Sigma^{(\mu-1)}\{y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}\}, \Sigma^{(2)}\{y_\mu, y_{\mu+1}\}\}\\ &= \Sigma\{\Sigma^{(\mu-1)}\{z_1, z_2, \ldots, z_{\mu-1}\}, \Sigma^{(2)}\{z_\mu, z_{\mu+1}\}\}\\ &= \Sigma\{z_1, z_2, \ldots, z_{\mu+1}\} \leqslant \Sigma\{z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(\mu+1)}\}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

同理可以得到: 对任意 $t = \mu + 2, \ldots, k-1$ 都有

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \leqslant \Sigma\{z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(t)}\}, \tag{3.38}$$

并且

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \Sigma\{z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(k)}\} = \Sigma\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}, \tag{3.39}$$

因此

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \prec_k^{\Sigma} (z_1, z_2, \ldots, z_k). \tag{3.40}$$

又因为 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 与 $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ 有共同的分量 $x_\mu = z_\mu$, 于是利用第 1 种情况的证明过程知道: 存在双随机矩阵 $R = (r_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$, 使得得对任意的 $t = 1, 2, \ldots, k$, 都有

$$x_t = \Sigma\{z_1^{(r_{t1})}, z_2^{(r_{t2})}, \ldots, z_k^{(r_{tk})}\}, \tag{3.41}$$

于是

$$\begin{aligned}x_t &= \Sigma\{z_1^{(r_{t1})}, \ldots, z_\mu^{(r_{t\mu})}, z_{\mu+1}^{(r_{t,\mu+1})}, \ldots, z_k^{(r_{tk})}\}\\ &= \Sigma\{y_1^{(r_{t1})}, \ldots, \Sigma^{(r_{t\mu})}\{y_\mu^{(\alpha)}, y_{\mu+1}^{(\beta)}\}, \Sigma^{(r_{t,\mu+1})}\{y_\mu^{(\beta)}, y_{\mu+1}^{(\alpha)}\}, \ldots, y_k^{(r_{tk})}\}\\ &= \Sigma\{y_1^{(r_{t1})}, \ldots, y_\mu^{(\alpha r_{t\mu} + \beta r_{t,\mu+1})}, y_{\mu+1}^{(\beta r_{t\mu} + \alpha r_{t,\mu+1})}, \ldots, y_k^{(r_{tk})}\}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

容易证明

$$r_{t1} + \cdots + r_{t,\mu-1} + (\alpha r_{t\mu} + \beta r_{t,\mu+1}) + (\beta r_{t\mu} + \alpha r_{t,\mu+1}) + r_{t,\mu+2} + \cdots + r_{tk} = 1, \tag{3.43}$$

并且

$$\begin{aligned}&(\alpha r_{1\mu} + \beta r_{1,\mu+1}) + (\alpha r_{2\mu} + \beta r_{2,\mu+1}) + \cdots + (\alpha r_{k\mu} + \beta r_{k,\mu+1})\\ &\quad = \alpha(r_{1\mu} + r_{2\mu} + \cdots + r_{k\mu}) + \beta(r_{1,\mu+1} + r_{2,\mu+1} + \cdots + r_{k,\mu+1}) = \alpha + \beta = 1,\end{aligned} \tag{3.44}$$

同理

$$(\beta r_{1\mu} + \alpha r_{1,\mu+1}) + (\beta r_{2\mu} + \alpha r_{2,\mu+1}) + \cdots + (\beta r_{k\mu} + \alpha r_{k,\mu+1}) = \alpha + \beta = 1. \tag{3.45}$$

因此存在 k 阶双随机矩阵 $P = (p_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$, 使得

$$x_t = \Sigma\{y_1^{(p_{t1})}, y_2^{(p_{t2})}, \ldots, y_n^{(p_{tk})}\} \ \ (t = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.46}$$

这说明当 $n = k$ 时, 结论也成立, 引理 3.2 的充分性证毕.

再证明引理 3.2 的必要性, 由于 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$, 并且对任意的 $t = 1, 2, \ldots, n$, 都有

$$x_t = \Sigma\{y_1^{(p_{t1})}, y_2^{(p_{t2})}, \ldots, y_n^{(p_{tn})}\}, \tag{3.47}$$

容易证明: 对任意的 $k=1,2,\dots,n-1$, 都有

$$\begin{aligned}\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_k\} &= \Sigma\{y_1^{(p_{11}+\cdots+p_{k1})},y_2^{(p_{12}+\cdots+p_{k2})},\dots,y_n^{(p_{1n}+\cdots+p_{kn})}\}\\ &\leqslant \Sigma\{y_1^{(p_{11}+\cdots+p_{n1})},y_2^{(p_{12}+\cdots+p_{n2})},\dots,y_k^{(p_{1k}+\cdots+p_{nk})}\}\\ &= \Sigma\{y_1,y_2,\dots,y_k\},\end{aligned}\tag{3.48}$$

易知

$$\Sigma\{x_1,x_2,\dots,x_n\}=\Sigma\{y_1,y_2,\dots,y_n\},\tag{3.49}$$

于是

$$\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\prec_n^{\Sigma}\{y_1,y_2,\dots,y_n\},\tag{3.50}$$

引理 3.2 的必要性证毕, 引理 3.2 证毕.

下面利用引理 3.2 完成定理 3.1 的证明.

定理 3.1 的证明 由于 Σ 是抽象平均, 并且 $(x_1,x_2,\dots,x_n)\prec_n^{\Sigma}(y_1,y_2,\dots,y_n)$, 所以存在双随机矩阵 $P=(p_{ij})$ $(i,j=1,2,\dots,n)$, 使得

$$x_k=\Sigma\{y_1^{(p_{k1})},y_2^{(p_{k2})},\dots,y_n^{(p_{kn})}\},\quad (k=1,2,\dots,n),\tag{3.51}$$

于是

$$f(x_k)=f(\Sigma\{y_1^{(p_{k1})},y_2^{(p_{k2})},\dots,y_n^{(p_{kn})}\})\geqslant\Sigma'\{f^{(p_{k1})}(y_1),f^{(p_{k2})}(y_2),\dots,f^{(p_{kn})}(y_n)\}.\tag{3.52}$$

因为 $f(x)$ 为抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数, 令 $\Sigma'(f(x),n)=\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)\}$, 根据抽象平均的递增律得到

$$\begin{aligned}\Sigma'(f(x),n)\geqslant{}&\Sigma'\{\Sigma'\{f^{(p_{11})}(y_1),f^{(p_{12})}(y_2),\dots,f^{(p_{1n})}(y_n)\},\Sigma'\{f^{(p_{21})}(y_1),\\ &f^{(p_{22})}(y_2),\dots,f^{(p_{2n})}(y_n)\},\dots,\Sigma'\{f^{(p_{n1})}(y_1),f^{(p_{n2})}(y_2),\dots,f^{(p_{nn})}(y_n)\}\},\end{aligned}\tag{3.53}$$

根据抽象平均的吸收律得到

$$\begin{aligned}\Sigma'(f(x),n)\geqslant{}&\Sigma'\{\Sigma'^{(n)}\{f^{(p_{11})}(y_1),f^{(p_{12})}(y_2),\dots,f^{(p_{1n})}(y_n)\},\Sigma'^{(n)}\{f^{(p_{21})}(y_1),\\ &f^{(p_{22})}(y_2),\dots,f^{(p_{2n})}(y_n)\},\dots,\Sigma'^{(n)}\{f^{(p_{n1})}(y_1),f^{(p_{n2})}(y_2),\dots,f^{(p_{nn})}(y_n)\}\},\\ ={}&\Sigma'\{f^{(p_{11})}(y_1),f^{(p_{12})}(y_2),\dots,f^{(p_{1n})}(y_n),f^{(p_{21})}(y_1),\\ &f^{(p_{22})}(y_2),\dots,f^{(p_{2n})}(y_n),\dots,f^{(p_{n1})}(y_1),f^{(p_{n2})}(y_2),\dots,f^{(p_{nn})}(y_n)\}\\ ={}&\Sigma'\{f^{(p_{11}+p_{21}+\cdots+p_{n1})}(y_1),f^{(p_{12}+p_{22}+\cdots+p_{n2})}(y_2),\dots,f^{(p_{1n}+p_{2n}+\cdots+p_{nn})}(y_n)\}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

由于

$$p_{1k}+p_{2k}+\cdots+p_{nk}=1\ (k=1,2,\dots,n),\tag{3.55}$$

于是

$$\Sigma'(f(x),n)=\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)\}\geqslant\Sigma'\{f(y_1),f(y_2),\dots,f(y_n)\}=\Sigma'(f(y),n).$$

这样证明了定理 3.1, 容易知道其等号成立的充要条件是: $x_t=y_t$ $(t=1,2,\dots,n)$.

由定理 3.1 的证明过程容易得到

定理 3.3 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, 如果 $x_i,y_i\in I$ $(i=1,2,\dots,n)$ 满足 $(x_1,x_2,\dots,x_n)\prec_n^{\Sigma}(y_1,y_2,\dots,y_n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数 $f(x)$, 都有

$$\Sigma'\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)\}\leqslant\Sigma'\{f(y_1),f(y_2),\dots,f(y_n)\},\tag{3.56}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$.

注记 3.4 由于 Σ 和 Σ' 是抽象平均, $f(x)$ 为 I 上抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数, 对于任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, 令 $\Sigma(x) = \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, 容易验证: $(\Sigma(x), \Sigma(x), \ldots, \Sigma(x)) \prec_n^{\Sigma} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 应用定理 3.1 直接得到定理 2.6.

注记 3.5 由于 Σ 和 Σ' 是抽象平均, $f(x)$ 为 I 上抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格下凸函数, 对于任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, 令 $\Sigma(x) = \Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, 容易验证: $(\Sigma(x), \Sigma(x), \ldots, \Sigma(x)) \prec_n^{\Sigma} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 应用定理 3.3 直接得到定理 2.7.

定理 3.6 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, 若 $x_i, y_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 满足 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_{n,w}^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸的递减函数 $f(x)$, 都有

$$\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}, \tag{3.57}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$.

证明 设 y_n' 满足:

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n'\}, \tag{3.58}$$

由于 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_{n,w}^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 所以

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \tag{3.59}$$

所以

$$\Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n'\} \leqslant \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}. \tag{3.60}$$

因此得到 $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant y_n'$. 容易验证

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n'),$$

根据定理 3.1 得到

$$\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n')\}. \tag{3.61}$$

因为 $f(x)$ 是严格递减的函数, 由 $y_n \geqslant y_n'$ 得到 $f(y_n') \geqslant f(y_n)$, 于是

$$\begin{aligned}\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} &\geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n')\} \\ &\geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\},\end{aligned} \tag{3.62}$$

这样证明了不等式 (3.57), 易见等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$, 定理 3.6 证毕.

类似可以得到

定理 3.7 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, 若 $x_i, y_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 满足 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_{n,w}^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格下凸的递增函数 $f(x)$, 都有

$$\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \leqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}, \tag{3.63}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$.

定理 3.8 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, 若 $x_i, y_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 满足 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma, w} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸的递增函数 $f(x)$, 都有

$$\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}, \tag{3.64}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$.

证明 设 y_1' 满足

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \Sigma\{y_1', y_2, \ldots, y_n\}, \tag{3.65}$$

由于 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_{n,w}^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 所以

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geqslant \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \tag{3.66}$$

所以

$$\Sigma\{y_1', y_2, \ldots, y_n\} \leqslant \Sigma\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}. \tag{3.67}$$

因此得到 $y_1' \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$, 又因为

$$\Sigma\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\} \geqslant \Sigma\{y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n\},\ (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{3.68}$$

而

$$\Sigma\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \Sigma\{\Sigma^{(k)}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \Sigma^{(n-k)}\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}\}; \tag{3.69}$$

$$\Sigma\{\ y_1', y_2, \ldots, y_n\} = \Sigma\{\Sigma^{(k)}\{\ y_1', y_2, \ldots, y_k\}, \Sigma^{(n-k)}\{\ y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n\}\}, \tag{3.70}$$

于是

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1', y_2, \ldots, y_n). \tag{3.71}$$

根据定理 3.1 得到

$$\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1'), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}. \tag{3.72}$$

因为 $f(x)$ 是递增的函数, 由 $y_1' \geqslant y_1$ 得到 $f(y_1') \geqslant f(y_1)$, 于是

$$\begin{aligned}\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} &\geqslant \Sigma'\{f(y_1'), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}\\ &\geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}.\end{aligned} \tag{3.73}$$

这样证明了不等式 (3.64), 易见等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$, 定理 3.8 证毕.

用类似的方法, 我们还可以得到

定理 3.9 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, 若 $x_i, y_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 满足 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma,w} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 则对于 I 上任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格下凸的递减函数 $f(x)$, 都有

$$\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \leqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}, \tag{3.74}$$

不等式等号成立的充要条件是: $x_t = y_t$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$.

对于定理 3.1, 我们猜测 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 是不等式 (3.1) 的充分必要条件, 于是提出

猜想 3.10 设 Σ 和 Σ' 均为抽象平均, $x_i, y_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 如果对于任意的抽象 $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $f(x)$, 都有 $\Sigma'\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \geqslant \Sigma'\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}$, 则有

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{3.75}$$

对于定理 3.3、3.6–3.9, 也可以提出类似的猜想, 我们就不一一列出了.

4 抽象向量平均的基本概念和定理

本节推广抽象平均的基本定理到 n 维的情形, 首先给出对称 $\overline{\Sigma}$ 集、抽象向量平均以及抽象 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 上凸函数等概念.

定义 4.1 集合 $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 称为对称的, 如果对于任意的 $\bar{x}\in\mathcal{S}$ 和任意的置换矩阵 G, 都有 $G\bar{x}\in\mathcal{S}$; 称对称集 $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, 如果 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, 对于任意的 $\bar{x}_i\in\mathcal{S}$ $(i=1,2,\dots,m)$, 都有 $\overline{\Sigma}\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_m\}\in\mathcal{S}$; n 元函数 $\varphi(\bar{x})$ 在对称集 $\mathcal{S}$ 上称为对称的, 如果对于任意的 $\bar{x}\in\mathcal{S}$ 和任意的置换矩阵 G, 都有 $\varphi(G\bar{x})=\varphi(\bar{x})$.

定义 4.2 设 Σ 是抽象平均, 对任给的 $\bar{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in})\in\mathbb{R}^n$ $(i=1,2,\dots,m)$, 称向量

$$(\Sigma\{x_{11}^{(p_1)},x_{21}^{(p_2)},\dots,x_{m1}^{(p_m)}\},\Sigma\{x_{12}^{(p_1)},x_{22}^{(p_2)},\dots,x_{m2}^{(p_m)}\},\dots,\Sigma\{x_{1n}^{(p_1)},x_{2n}^{(p_2)},\dots,x_{mn}^{(p_m)}\}) \tag{4.1}$$

为向量组 $X=\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_m\}$ 关于权系数 $p_1,p_2,\dots,p_m$ 的抽象向量平均, 记为 $\overline{\Sigma}\{\bar{x}_1^{(p_1)},\bar{x}_2^{(p_2)},\dots,\bar{x}_m^{(p_m)}\}$, 简记为 $\overline{\Sigma}(X,\bar{p})$, 如果不引起混淆, 也记为 $\overline{\Sigma}(X)$, 甚至记为 $\overline{\Sigma}$.

定义 4.3 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均,Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, 如果对任给的 $\bar{x},\bar{y}\in\mathcal{S}$, n 元连续函数 $\varphi(\bar{x})$ 满足

$$\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{x},\bar{y}\})\geqslant\Sigma'\{\varphi(\bar{x}),\varphi(\bar{y})\}, \tag{4.2}$$

则称 n 元连续函数 $\varphi(\bar{x})$ 为 $\mathcal{S}$ 上的抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 上凸函数, 当 $\bar{x}\neq\bar{y}$ 时, 如果上述不等号严格成立, 则称 $\varphi(\bar{x})$ 为 $\mathcal{S}$ 上的抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数.

当上述不等式反向时, 则 n 元连续函数 $\varphi(\bar{x})$ 为 $\mathcal{S}$ 上的抽象 $\overline{\Sigma}\to\Sigma'$ 下凸函数, 当 $\bar{x}\neq\bar{y}$ 时, 如果上述不等式反向并且不等号严格成立, 则称 $\varphi(\bar{x})$ 为 $\mathcal{S}$ 上的抽象 $\overline{\Sigma}\to\Sigma'$ 严格下凸函数.

类似于第 2 节中证明方法, 容易给出下面定理 4.3–4.6 的证明, 此处略去.

定理 4.4 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, $\bar{x}_i\in\mathcal{S}$ $(i=1,2,\dots,m)$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_m\})\geqslant\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1),\varphi(\bar{x}_2),\dots,\varphi(\bar{x}_m)\}, \tag{4.3}$$

其中等号成立的充要条件是: $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{x}_m$.

定理 4.5 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, $\bar{x}_i\in\mathcal{S}$ $(i=1,2,\dots,m)$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_m\})\leqslant\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1),\varphi(\bar{x}_2),\dots,\varphi(\bar{x}_m)\}, \tag{4.4}$$

其中等号成立的充要条件是: $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{x}_m$.

定理 4.6 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, $\bar{x}_i\in\mathcal{S}$, $p_i\in I'$ $(i=1,2,\dots,m)$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{x}_1^{(p_1)},\bar{x}_2^{(p_2)},\dots,\bar{x}_m^{(p_m)}\})\geqslant\Sigma'\{\varphi^{(p_1)}(\bar{x}_1),\varphi^{(p_2)}(\bar{x}_2),\dots,\varphi^{(p_m)}(\bar{x}_m)\}, \tag{4.5}$$

其中等号成立的充要条件是: $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{x}_m$.

定理 4.7 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, $\bar{x}_i\in\mathcal{S}$, $p_i\in I'$ $(i=1,2,\dots,m)$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{x}_1^{(p_1)},\bar{x}_2^{(p_2)},\dots,\bar{x}_m^{(p_m)}\})\leqslant\Sigma'\{\varphi^{(p_1)}(\bar{x}_1),\varphi^{(p_2)}(\bar{x}_2),\dots,\varphi^{(p_m)}(\bar{x}_m)\}, \tag{4.6}$$

其中等号成立的充要条件是: $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{x}_m$.

下面的定理也是抽象控制不等式的基本定理.

定理 4.8 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称凸集, $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathcal{S}$, 满足 $(x_1,x_2,\dots,x_n)\prec_n^{\Sigma} y_1,y_2,\dots,y_n)$, 则对任意的 n 元抽象对

称 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(\bar{y}), \tag{4.7}$$

其中等号成立的充要条件是: $x_{\sigma(i)} = y_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

对于定理 4.8 的证明, 我们需要下面的两个引理.

引理 4.9[6]　P 为双随机矩阵的充分必要条件是存在置换矩阵 $G_1, G_2, \dots, G_l$ 和满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_l = 1$ 的正实数 $a_1, a_2, \dots, a_l$, 使得

$$P = a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_l G_l. \tag{4.8}$$

引理 4.10　设 Σ 为抽象平均, $\varphi(\bar{x})$ 是对称凸集 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 上的对称函数, $G = (g_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是置换矩阵, 如果 $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathcal{S}$ 满足

$$\alpha_k = \Sigma\{\beta_1^{(g_{k1})}, \beta_2^{(g_{k2})}, \dots, \beta_n^{(g_{kn})}\} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{4.9}$$

则有

$$\varphi(\bar{\alpha}) = \varphi(\bar{\beta}). \tag{4.10}$$

引理 4.10 的证明是显而易见的.

定理 4.8 的证明　由于 Σ 是抽象平均, 并且 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 所以存在双随机矩阵 $P = (p_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, 使得

$$x_k = \Sigma\{y_1^{(p_{k1})}, y_2^{(p_{k2})}, \dots, y_n^{(p_{kn})}\} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{4.11}$$

由引理 4.9 可知: 存在置换矩阵 $G_1 = (g_{1ij}), G_2 = (g_{2ij}), \dots, G_l = (g_{lij})$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 和满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_l = 1$ 的正实数 $a_1, a_2, \dots, a_l$, 使得 $P = a_1 G_1 + a_2 G_2 + \cdots + a_l G_l$, 所以

$$p_{ij} = a_1 g_{1ij} + a_2 g_{2ij} + \cdots + a_l g_{lij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{4.12}$$

由于

$$a_k = a_k g_{ki1} + a_k g_{ki2} + \cdots + a_k g_{kil} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, l), \tag{4.13}$$

抽象平均的吸收律得到

$$\begin{aligned} x_i &= \Sigma\{y_1^{(a_1 g_{1i1} + a_2 g_{2i1} + \cdots + a_l g_{li1})}, y_2^{(a_1 g_{1i2} + a_2 g_{2i2} + \cdots + a_l g_{li2})}, \dots, y_n^{(a_1 g_{1in} + a_2 g_{2in} + \cdots + a_l g_{lin})}\} \\ &= \Sigma\{\Sigma^{(a_1)}\{y_1^{(a_1 g_{1i1})}, y_2^{(a_1 g_{1i2})}, \dots, y_n^{(a_1 g_{1in})}\}, \Sigma^{(a_2)}\{y_1^{(a_2 g_{2i1})}, y_2^{(a_2 g_{2i2})}, \dots, y_n^{(a_2 g_{2in})}\}, \dots, \\ &\qquad \Sigma^{(a_l)}\{y_1^{(a_l g_{li1})}, y_2^{(a_l g_{li2})}, \dots, y_n^{(a_l g_{lin})}\}\} \\ &= \Sigma\{\Sigma^{(a_1)}\{y_1^{(g_{1i1})}, y_2^{(g_{1i2})}, \dots, y_n^{(g_{1in})}\}, \Sigma^{(a_2)}\{y_1^{(g_{2i1})}, y_2^{(g_{2i2})}, \dots, y_n^{(g_{2in})}\}, \dots, \\ &\qquad \Sigma^{(a_l)}\{y_1^{(g_{li1})}, y_2^{(g_{li2})}, \dots, y_n^{(g_{lin})}\}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \tag{4.14}$$

记 $z_{ki} = \Sigma\{y_1^{(g_{ki1})}, y_2^{(g_{ki2})}, \dots, y_n^{(g_{kin})}\}$, $\bar{z}_k = (z_{k1}, z_{k2}, \dots, z_{kn})$ $(k = 1, 2, \dots, l;\ i = 1, 2, \dots, n)$, 于是

$$x_i = \Sigma\{z_{1i}^{(a_1)}, z_{2i}^{(a_2)}, \dots, z_{li}^{(a_l)}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.15}$$

记 $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 于是

$$\bar{x} = (\Sigma\{z_{11}^{(a_1)}, z_{21}^{(a_2)}, \dots, z_{l1}^{(a_l)}\}, \Sigma\{z_{12}^{(a_1)}, z_{22}^{(a_2)}, \dots, z_{l2}^{(a_l)}\}, \dots, \Sigma\{z_{1n}^{(a_1)}, z_{2n}^{(a_2)}, \dots, z_{ln}^{(a_l)}\}), \tag{4.16}$$

根据抽象向量平均定义得到

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\Sigma}\{\bar{z}_1^{(a_1)}, \bar{z}_2^{(a_2)}, \dots, \bar{z}_l^{(a_l)}\}, \tag{4.17}$$

由不等式 (4.5) 得到

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x}) &= \varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{z}_1^{(a_1)}, \bar{z}_2^{(a_2)}, \ldots, \bar{z}_l^{(a_l)}\}) \\ &\geqslant \Sigma'\{\varphi^{(a_1)}(\bar{z}_1), \varphi^{(a_2)}(\bar{z}_2), \ldots, \varphi^{(a_l)}(\bar{z}_l)\}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

由于 $\bar{z}_k = (z_{k1}, z_{k2}, \ldots, z_{kn})$, $z_{ki} = \Sigma\{y_1^{(g_{ki1})}, y_2^{(g_{ki2})}, \ldots, y_n^{(g_{kin})}\}$, $G_t = (g_{tij})$ $(k = 1, 2, \ldots, l;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ 为 n 阶置换矩阵, 根据引理 4.10 可以得到

$$\varphi(\bar{z}_1) = \varphi(\bar{z}_2) = \cdots = \varphi(\bar{z}_l) = \varphi(\bar{y}), \tag{4.19}$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x}) &\geqslant \Sigma'\{\varphi^{(a_1)}(\bar{z}_1), \varphi^{(a_2)}(\bar{z}_2), \ldots, \varphi^{(a_l)}(\bar{z}_l)\} \\ &= \Sigma'\{\varphi^{(a_1)}(\bar{y}), \varphi^{(a_2)}(\bar{y}), \ldots, \varphi^{(a_l)}(\bar{y})\} = \varphi(\bar{y}),\end{aligned} \tag{4.20}$$

这样就证明了不等式 (4.7), 容易知道其等号成立的充要条件是: 存在 n 阶置换矩阵 G, 使得 $\bar{x} = G\bar{y}$, 定理 4.8 证毕.

注 4.11 事实上, 不等式 (4.7) 与抽象平均 Σ 无关, 即对任意的抽象平均 Σ, 不等式 (4.7) 总成立, 并且它也是不等式 (1.2) 的推广和延伸.

由定理 4.8 的证明过程可以得到

定理 4.12 设 $\overline{\Sigma}$ 是抽象向量平均,Σ' 抽象平均, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 为对称凸集, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}$, 满足 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 严格下凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(\bar{y}), \tag{4.21}$$

其中等号成立的充要条件是: $x_{\sigma(i)} = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

对于定理 4.8, 我们提出下面的猜想.

猜想 4.13 设 $\overline{\Sigma}$ 是抽象向量平均,Σ' 抽象平均, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 为对称凸集, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}$, 如果对任意的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 不等式 $\varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(\bar{y})$ 都成立, 则

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec_n^{\Sigma} (y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{4.22}$$

对定理 4.12 也可以提出类似的猜想.

下面给出向量组 Y 抽象 $\overline{\Sigma}$-控制向量组 X 的概念.

定义 4.14 设 $\overline{\Sigma}$ 是抽象向量平均,$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, 如果存在 m 阶双随机矩阵 $P = (p_{ij})$, 使得

$$\bar{x}_t = \overline{\Sigma}\{\bar{y}_1^{(p_{1t})}, \bar{y}_2^{(p_{2t})}, \ldots, \bar{y}_m^{(p_{mt})}\} \quad (t = 1, 2, \ldots, m), \tag{4.23}$$

则称向量组 $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$ 被向量组 $Y = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m\}$ 抽象 $\overline{\Sigma}$-控制, 称向量组 $Y = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m\}$ 抽象 $\overline{\Sigma}$-控制向量组 $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$, 记作 $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\} \prec_m^{\overline{\Sigma}} \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m\}$, 简记为: $X \prec_m^{\overline{\Sigma}} Y$.

下面是关于向量组 Y 抽象 $\overline{\Sigma}$-控制向量组 X 的基本不等式.

定理 4.15 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均,Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, 如果 $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 满足 $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\} \prec_m^{\overline{\Sigma}} \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m\}$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma} \hookrightarrow \Sigma'$ 严格上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1), \varphi(\bar{x}_2), \ldots, \varphi(\bar{x}_m)\} \geqslant \Sigma'\{\varphi(\bar{y}_1), \varphi(\bar{y}_2), \ldots, \varphi(\bar{y}_m)\}, \tag{4.24}$$

其中等号成立的充要条件是:$\bar{x}_{\sigma(i)}=\bar{y}_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

证明 由于 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m\}\prec_m^{\overline{\Sigma}}\{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m\}$, 所以存在 n 阶双随机矩阵 $P=(p_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,m)$, 使得

$$\bar{x}_t=\overline{\Sigma}\{\bar{y}_1^{(p_{1t})},\bar{y}_2^{(p_{2t})},\ldots,\bar{y}_m^{(p_{mt})}\},$$

所以

$$\varphi(\bar{x}_t)=\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{y}_1^{(p_{1t})},\bar{y}_2^{(p_{2t})},\ldots,\bar{y}_m^{(p_{mt})}\})\quad(t=1,2,\ldots,m),\tag{4.25}$$

因为 $\varphi(\bar{x})$ 为抽象 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格上凸函数, 根据不等式 (4.5) 得到

$$\varphi(\bar{x}_t)=\varphi(\overline{\Sigma}\{\bar{y}_1^{(p_{1t})},\bar{y}_2^{(p_{2t})},\ldots,\bar{y}_m^{(p_{mt})}\})\geqslant\Sigma'\{\varphi^{(p_{1t})}(\bar{y}_1),\varphi^{(p_{2t})}(\bar{y}_2),\ldots,\varphi^{(p_{mt})}(\bar{y}_m)\},\tag{4.26}$$

由于对任意的 $t=1,2,\ldots,m$, 有 $p_{1t}+p_{2t}+\cdots+p_{mt}=1$, 根据抽象平均的递增律和吸收律容易得到

$$\begin{aligned}&\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1),\varphi(\bar{x}_2),\ldots,\varphi(\bar{x}_m)\}\\&\quad\geqslant\Sigma'\{\Sigma'\{\varphi^{(p_{11})}(\bar{y}_1),\varphi^{(p_{21})}(\bar{y}_2),\ldots,\varphi^{(p_{m1})}(\bar{y}_m)\},\Sigma'\{\varphi^{(p_{12})}(\bar{y}_1),\varphi^{(p_{22})}(\bar{y}_2),\\&\qquad\ldots,\varphi^{(p_{m2})}(\bar{y}_m)\},\ldots,\Sigma'\{\varphi^{(p_{1m})}(\bar{y}_1),\varphi^{(p_{2m})}(\bar{y}_2),\ldots,\varphi^{(p_{mm})}(\bar{y}_m)\}\}\\&\quad=\Sigma\{\varphi^{(p_{11}+p_{12}+\cdots+p_{lm})}(y_1),\varphi^{(p_{21}+p_{22}+\cdots+p_{2m})}(y_2),\ldots,\varphi^{(p_{m1}+p_{m2}+\cdots+p_{mm})}(y_n)\}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

又因为对任意的 $t=1,2,\ldots,m$, $p_{t1}+p_{t2}+\cdots+p_{tm}=1$, 所以

$$\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1),\varphi(\bar{x}_2),\ldots,\varphi(\bar{x}_m)\}\geqslant\Sigma'\{\varphi(\bar{y}_1),\varphi(\bar{y}_2),\ldots,\varphi(\bar{y}_m)\},$$

这样证明了不等式 (4.24), 易见其等号成立的充要条件是: $\bar{x}_{\sigma(i)}=\bar{y}_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$, 定理 4.15 证毕.

用同样的方法可以证明

定理 4.16 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, 如果 $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i\in\mathcal{S}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 满足 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m\}\prec_m^{\overline{\Sigma}}\{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m\}$, 则对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 严格下凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 都有

$$\Sigma'\{\varphi(\bar{x}_1),\varphi(\bar{x}_2),\ldots,\varphi(\bar{x}_m)\}\leqslant\Sigma'\{\varphi(\bar{y}_1),\varphi(\bar{y}_2),\ldots,\varphi(\bar{y}_m)\},\tag{4.28}$$

其中等号成立的充要条件是: $\bar{x}_{\sigma(i)}=\bar{y}_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

对于定理 4.15, 我们提出如下的猜想.

猜想 4.17 设 $\overline{\Sigma}$ 为抽象向量平均, Σ' 为抽象平均, $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^n$ 为对称 $\overline{\Sigma}$ 集, $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i\in\mathcal{S}$ $(i=1,2,\ldots,m)$, 如果对 $\mathcal{S}$ 上任意的 n 元抽象对称 $\overline{\Sigma}\hookrightarrow\Sigma'$ 上凸函数 $\varphi(\bar{x})$, 不等式 (4.24) 都成立, 则有

$$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m\}\prec_m^{\overline{\Sigma}}\{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m\}.\tag{4.29}$$

对于定理 4.16, 也可以提出类似的猜想.

在本文中, 我们建立了抽象控制不等式的理论基础以及相关的推论, 事实上, 我们并没有用更多的例子表明这些抽象理论的应用价值, 但至少例 2.2 已经说明算术或几何控制不等式理论可以由本文建立的抽象控制不等式理论推导出来. 由于篇幅的限制, 我们将在另外一篇文章中, 应用本文的抽象控制不等式理论统一讨论诸多涉及平均的著名不等式和建立新的一些不等式.

致谢 作者感谢审稿人的宝贵意见和建议, 感谢张健教授、蒲志林教授和钟仕伦教授多年来的关心和帮助.

参考文献

1 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952
2 Bechenbach E F, Bellman R. Inequalities. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983
3 Mitrinović D S, Vasic P P. Analytic Inequalities. Berlin: Springer-Verlag, 1970
4 匡继昌. 常用不等式 (第三版). 济南: 山东科学技术出版社, 2004
5 Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theory of Majoriztion and its Applications. New York-London: Academic Press, 1979
6 王伯英. 控制不等式基础. 北京: 北京师范大学出版社, 1990
7 杨定华. 关于几何凸函数的不等式. 河北大学学报 (自然科学版), **22**(4): 325–327 (2002)
8 王伯英. 对称凸集上初等对称函数为 S-凹的充要条件. 中国科学 A, **29**(8): 793–801 (1986)
9 Minc H, Marcus M. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Boston: Weber & Schmidt, 1964