

纬向不对称热力强迫下超长波的非线性平衡态与阻塞形势

朱 正 心

(中国科技大学研究生院, 北京)

朱 抱 真

(中国科学院大气物理所, 北京)

摘 要

本文采用高截断谱分解方法, 得到了在纬向不对称热力强迫下超长波的非线性平衡态解. 其中一类低指数近于共振特性的平衡态的流场、温度场特点及其稳定性, 反映了实际阻塞形势的一些主要特征. 由于平衡态是解析地求得的, 还引申出一些热力强迫对阻塞形势控制作用的推论.

一、引 言

阻塞形势是大气环流中一种十分重要而且富有特征的环流型式, 有关它的动力机制至今仍缺乏满意的理论解释. 问题的复杂性在于: 第一, 由于经向度很大, 平流非线性作用不可忽略^[1,2]. 第二, 纬向不对称的热力和地形强迫作用十分重要^[3], 一些数值实验^[4-6]也都说明忽略了这种强迫作用就不存在阻塞形势. 我们认为这两个物理因素在阻塞机制中起着本质性的、缺一不可的作用. 由于数学处理的困难, 以往的理论研究中往往只强调其中一个因素的作用, 因此都未能较完整地说明阻塞的主要特征. 近年来, Charney 等^[7]采用高截断谱分解方法讨论了一个强迫耗散的正压模式的多平衡态, 并推测阻塞是一种准稳定的低指数平衡态. 这种方法虽然是高度简化的, 但却给出了可以同时考虑以上两个物理因素的可行的途径. 本文也采用这种方法, 不同的是: 我们采用的是一个能反映超长波特点的斜压模式, 强迫源是纬向不对称加热, 因此可以反映在正压模式中所不能描述的温度平流及热源的重要作用; 在稳定性问题中, 不仅考虑了平衡态对超长波扰动的稳定性, 还考虑了对长波扰动的稳定性, 后者在实际斜压大气中可能是更为重要的问题.

二、模 式

首先对准地转位涡方程作尺度分析:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + J \left[\psi, \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] \\ = - \frac{f_0}{C_p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{RQ}{\sigma p} \right) \end{aligned}$$

V^2/S^2	V^2/S^2	$2Q \cos \varphi \frac{V}{a}$	$\frac{V f_0 R \delta \tilde{T}}{S C_0^2}$	$\frac{V f_0 R \delta \tilde{T}}{S C_0^2}$	$\frac{f_0 R \bar{Q}}{C_p C_0^2}$
10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	10^{-11}
10^{-12}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}

以上第一行是位涡方程, 其中符号都是常用的, Q 为非绝热加热率. 第二行是各项特征尺度, S 为水平尺度, $\delta \tilde{T}$ 为温度变化量, C_0 为重力内波速取为 100 米/秒, $\bar{Q}$ 为加热率量级取为 10^{-6} 卡/克·秒. 第三行是长波 ($S = 10^6$ 米) 时各项量级, 第四行是超长波 ($S = 10^7$ 米) 时各项量级. 从以上尺度分析中可得到两个重要结论: 其一, 超长波时右端的强迫项量级与左端相同, 因此不能象长波那样可以略去它, 超长波的运动形式, 由于强迫项的重要作用而与长波有很大不同. 其二, 超长波的相对涡度项比其它项要小一个量级, 因此可考虑作适当的简化. 把流函数分解为:

$$\phi = -\bar{u}y + \phi^*, \quad (2.1)$$

其中 $\bar{u} = \bar{u}(p)$ 可看作平均西风中不随时间变化的基本部分. 这样涡度方程可写为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \phi^* + J(\phi^*, \nabla^2 \phi^*) + \beta \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}.$$

由尺度分析可知, 上式前三项都是小项. 为了求得解析解, 我们略去第三项 $J(\phi^*, \nabla^2 \phi^*)$. 当然, 当经向度很大时, 这一项可以是与前两项同量级的小量, 仅略去它也不尽合理. 但它与温度平流项相比毕竟要小一个量级, 略去它不至于造成破坏性的误差, 我们在以下得到的解析结果基本符合实际也说明了这一点. 热量方程中各项都是大项, 因此方程组仍为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \phi^* + \beta \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi^*}{\partial p} + J\left(\phi^*, \frac{\partial \phi^*}{\partial p}\right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \frac{\sigma}{f_0} \omega = -\frac{RQ}{C_p p f_0}. \quad (2.3)$$

方程中保留了温度平流的非线性部分, 而略去了涡度平流中的非线性部分, 还保留了相对涡度的线性平流项, 因此这样简化是突出了温度平流的非线性作用, 同时使以下求近似的解析常定解成为可能. 然后, 在垂直方向取二层模式近似, 把涡度方程写在第 1, 3 层上, 热量方程写在第 2 层上, 并把第 4 层看作埃克曼层顶, 通过 ω_4 引进湍流摩擦作用, 消去 ω_2 后得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi = -\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi - \bar{u}_T \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \epsilon - \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{f_0 g}{RT_4} \delta \nabla^2 (\phi - \epsilon), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 - \lambda) \epsilon &= \lambda J(\phi, \epsilon) + \bar{u} \lambda \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \bar{u}_T \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \epsilon - \bar{u}_T \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi \\ &\quad - \beta \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{f_0 g \delta}{RT_4} \nabla^2 (\phi - \epsilon) - \frac{R f_0}{C_p \sigma p_2^2} Q, \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$\phi = \phi_2 = \frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_3), \quad \epsilon = \frac{1}{2} (\phi_1 - \phi_3),$$

$$\bar{u} = \bar{u}_2 = \frac{1}{2} (u_1 + u_3), \quad \bar{u}_T = \frac{1}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_3),$$

$$\lambda = 2f_0^2/\sigma p_2^2, \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu}{2f_0}},$$

ν 为摩擦系数. 为方便起见, 以 L 及 f_0^{-1} 作为长度及时间的单位, 将上两式无因次化为:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \nabla^2 \phi' = -R_0 \frac{\partial}{\partial x'} \nabla^2 \phi' - R_T \frac{\partial}{\partial x'} \nabla^2 \epsilon' - \beta^* \frac{\partial \phi'}{\partial x'} - r \nabla^2 (\phi' - \epsilon'), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla^2 - \lambda^*) \epsilon' &= \lambda^* J(\phi', \epsilon') + R_0 \lambda^* \frac{\partial \epsilon'}{\partial x'} - R_T \lambda^* \frac{\partial \phi'}{\partial x'} - R_0 \frac{\partial}{\partial x'} \nabla^2 \epsilon' \\ &\quad - R_T \frac{\partial}{\partial x'} \nabla^2 \phi' - \beta^* \frac{\partial \epsilon'}{\partial x'} + r \nabla^2 (\phi' - \epsilon') - Q^*, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $R_0 = \bar{u}/f_0 L$, $R_T = \bar{u}_T/f_0 L$, $\beta^* = L\beta/f_0$,

$$r = \frac{\delta g}{RT_4}, \quad \lambda^* = \lambda L^2, \quad Q^* = \frac{RQ}{C_p \sigma p_2^2 f_0}.$$

以下省略掉表示无因次量的撇号. 边界条件取为 β 平面上 $y = 0, \pi$ 处为刚壁, x 方向以 2π 为周期函数.

选取 ∇^2 算子在以上边条件下的特征函数系为基函数, 这种正交归一化的基函数为:

1. $\sqrt{2} \cos my$, $2 \cos nx \sin my$, $2 \sin nx \sin my$, 其中 $n, m = 1, 2, \dots$. 基函数写为 $\{F_i\}$, 截取其中 N 个基函数, 以此展开 ϕ, ϵ, Q^* 等

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i F_i, \quad \epsilon = \sum_{i=1}^N \epsilon_i F_i, \quad Q^* = \sum_{i=1}^N Q_i^* F_i.$$

并展开 Jacobi 项及 $\frac{\partial}{\partial x}$ 项:

$$J(F_j, F_k) = \sum_{i=1}^N C_{ijk} F_i, \quad \frac{\partial F_j}{\partial x} = \sum_{i=1}^N b_{ji} F_i,$$

其中

$$C_{ijk} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dy \int_0^{2\pi} J(F_j, F_k) F_i dx.$$

还利用 $\nabla^2 F_i = -\epsilon_i^2 F_i$, $i = 1, 2, \dots$, ϵ_i^2 是本征值. 这样就可以把(2.6), (2.7)式展为截谱方程组:

$$-\epsilon_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} = \sum_{j=1}^N b_{ji} [\epsilon_j^2 (R_0 \phi_j + R_T \epsilon_j) - \beta^* \phi_j] + r \epsilon_i^2 (\phi_i - \epsilon_i), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} -(\epsilon_i^2 + \lambda^*) \frac{d\epsilon_i}{dt} &= \lambda^* \sum_{j=1}^N C_{ijk} (\phi_j \epsilon_k - \phi_k \epsilon_j) + \sum_{j=1}^N b_{ji} [\epsilon_j^2 (R_0 \epsilon_j + R_T \phi_j) \\ &\quad - \beta^* \epsilon_j] - R_T \lambda^* \sum_{j=1}^N b_{ji} \phi_j + R_0 \lambda^* \sum_{j=1}^N b_{ji} \epsilon_j - r \epsilon_i^2 (\phi_i - \epsilon_i) - Q_i^*. \end{aligned} \quad (2.9)$$

三、纬向不对称热力作用下超长波的多平衡态

这一节仅考虑带状流与超长波共存的系统. 选以下三个基函数

$$F_A = \sqrt{2} \cos y, \quad F_K = 2 \cos nx \sin y, \quad F_L = 2 \sin nx \sin y,$$

其中 F_A 代表带状流分量, F_K, F_L 代表超长波分量, n 是超长波纬向波数. 给定加热场为:

$$Q^* = Q_A^* F_A + Q_K^* F_K,$$

$Q_A^* F_A$ 是径向加热差异, $Q_K^* F_K$ 是纬向加热差异. 例如图 1a 所给的就是两个大陆两个海洋由于地表热状况不同而造成的加热场分布. 这样截谱方程组 (2.8), (2.9) 可写为:

$$-\frac{d\phi_A}{dt} = r(\phi_A - \epsilon_A), \quad (3.1)$$

$$-(1+n^2)\frac{d\phi_K}{dt} = -a_1\phi_L + c_1\epsilon_L + b_1(\phi_K - \epsilon_K), \quad (3.2)$$

$$-(1+n^2)\frac{d\phi_L}{dt} = a_1\phi_K - c_1\epsilon_K + b_1(\phi_L - \epsilon_L), \quad (3.3)$$

$$-(1+\lambda^*)\frac{d\epsilon_A}{dt} = n\alpha\lambda^*(\phi_L\epsilon_K - \epsilon_L\phi_K) - r(\phi_A - \epsilon_A) - Q_A^*, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} -(1+n^2+\lambda^*)\frac{d\epsilon_K}{dt} &= n\alpha\lambda^*(\phi_A\epsilon_L - \phi_L\epsilon_A) - a_1\epsilon_L + c_1\phi_L - b_1(\phi_K - \epsilon_K) \\ &\quad + nR_0\lambda^*\epsilon_L - nR_T\lambda^*\phi_L - Q_K^*, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} -(1+n^2+\lambda^*)\frac{d\epsilon_L}{dt} &= n\alpha\lambda^*(\phi_K\epsilon_A - \phi_A\epsilon_K) + a_1\epsilon_K - c_1\phi_K \\ &\quad - b_1(\phi_L - \epsilon_L) - nR_0\lambda^*\epsilon_K + nR_T\lambda^*\phi_K. \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\alpha = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$, $a_1 = n[\beta^* - (1+n^2)R_0]$,

$$b_1 = r(1+n^2), \quad c_1 = n(1+n^2)R_T.$$

(3.1)–(3.6) 式的常定问题构成一组非线性代数方程. 通过繁复的运算可求得其解析解为:

$$\bar{\epsilon}_K = -\frac{a_1 b_1 \eta}{a_1^2 + b_1^2} \frac{Q_A^*}{Q_K^*} \pm \sqrt{\frac{b_1 Q_A^*}{(c_1 - a_1) n \alpha \lambda^*} - \frac{b_1^4 n^2}{(a_1^2 + b_1^2)^2} \frac{Q_A^{*2}}{Q_K^{*2}}}, \quad (3.7)$$

$$\bar{\epsilon}_L = \frac{a_1}{b_1} \bar{\epsilon}_K + \eta \frac{Q_A^*}{Q_K^*}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_A = -\frac{Q_K^*}{b_1 \eta Q_A^*} \left\{ \bar{\epsilon}_K \left[\frac{a_1^2 + 2b_1^2 + a_1 c_1}{n \alpha \lambda^*} + \frac{(a_1^2 + b_1^2) R_0}{\alpha (c_1 - a_1)} - \frac{R_T (b_1^2 + a_1 c_1)}{\alpha (c_1 - a_1)} \right] \right. \\ \left. - \bar{\epsilon}_L \left[\frac{b_1 (c_1 - a_1)}{n \alpha \lambda^*} - \frac{b_1 R_T}{\alpha} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\bar{\phi}_A = \bar{\epsilon}_A, \quad (3.10)$$

$$\bar{\phi}_K = \frac{b_1^2 + a_1 c_1}{a_1^2 + b_1^2} \bar{\epsilon}_K + \frac{b_1 (a_1 - c_1)}{a_1^2 + b_1^2} \bar{\epsilon}_L, \quad (3.11)$$

$$\bar{\phi}_L = \frac{b_1 (c_1 - a_1)}{a_1^2 + b_1^2} \bar{\epsilon}_K + \frac{b_1^2 + a_1 c_1}{a_1^2 + b_1^2} \bar{\epsilon}_L, \quad (3.12)$$

其中 $\eta = \frac{(a_1^2 + b_1^2)[2(c_1 - a_1) + n\lambda^*(R_0 - R_T)]}{b_1 n \alpha \lambda^*(c_1 - a_1)}$, 加()表示平衡态时的值.

因此, 在一定的加热场条件下有可能存在两种不同的平衡态解. 我们称之为第一种及第二种平衡态, 分别对应于 (3.7) 式中取正号或负号. 这两种平衡态流场特性有很大不同, 我们

将在下面给出具体例子。现在先讨论平衡态稳定性, 以所求得的平衡态为基态迭加小扰动, 把非常定方程组(3.1)–(3.6)简化为线性方程组, 其系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} -r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -r & a_1/(1+n^2) & 0 & r & -c_1/(1+n^2) \\ 0 & -a_1/(1+n^2) & -r & 0 & c_1/(1+n^2) & r \\ \frac{r}{1+\lambda^*} & \frac{n\alpha\lambda^*\bar{e}_L}{1+\lambda^*} & \frac{-n\alpha\lambda^*\bar{e}_K}{1+\lambda^*} & \frac{-r}{1+\lambda^*} & \frac{-n\alpha\lambda^*\bar{\psi}_L}{1+\lambda^*} & \frac{n\alpha\lambda^*\bar{\psi}_K}{1+\lambda^*} \\ \frac{-n\alpha\lambda^*\bar{e}_L}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{b_1}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{n\alpha\lambda^*\bar{e}_A-c_1+nR_T\lambda^*}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{n\alpha\lambda^*\bar{\psi}_L}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{-b_1}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{-n\alpha\lambda^*\bar{\psi}_A+a_1-nR_0\lambda^*}{1+n^2+\lambda^*} \\ \frac{n\alpha\lambda^*\bar{e}_K}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{-n\alpha\lambda^*\bar{e}_A+c_1-nR_T\lambda^*}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{b_1}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{-n\alpha\lambda^*\bar{\psi}_K}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{n\alpha\lambda^*\bar{\psi}_A-a_1+nR_0\lambda^*}{1+n^2+\lambda^*} & \frac{-b_1}{1+n^2+\lambda^*} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

稳定性判据是其特征值实部最大值 $\max\sigma_{1\text{real}} > 0$ 时平衡态不稳定; $\max\sigma_{1\text{real}} < 0$ 时平衡态稳定。

表 1、表 2 给出了一些计算实例。取 $L = a/2$, 纬度 $\varphi_0 = 53^\circ$, 这样 $2\pi L$ 相当于高纬沿纬圈一周的长度。各无因次参数为 $\beta^* = 0.35$, $n = 2$, $r = 0.02$, $\lambda^* = 36$, $R_0 = 0.04$,

表 1

Q_K^*	平衡态种类	$\bar{\psi}_A$	$\bar{\psi}_K$	$\bar{\psi}_L$	$\bar{e}_A$	$\bar{e}_K$	$\bar{e}_L$	$\max\sigma_{1\text{real}}$	$\max\sigma_{2\text{real}}$
0.00410	第一种	-0.01886	-0.02484	0.00623	-0.01886	-0.01552	0.00622	-0.000007	0.00008
	第二种	-0.01886	-0.02485	0.00619	-0.01886	-0.01553	0.00620	0.000007	0.00009
0.00710	第一种	-0.02606	-0.00927	0.02386	-0.02606	-0.00389	0.01626	-0.00405	-0.00685
	第二种	-0.01166	-0.01941	-0.01670	-0.01166	-0.01403	-0.00909	0.01215	0.00519
0.01010	第一种	-0.03032	-0.00441	0.02522	-0.03032	-0.00063	0.01671	-0.00337	-0.01217
	第二种	-0.00740	-0.01576	-0.02018	-0.00740	-0.01198	-0.01167	0.01671	0.00776
0.01310	第一种	-0.03431	-0.00187	0.02554	-0.03431	0.00104	0.01669	-0.00289	-0.01052
	第二种	-0.00341	-0.01367	-0.02165	-0.00341	-0.01076	-0.01280	0.01985	0.00994

表 2

Q_K^*	平衡态种类	$\bar{\psi}_A$	$\bar{\psi}_K$	$\bar{\psi}_L$	$\bar{e}_A$	$\bar{e}_K$	$\bar{e}_L$	$\max\sigma_{1\text{real}}$	$\max\sigma_{2\text{real}}$
0.00183	第一种	-0.01886	-0.01111	0.00279	-0.01886	-0.00694	0.00278	0.00127	0.00008
	第二种	-0.01885	-0.01111	0.00277	-0.01885	-0.00695	0.00277	0.00127	0.00009
0.00483	第一种	-0.03128	-0.00164	0.01133	-0.03128	-0.00006	0.00748	-0.00020	-0.01423
	第二种	-0.00644	-0.00678	-0.00923	-0.00644	-0.00520	-0.00537	0.01033	0.00830
0.00783	第一种	-0.04001	0.00011	0.01145	-0.04001	0.00108	0.00740	-0.00068	-0.00122
	第二种	0.00229	-0.00530	-0.01015	0.00229	-0.00432	-0.00610	0.01860	0.01277
0.01083	第一种	-0.04851	0.00086	0.01112	-0.04851	0.00156	0.00731	-0.00087	0.00854
	第二种	0.01079	-0.00462	-0.01048	0.01079	-0.00391	-0.00637	0.02243	0.01656

$R_T = 0.035$. 表 1 取 $Q_A^* = 0.005$, 换算成有因次量 $Q_A F_A = 0.47 \cos(L^{-1}y) \times 10^{-5}$ 卡/克·秒, 大致相当于冬季经向加热差异; 表 2 取 $Q_A^* = 0.001$, 大致相当于夏半年经向加热差异.

表中最后一项 $\max \sigma_{2\text{real}}$ 表示对长波小扰动的稳定性, 这将在下一节讨论. 图 1a—c 给出表 1 中 $Q_A^* = 0.005$, $Q_K^* = 0.00710$ 时的加热场及第一、二种平衡态的流场厚度场图, 图 2a—c 给出表 2 中 $Q_A^* = 0.001$, $Q_K^* = 0.00483$ 时的情形.

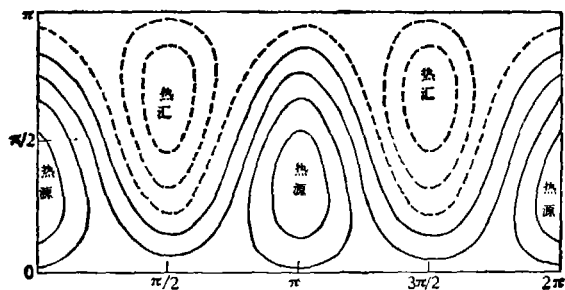


图 1a 冬季加热场

(等值线间隔相当于 0.27×10^{-5} 卡/克·秒)

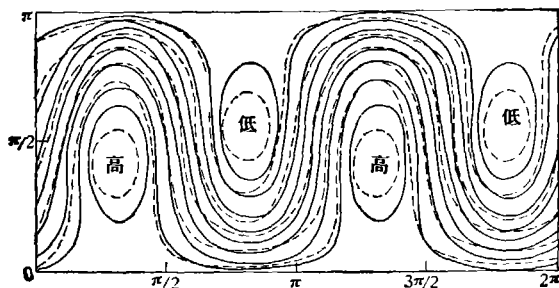


图 1b 第一类平衡态(阻塞型)

(实线为 500 毫巴流场, 虚线为厚度场)

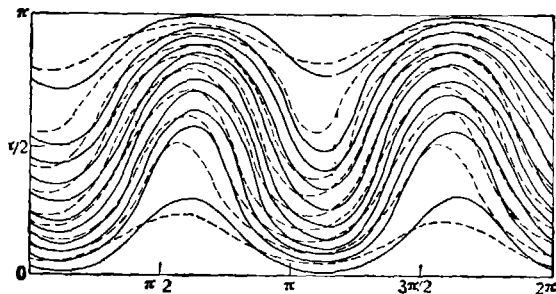


图 1c 第二类平衡态

大量个例计算表明, 这两种平衡态特性有很大不同. 第二种平衡态全都是不稳定的, 其流场特点是西风较强, 流场呈波状, 高压脊位于降冷中心下游一些的地方. 由于它不能稳定维持, 我们将不着重讨论它.

第一种平衡态对超长波小扰动来说一般情况下是稳定的, 只有在 $R_0 > 0.07$, 相当于 $\bar{u} > 25.2$ 米/秒时变得不稳定. 由图 2b, 1b 可以看到, 这种平衡态的流场、温度场特点与阻塞

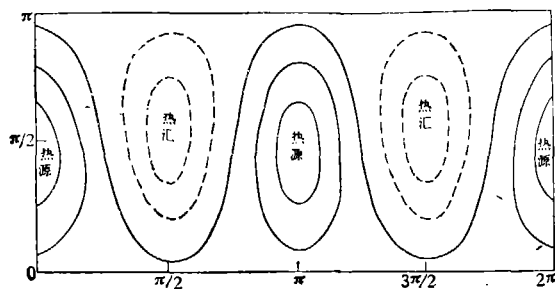


图 2a 夏季加热场

(说明同图 1a)

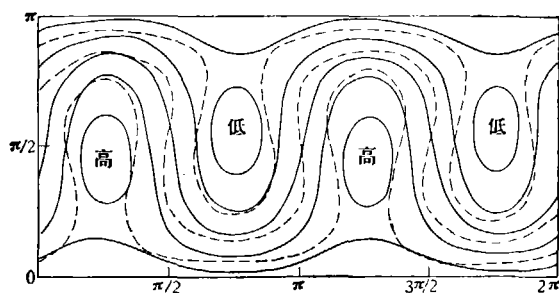


图 2b 第一类平衡态(阻塞型)

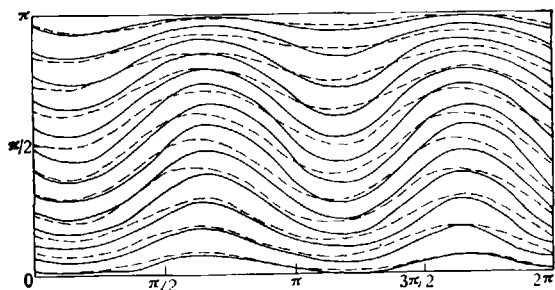


图 2c 第二类平衡态

形势十分相象, 西风强度较弱, 流场经向度很大, 甚至出现明显的高、低压中心, 而且暖中心与高中心大致是重合的; 西风急流在高压前绕流的特征很明显, 甚至表现出分支的特点 (如 2 (b)); 另外, 高压中心与加热中心在位相上的配置也基本上符合实际阻塞形势的情形, 高压中心出现在加热中心偏东 $1/4$ 个波长左右的地方。由北半球冬季的热源分布来看^[8], 加热中心位于北大西洋西部, 北太平洋西部。另外地中海黑海地区有一弱加热中心, 相应地阻塞高压最集中频繁的区域就在北大西洋东部欧洲西北部地区, 北太平洋东部阿拉斯加地区。此外, 乌拉尔山也有一次集中地区, 这种位相上的配置与第一种平衡态得到的结果是一致的。因此, 无论是从常定流场的稳定性, 还是从流场温度场的特点来看, 这种平衡态都明显地具有阻塞形势的一些最主要的特点。

四、超长波平衡态对长波小扰动的稳定性

斜压大气与正压大气不同之处是必须考虑斜压不稳定性问题。很明显,我们必须讨论以上所求得的超长波平衡态对于处于斜压最不稳定范围内的长波小扰动的稳定性,否则就不能肯定斜压大气中以上第一种平衡态是否能象真实的阻塞形势一样有可能稳定维持。

讨论带状流与一个超长波、一个长波共存的系统,取基函数为:

$$F_A = \sqrt{2} \cos y, F_K = 2 \cos nx \sin y, F_L = 2 \sin nx \sin y,$$

$$F_M = 2 \cos mx \sin y, F_N = 2 \sin mx \sin y.$$

其中 F_M, F_N 代表长波分量, m 是长波纬向波数。考虑到长波情况下 $J(\phi^*, \nabla^2 \phi^*)$ 项不可略去,因此在长波分量的截谱方程中,将考虑非线性涡度平流项;超长波分量的方程仍略去这一项,这样,截谱方程组为:

$$-\frac{d\phi_A}{dt} = r(\phi_A - \epsilon_A), \quad (4.1)$$

$$-(1+n^2)\frac{d\phi_K}{dt} = -a_1\phi_L + c_1\epsilon_L + b_1(\phi_K - \epsilon_K), \quad (4.2)$$

$$-(1+n^2)\frac{d\phi_L}{dt} = a_1\phi_K - c_1\epsilon_K + b_1(\phi_L - \epsilon_L), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} -(1+\lambda^*)\frac{d\epsilon_A}{dt} &= n\alpha\lambda^*(\phi_L\epsilon_K - \phi_K\epsilon_L) + m\alpha\lambda^*(\phi_N\epsilon_M - \phi_M\epsilon_N) \\ &\quad - r(\phi_A - \epsilon_A) - Q_A^*, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -(1+n^2+\lambda^*)\frac{d\epsilon_K}{dt} &= n\alpha\lambda^*(\phi_A\epsilon_L - \phi_L\epsilon_A) - a_1\epsilon_L + c_1\phi_L - b_1(\phi_K - \epsilon_K) \\ &\quad + nR_0\lambda^*\epsilon_L - nR_T\lambda^*\phi_L - Q_K^*, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} -(1+n^2+\lambda^*)\frac{d\epsilon_L}{dt} &= n\alpha\lambda^*(\phi_K\epsilon_A - \phi_A\epsilon_K) + a_1\epsilon_K - c_1\phi_K - b_1(\phi_L - \epsilon_L) \\ &\quad - nR_0\lambda^*\epsilon_K + nR_T\lambda^*\phi_K, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$-(1+m^2)\frac{d\phi_M}{dt} = m^3\alpha(\phi_N\phi_A + \epsilon_N\epsilon_A) - a_2\phi_N + c_2\epsilon_N + b_2(\phi_M - \epsilon_M), \quad (4.7)$$

$$-(1+m^2)\frac{d\phi_N}{dt} = -m^3\alpha(\phi_A\phi_M + \epsilon_A\epsilon_M) + a_2\phi_M - c_2\epsilon_M + b_2(\phi_N - \epsilon_N), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} -(1+m^2+\lambda^*)\frac{d\epsilon_M}{dt} &= m^3\alpha(\phi_N\epsilon_A + \phi_A\epsilon_N) + m\alpha\lambda^*(\phi_A\epsilon_N - \phi_N\epsilon_A) \\ &\quad - a_2\epsilon_N + c_2\phi_N - b_2(\phi_M - \epsilon_M) + mR_0\lambda^*\epsilon_N - mR_T\lambda^*\phi_N, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} -(1+m^2+\lambda^*)\frac{d\epsilon_N}{dt} &= -m^3\alpha(\phi_A\epsilon_M + \phi_M\epsilon_A) + m\alpha\lambda^*(\phi_M\epsilon_A - \phi_A\epsilon_M) \\ &\quad + a_2\epsilon_M - c_2\phi_M - b_2(\phi_N - \epsilon_N) - mR_0\lambda^*\epsilon_M + mR_T\lambda^*\phi_M, \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $a_2 = m[\beta^* - (1+m^2)R_0]$, $b_2 = r(1+m^2)$, $c_2 = m(1+m^2)R_T$.

我们不要求求得(4.1)–(4.10)式常定问题的全部解析解,这是不可能的。但很明显,有两个解析的非零解是可以求得的,因为当取 $\phi_M = \phi_N = \epsilon_M = \epsilon_N = 0$ 时,(4.1)–(4.6)式恰与

(3.1)–(3.6)式完全一样,因此所求得的平衡态就是上一节所求得的二种平衡态,只是长波分量为零而已. 我们所关心的是对长波扰动的稳定性. 以平衡态 $(\bar{\phi}_A, \bar{\phi}_K, \bar{\phi}_L, \bar{\theta}_A, \bar{\theta}_K, \bar{\theta}_L, 0, 0, 0, 0)$ 为基态迭加小扰动进行线性化,其系数矩阵为:

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中分块矩阵 A 与 (3.13) 式一样是六阶阵, B 是个四阶阵

$$B = \begin{bmatrix} -r & \frac{-m^3\alpha\bar{\phi}_A+a_2}{1+m^2} & r & \frac{-m^3\alpha\bar{\theta}_A-c_2}{1+m^2} \\ \frac{m^3\alpha\bar{\phi}_A-a_2}{1+m^2} & -r & \frac{m^3\alpha\bar{\theta}_A+c_2}{1+m^2} & r \\ \frac{b_2}{1+m^2+\lambda^*} & \frac{(-\alpha m^3+m\alpha\lambda^*)\bar{\theta}_A-c_2+mR_T\lambda^*}{1+m^2+\lambda^*} & \frac{-b_2}{1+m^2+\lambda^*} & \frac{-(\alpha m^3+m\alpha\lambda^*)\bar{\phi}_A+a_2-mR_0\lambda^*}{1+m^2+\lambda^*} \\ \frac{(\alpha m^3-m\alpha\lambda^*)\bar{\theta}_A+c_2-mR_T\lambda^*}{1+m^2+\lambda^*} & \frac{b_2}{1+m^2+\lambda^*} & \frac{(\alpha m^3+m\alpha\lambda^*)\bar{\phi}_A-a_2+mR_0\lambda^*}{1+m^2+\lambda^*} & \frac{-b_2}{1+m^2+\lambda^*} \end{bmatrix}$$

由 B 阵所得到的特征值实部最大值 $\max \sigma_{\text{real}}$ 说明的是平衡态对长波小扰动的稳定性. 取 $m=6$, 表 1、表 2 最右一列是给出的部分计算实例. 对第二种平衡态来讲, 由于对超长波扰动来讲都已是稳定的, 因此它根本不可能稳定维持. 对第一种平衡态来讲, 其不稳定的可能性显然比单纯考虑超长波时是增加的, 而且与外参数的取值有关. 当 Q_K^* 较大时(如表 1 冬季的情况), 纬向热力差异 Q_K^* 在相当宽广的区域内第一种平衡态对长波扰动都可能是稳定的; 当 Q_K^* 较小时(如表 2 夏季的情况), 则这种稳定区域显然缩小得多. 总的来讲, 当 Q_K^* 很接近 Q_{Kc}^* (下一节讨论)或太大时, 第一种平衡态不稳定.

稳定性的机制问题. 为什么第二种平衡态对超长波扰动都不稳定? 这不太可能是一般的斜压不稳定. 因为超长波大多位于稳定波段. 这种不稳定性很可能是由于流场与纬向加热强迫源之间的相互作用所造成的. 因为我们可以看到第二种平衡态的脊位于热汇中心下游一些的地方, 由于热力作用这里的气柱趋向收缩, 不利于脊的维持. 而第一种平衡态的脊位于加热中心下游, 热力作用是有利于脊的维持的. 因此它可能稳定维持. 至于对长波扰动的不稳定性机制可能主要是斜压不稳定造成的, 当然这比一般所讨论的斜压不稳定要复杂.

总之, 第一种平衡态对长波小扰动仍有可能是稳定的. 即如果存在长波小扰动的话它也可能受到抑制, 从而保持流场的准常定状态, 这就更接近于阻塞形势的实际情形.

五、有关阻塞形势动力机制的讨论

由于我们得到的解是解析的, 因此还可从中引申出一些有关动力机制的讨论.

1. 在纬向加热不对称作用下, 阻塞形势存在的必要条件. 由 (3.7) 式可看到, 有实根的条件是根号内大于或等于 0, 由此引出两个必要条件:

(1) 必须 $c_1 - a_1 > 0$, 换算成有因次量即

$$\bar{u}_1 > \beta / \left[\left(\frac{2\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L_y} \right)^2 \right] = \bar{u}_c, \quad (5.1)$$

其中 $L_x = 2\pi L/n$, $L_y = 2\pi L$ 分别为纬向经向的波长, $\bar{u}_c$ 是 Rossby 临界风速. 这就是说 250 毫巴上西风风速的定常部分 $\bar{u}_1$ 一定要大于 $\bar{u}_c$ 才有解. 由于 $\bar{u}_c$ 反比于波数平方, 因此波数较大的阻塞形势较易达到此条件.

(2) 必须

$$|Q_K^*| \geq \sqrt{\frac{b_1[2(c_1 - a_1) + n\lambda^*(R_0 - R_T)]^2}{(c_1 - a_1)n\alpha\lambda^*}} Q_A^* = Q_{Kc}^*, \quad (5.2)$$

其中 Q_{Kc}^* 是纬向加热差异的一个临界值。这个必要条件说明纬向加热差异的强度必须超过某一临界值以上时,才有可能出现阻塞形势。以表 1, 2 为例,相当于要求加热中心的数值必须分别达到 5.49×10^{-6} 卡/克·秒及 2.45×10^{-6} 卡/克·秒以上才行。如果考虑对长波扰动的稳定性,则要求比 Q_{Kc}^* 更大一些才能稳定维持。实际上,由于大气与海陆下垫面的相互反馈,纬向加热差异是缓慢变化的,当其强度达一定程度时,才有可能出现阻塞形势;反之,一旦其强度减小到接近或低于临界值时,原先维持着的阻塞形势就会很快崩溃,因不再能维持平衡态,而在形式上主要是长波扰动的强烈发展,使准常定流场被破坏。这或许是一种尚未被人们所了解的阻塞形势崩溃机制。

2. 阻塞形势的强度。在推导 (3.7)–(3.12) 式的过程中,还可得到

$$e_K^2 + e_L^2 = \frac{(a_1^2 + b_1^2)}{b_1 n \alpha \lambda^* (c_1 - a_1)} Q_A^*, \quad (5.3)$$

这说明阻塞形势的振幅正比于 $\sqrt{Q_A^*}$ 。由于冬季经向加热差异比夏季大得多,因此冬季的阻塞强度比夏季强,这是符合实际的。另外由 (5.3) 式还可看到,当 $(c_1 - a_1)$ 很小,亦即 $\bar{u}_1$ 接近 $\bar{u}_c$ 时,振幅将很大,这种情况是说明超长波与强迫源接近于共振态时的情形。但在这里完全共振以致于阻塞振幅无穷大的情况是不可能存在的。因为由 (5.2) 式可看到,此时 Q_{Kc}^* 也趋向无穷大,从而阻塞存在的必要条件不能满足,此时不存在阻塞形势。由此看来,阻塞形势可能是一种流场与纬向加热强迫源接近于共振状态时的准稳定的超长波非线性平衡态。

3. 强迫源对阻塞位相的控制。设 φ 为阻塞厚度波的位相角, $\varphi = \arctg(e_L/e_K)$, 由 (3.7), (3.8) 式可得

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{e_K}{\sqrt{e_K^2 + e_L^2}} = -\frac{a_1 \sqrt{b_1[2(c_1 - a_1) + n\lambda^*(R_0 - R_T)]} \sqrt{Q_A^*}}{\sqrt{e_K^2 + e_L^2} \sqrt{n\alpha\lambda^*(c_1 - a_1)(a_1^2 + b_1^2)}} \frac{Q_A^*}{Q_K^*} \\ &\quad + \sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{b_1^2[2(c_1 - a_1) + n\lambda^*(R_0 - R_T)]^2}{n\alpha\lambda^*(c_1 - a_1)(a_1^2 + b_1^2)}} \frac{Q_A^*}{Q_K^*}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

上式说明阻塞位相与加热场的关系。从中可引出两个有意义的推论:

(1) 可以证明 $\sin \varphi = e_L/\sqrt{e_K^2 + e_L^2}$ 总是正值,这说明 φ 在第一、二象限内, $\cos \varphi$ 在此范围内单调递减。由 (5.4) 式可看出,当纬向加热差异强度 Q_K^* 较大时, $\cos \varphi$ 较大,从而 φ 较小,阻塞位相偏西;反之, Q_K^* 较弱时位相偏东。由大西洋及欧洲沿岸地区冬半年阻塞形势出现日数的统计^[9] 结果可证实以上结论。大西洋出现最多的是在隆冬时期,而欧洲沿岸则是 11 月及 3 月。这可用隆冬时海陆加热差更强,所以位相偏西来加以解释。

(2) 极限位相与阻塞高压出现区域。相当于 Q_K^* 为 Q_{Kc}^* 及 ∞ 可求得 (5.4) 式中 φ 的极大、极小值:

$$\max \varphi = \arccos\left(\frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right), \quad \min \varphi = \arccos\left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right), \quad (5.5)$$

以 $\bar{u} = 18$ 米/秒为例,此时 $\min \varphi = 63^\circ 26'$, $\max \varphi = 153^\circ 26'$, 这说明阻塞高压总是位于加

热中心下游 $\min\varphi$ 到 $\max\varphi$ 之间(半波长为 180°)。这说明了在一定季节里, 阻塞高压为什么总出现在一定的经度范围之内这个重要特点。而且随季节的改变, 热源位相显著改变, 从而阻塞高压活动区域有着明显的季节变化。

六、小 结

本文从非线性和纬向不对称热力强迫作用这些阻塞形成和维持的根本性的物理因子出发, 用高度截谱方法求得了超长波多平衡态解, 并讨论了平衡态对超长波和长波扰动的稳定性。结果得到了一类低指数平衡态解, 其准定常流场的稳定性及流场温度场的型式上都很好地说明了引言中所提到的阻塞形势的主要的和显著的特点, 从而可以认为阻塞形势就是一种在纬向不对称强迫源作用下的准稳定的超长波非线性平衡态。由于平衡态解是解析地得到的, 因此还可引申出一些有关动力机制的推论, 其中主要有: 纬向加热差异强度的临界值与阻塞维持的必要条件; 一种可能的阻塞崩溃机制; 影响阻塞强度的因素; 热力强迫源对阻塞高压出现位置的控制, 极限位相等。

由于方法是高度简化的, 因此所有的结果都只是定性的近似, 不能提供定量的依据。尽管如此, 一个高度简化模式的解析的结果, 能够反映出阻塞形势的许多重要的典型的特点, 这是有启发性的。我们将进一步考虑纬向不对称的加热与地形对阻塞形势维持的共同作用, 并期望能在数值模拟中验证理论模式所得到的一些主要结论。

致谢: 此文承叶笃正先生详细指正, 李麦村、纪立人两同志也曾提出了有益的意见, 特此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Rossby, C. G., *J. Chin. Geophys. Soc.*, **2**(1950), 1—13.
- [2] 叶笃正、陈雄山, 气象学报, **33** (1963), 145—151.
- [3] 朱抱真, 气象学报, **34** (1964), 285—298.
- [4] Kikuchi, Y., *J. Meteor. Soc. Japan*, **49**(1971), 564—572.
- [5] Everson, P. J. & Davis, D. R., *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **96**(1970), 404—412.
- [6] Egger, J., *J. Atmos. Sci.*, **35**(1978), 1788—1801.
- [7] Charney, J. G. & Devore, J. G., *J. Atmos. Sci.*, **36**(1979), 375—386.
- [8] 朱抱真, 气象学报, **28** (1957), 122—139.
- [9] 叶笃正等, 北半球冬季阻塞形势的研究, 科学出版社, 1962.