

原初密度扰动与原初黑洞

孙成一

西北大学现代物理研究所, 陕西省理论物理前沿重点实验室, 西安 710069

E-mail: ddscy@163.com

2018-03-31 收稿, 2018-04-08 修回, 2018-04-10 接受, 2018-09-27 网络版发表

国家自然科学基金(11405130)资助

摘要 在宇宙早期形成的黑洞被称为原初黑洞. 原初黑洞反映了宇宙早期的结构, 研究原初黑洞将加深我们对早期宇宙演化规律的理解. 同时, 将有关原初黑洞的理论计算结果和相关观测数据进行比较, 可以有效地对相关理论模型加以限制. 因此原初黑洞在理论和观测两方面都具有重要的研究价值. 形成原初黑洞的机制有多种, 本文将主要介绍大幅度密度扰动产生原初黑洞的机制. “Carr-Hawking”塌缩模型被相关文献广泛采用. 该塌缩模型认为原初黑洞的质量近似等于塌缩区域进入视界时的视界质量. 但是, 近年的数值计算结果表明临界塌缩模型更加合理可靠. 在临界塌缩模型中, 原初黑洞的质量应由临界质量关系给出. 本文首先介绍大幅度密度扰动塌缩形成原初黑洞的一些基本概念: 原初黑洞的形成条件、原初黑洞的质量、形成时间及其寿命等; 然后介绍原初黑洞丰度的计算以及如何从暴涨模型的结果计算原初黑洞的丰度.

关键词 原初黑洞, 暴涨, 临界塌缩, 原初黑洞丰度

在宇宙早期形成的黑洞被称为原初黑洞^[1,2]. 能够形成原初黑洞的机制有多种. 例如, 辐射主导时期的大幅度密度扰动可以塌缩成原初黑洞^[3]; 宇宙早期相变造成的一维拓扑缺陷, 即宇宙弦(cosmic string)也可以塌缩成原初黑洞^[4]; 宇宙早期一次相变过程中产生的真空泡之间的碰撞也可以产生原初黑洞^[5,6]. 因此, 通过研究原初黑洞, 我们可以得到有关宇宙早期演化和结构的丰富信息. 而且, 宇宙早期极小尺度上的扰动, 如果在进入视界时不能形成黑洞, 将被粒子的自由运动抹平, 因此原初黑洞是宇宙极小尺度扰动已知的唯一可观测效应. 另外, 因为在宇宙早期可以形成质量小至普朗克量级的原初黑洞, 具有很高的霍金辐射温度, 所以原初黑洞是研究霍金辐射的理想客体.

而且原初黑洞还是一种天然的冷暗物质(cold dark matter, CDM)^[7]. 去年引力波的观测结果^[8]发布

后, 有文章认为产生这次引力波信号的大黑洞很可能起源于暗物质中的原初黑洞^[9,10,11]. 虽然目前还没有观测到原初黑洞的存在, 但这并不意味着观测对原初黑洞毫无限制. 恰恰相反, 观测对原初黑洞有相当强的限制. 比如, 暗物质的一部分为原初黑洞这一简单要求就对初始的原初黑洞丰度 β (即原初黑洞能量密度与宇宙总能量密度之比)提出了强的限制: $\beta < 10^{-5} \sim 10^{-30}$. 另外, 通常认为暴涨产生了原初的密度扰动^[12], 而大幅度的密度扰动将产生原初黑洞. 因此, 观测对原初黑洞的限制也进而限制了暴涨模型^[13].

原初黑洞具有重要的研究意义, 有关这方面的研究有很多, 近期综述请详见文献[14~19]. 本文将拾遗补缺, 对大幅度密度扰动塌缩形成的原初黑洞作简要的介绍. 将首先简要介绍原初黑洞的基本概念(形成条件、质量、形成时间和寿命等); 然后将主

引用格式: 孙成一. 原初密度扰动与原初黑洞. 科学通报, 2018, 63: 2967–2973

Sun C Y. Primordial density perturbation and primordial black holes (in Chinese). Chin Sci Bull, 2018, 63: 2967–2973, doi: 10.1360/N972018-00314

要介绍如何计算原初黑洞丰度;最后是总结和讨论.

1 原初黑洞的基本概念

理论上,有多种物理过程可能形成原初黑洞.如,辐射主导时期的大幅度密度扰动在进入哈勃视界时可能塌缩成原初黑洞^[3];宇宙早期相变造成的一维拓扑缺陷,即宇宙弦可能塌缩成原初黑洞^[4];宇宙早期一次相变过程中产生的真空泡之间的碰撞也可能产生原初黑洞^[5,6]等.在观测上,这些机制都受到很强的限制,需要调节模型的参数以便与观测相符.但是,后两种机制面临的精细调节难题较严重.因此,本文后续将基于第一种机制展开讨论.

1.1 原初黑洞的形成条件

在宇宙早期,如果某一块停止膨胀的区域具有大到足以克服内部压力的质量,那么该区域在进入哈勃视界后就会最终塌缩成一个原初黑洞.根据文献[3],一个共动半径为 R 的区域能够塌缩成黑洞的条件为

$$\delta_c \leq \delta_R^H \leq 1,$$

这里 $\delta_R^H \equiv \delta_R(t_R)$ 是区域 R 在 t_R 时刻进入视界时的平均密度扰动比. $\delta_R(t)$ 定义如下:

$$\delta_R = \int \delta(x, t) W_R(x) d^3x, \quad (1)$$

其中 $W_R(x)$ 为窗口函数; $\delta(x, t) = [\rho(x, t) / \bar{\rho}(t)]$ 为无量纲的能量密度扰动比, $\rho(x, t)$ 和 $\bar{\rho}(t)$ 分别为能量密度和背景能量密度.上限是为了避免形成分离宇宙(separate universe).后来,进一步的研究表明,即使 $\delta_R^H > 1$,也不会形成分离宇宙^[20],因此上限1并无必要.区域 R 能够塌缩成黑洞的条件应为

$$\delta_c \leq \delta_R^H \leq 1, \quad (2)$$

如果要求收缩区域进入视界时的半径须大于Jeans半径,并假设收缩区域密度均匀,那么 $\delta_c = w$ ($w = p/\rho$ 为态方程参数)^[3].但数值模拟的结果表明, δ_c 与 w 以及塌缩区域的构型有关.对于辐射($w = 1/3$),依据不同的构型, $\delta_c \approx 0.45 \sim 0.66$ ^[21,22].文献[23]则给出了一个有趣的解析结果

$$\delta_c = \sin^2 \left(\frac{p\sqrt{w}}{1+3w} \right), \quad (3)$$

相比 $\delta_c = w$,该结果和数值结果符合得更好.

1.2 原初黑洞的质量

原初黑洞的质量与其具体的塌缩模型有关.如

果采用标准的球对称塌缩模型,即“Carr-Hawking”塌缩模型^[3],那么区域 R 形成的原初黑洞质量 M_{BH} 近似为

$$M_{BH} \approx M_H \approx \frac{c^3 t_R}{G} \approx 10^{15} \left(\frac{t_R}{10^{-23} \text{s}} \right) g, \quad (4)$$

这里 M_H 为 R 进入视界时的视界质量:

$$M_H = \frac{4\pi}{3} H^{-3}(t_R) \bar{\rho}(t_R), \quad (5)$$

这里 $H(t)$ 为哈勃参数; t_R 为 R 进入视界的时刻(通常也被视为黑洞形成的时刻),由下式给出

$$a(t_R) H(t_R) = k_R \equiv R^{-1}, \quad (6)$$

其中 $a(t)$ 为宇宙尺度因子.文献[1]首次得到这一结果.文献[2]首次指出原初密度扰动可以导致引力塌缩.起初,人们认为原初黑洞一旦形成,其质量在整个辐射主导时期都将会随着宇宙的膨胀而同步增长,最终将达到 $10^{15} M_\odot$ (辐射主导结束时的视界质量)的量级,但是观测对这类巨型天体有很强的限制,因此在很长一段时间内,原初黑洞被认为不可能存在或者数量极其稀少^[1].直到文献[3]通过详细的计算表明:不存在质量随宇宙膨胀同步增长的球对称黑洞解,因此原初黑洞的质量不会有显著的增长.随后的研究进一步证明这一点^[24,25].

在上述的“Carr-Hawking”点塌缩模型中,原初黑洞的质量近似等于形成黑洞时的视界质量.但是后来,多个数值计算的结果表明存在一种临界塌缩(critical collapse)现象^[26-30],即原初黑洞的质量与 δ_R^H 之间存在如下关系

$$M_{BH} = K M_H (\delta_R^H - \delta_c)^\gamma, \quad (7)$$

其中 K 和 γ 为常数.这一模型被称为“临界塌缩”模型.在此模型中,黑洞的质量不再近似等于视界质量,而是一个依赖 δ_R^H 的函数.

1.3 原初黑洞的形成时间

通常认为,如果满足条件(2),区域 R 将在进入哈勃视界后很快塌缩成黑洞.因此, R 被视为对应原初黑洞的形成时间.理论上, t_R 可以取任意值,即在任意时刻,都存在密度扰动进入哈勃视界时塌缩成黑洞的可能性.但是,宇宙微波背景的观测数据告诉我们在 $\sim 1 \text{ Mpc}^{-1}$ 的尺度上,密度扰动的振幅 $\approx 10^{-5}$ ^[31,32].通过(13)式,取 $\sigma_R \approx 10^{-5}$ 以及 $\delta_c \approx 0.3$,

我们很容易发现相应的原初黑洞丰度小到可以忽略不计. 因此, 通常认为在宇宙微波背景对应的观测尺度上不会形成原初黑洞. 我们取 1 Mpc 为宇宙微波背景观测的最小尺度, 用下标 B 标记参数在该尺度进入哈勃视界时的取值. 我们假设宇宙中仅存在辐射和物质成分, 这样很容易得到下述等式

$$1 + z_B = H_0^{-1} \sqrt{1 + z_{eq}} \sim 10^{-5}, \quad (8)$$

其中 z_{eq} 为辐射成分与物质成分相等时的宇宙学红移. 因此, 通常认为原初黑洞在辐射主导的早期 ($z > z_B$) 才有可能形成的.

1.4 原初黑洞的寿命

原初黑洞的寿命即为其通过霍金辐射^[33]蒸发掉所需的时间^[14]

$$\tau(M_{BH}) \approx \frac{G^2 M_{BH}^3}{\hbar c^4} \approx 10^{10} \left(\frac{M_{BH}}{10^{15} \text{ g}} \right)^3 \text{ Gyr}. \quad (9)$$

质量 $M_{BH} \sim 10^{15} \text{ g}$ 的原初黑洞目前正在蒸发, 因此这类原初黑洞的丰度将受到伽马射线观测数据的限制^[34]. 更轻的原初黑洞已经蒸发完, 大爆炸核合成对这类黑洞有很强的限制^[35,36]. 如果假设黑洞蒸发后会剩余稳定的残留质量, 可以用现在的物质密度限制这类黑洞^[37]. 更重的原初黑洞截至目前是稳定的. 这类原初黑洞会产生引力透镜效应, 并对很多天文现象产生影响, 从而可以从观测上对其加以限制. 有关这方面的研究请详见文献[14,15,19].

2 原初黑洞的丰度

我们将回顾大幅度原初密度扰动塌缩机制中, 原初黑洞质量谱(即不同质量的原初黑洞丰度密度)的计算方法. 假设密度扰动的几率分布是高斯分布. 这样, 在 t 时刻, 区域 R 的平均密度扰动比 $\delta_R(t)$ 处于区间 $(\delta_R, \delta_R + dR)$ 的几率为

$$P(M_R, t) d\delta_R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R(t)} \exp\left\{-\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2(t)}\right\} d\delta_R, \quad (10)$$

这里 $M_R = 4\pi(aR)^3 \bar{\rho}(t)/3$ 是 t 时刻区域 R 对应的平均质量; $\sigma_R^2(t)$ 是均方差(质量方差)

$$\sigma_R^2(t) = \int_0^\infty \mathcal{P}_\delta(k, t) W^2(kR) \frac{dk}{k}, \quad (11)$$

其中 $\mathcal{P}_\delta(k, t)$ 是密度扰动功率谱, $W^2(kR)$ 是窗口函数 $W_R(x)$ 的傅里叶变换.

2.1 近似结果

在 t_R 时刻, 区域 R 形成原初黑洞的几率为^[38]

$$\beta_i = 2 \int_{\tilde{\delta}_c}^\infty P(M_R, t_R) d\delta_R. \quad (12)$$

注意, 这里考虑到归一化的问题, 因子 2 被额外引入^[39,40]. 在大多数的模型中 $\delta_c \gg \sigma_R$, 这时我们有^[41]

$$\beta_i = \frac{\sigma_R(t_R)}{\sqrt{2\pi}\delta_c} \exp\left\{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_R^2(t_R)}\right\}. \quad (13)$$

因为(11)式所定义的 $\sigma_R^2(t)$ 是所有半径大于 R 的区域的总效应, 所以在“Carr-Hawking”塌缩模型中, β_i 是形成所有质量超过 M_H 的原初黑洞的总几率(M_H 的定义见(5)式)^[40]. 不过, 在很多模型中下, β_i 随着 M_H 的增加迅速减小, 因此常常被近似地认为是质量 $M_{BH} \approx M_H$ 的原初黑洞的初始丰度.

在临界塌缩模型中, 区域 R 进入视界时可能形成的原初黑洞的质量不再是某一个确定值, 而是一个依赖 β_R 的函数. 虽然形成质量 $M_{BH} \approx M_H$ 黑洞的几率最大^[42], 但是认为 β_i 是质量 $M_{BH} \approx M_H$ 的原初黑洞的初始丰度不再是一个很好的近似. 而且, 即使依然采用“Carr-Hawking”塌缩模型, 我们也需要更准确的原初黑洞质量谱, 以便更好地拟合精度日益增长的观测数据.

2.2 精确结果

根据“Press-Schechter”测方法^[39,43], 为得到有关原初黑洞质量谱的表达式, 我们定义如下积分^[40,44,45]

$$F(M_R, t) = \int_{\tilde{\delta}_c}^\infty P(M_R, t) d\delta_R, \quad (14)$$

$F(M_R, t)$ 是 t 时刻, 所有背景质量超过 M_R (即半径超过 R) 并且平均密度扰动大于 $\tilde{\delta}_c$ 的区域占整个空间的总比例. 因此, t 时刻, 平均密度扰动大于 $\tilde{\delta}_c$ 并且背景质量处于区间 $(M_R, M_R + dM_R)$ 的区域所占比例为

$$f(M_R, \tilde{\delta}_c) = -\frac{\partial F}{\partial M_R}. \quad (15)$$

进一步, 我们就得到 t 时刻, 平均密度扰动处于区间 $(\delta_R, \delta_R + d\delta_R)$ 并且背景质量处于区间 $(M_R, M_R + dM_R)$ (即半径处于区间 $(R, R + dR)$ 的区域的数密度为^[40,44,45]

$$n(M_R, \delta_R) dM_R d\delta_R = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}(t)}{M_R \sigma_R^2} \left| \frac{\partial \sigma_R}{\partial M_R} \left(\frac{\delta_R^2}{\sigma_R^2} - 1 \right) \right| \exp \left\{ -\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2} \right\}. \quad (16)$$

此区域如果在进入视界时满足条件 $\delta_R^H \geq \delta_c$, 那么就会形成黑洞. 因此, t 时刻质量处于区间 $(M_{BH}, M_{BH}+dM_{BH})$ 的黑洞数密度为

$$n_{BH}(M_{BH}) dM_{BH} = \int_{\delta_c}^{\infty} n(M_R, \delta_R) \left| \frac{\partial M_R}{\partial M_{BH}} \frac{\partial \delta_R}{\partial \delta_R^H} - \frac{\partial M_R}{\partial \delta_R^H} \frac{\partial \delta_R}{\partial M_{BH}} \right| d\delta_R^H. \quad (17)$$

注意, t 时刻是任意选定的初始时刻, 并非原初黑洞形成的时刻. 一个区域只有在进入视界后, 才开始塌缩并最终形成黑洞. (17)式实际计算的是在将来进入视界后会形成黑洞(质量处于区间 $(M_{BH}, M_{BH}+dM_{BH})$)的区域在 t 时刻的数密度. 通常选取 t 时刻为再热结束(即辐射主导时期开始)的时刻.

质量处于区间 $(M_{BH}, M_{BH}+dM_{BH})$ 的原初黑洞在 t 时刻的能量密度为 $n_{BH}(M_{BH})M_{BH}dM_{BH}$. 如果假设原初黑洞形成后其保持质量不变, 那么原初黑洞目前的能量密度比为^[46]

$$\Omega_{PBH} = \frac{1}{\rho_c} \left(\frac{a_i}{a} \right)^3 \int_0^{\infty} M_{BH} n(M_{BH}) dM_{BH}, \quad (18)$$

其中 ρ_c 是现在的临界能量密度(critical density), a_i 和 a_0 分别是 t 时刻和现在的尺度因子.

如果考虑黑洞的霍金辐射效应, 那么初始质量为 M_{BH} 的黑洞在 t' 时刻的质量 $m(t')$ 之间的关系为^[45]

$$M_{BH} \approx (m^3 + 3\alpha t')^{1/3}, \quad (19)$$

其中 α 是与黑洞所能辐射粒子的自由度有关的常数, 具体请详见文献[45]. 在 t' 时刻, 质量处于区间 $(m, m+dm)$ 的原初黑洞的数密度则为

$$\tilde{n}_{BH}(m, t') dm = \left(\frac{a_i}{a(t')} \right)^3 \frac{m^2}{3\alpha t' + m^3} n_{BH} \left((m^3 + 3\alpha t')^{1/3} \right), \quad (20)$$

相应的能量密度即为 $\tilde{n}_{BH}(m, t') m dm$. 如果再对 m 积分, 就能得到原初黑洞在 t' 时刻的能量密度.

2.3 暴胀模型和原初黑洞

现在的宇宙学理论认为初始的密度扰动由暴胀模型造成. 通常, 暴胀模型给出原初共动曲率扰动功率谱 $\mathcal{P}_\kappa(k, t)$. 在共动规范下, $\delta(x, t)$ 的傅里叶变换 $\delta_k(t)$ 与 Bardeen 势 Ψ_k 有如下关系

$$\delta_k(t) = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \Psi_k. \quad (21)$$

而 Ψ_k 和 $\mathcal{R}_k$ 在大尺度上为常数, 并有如下关系^[47]

$$\Psi_k = -\frac{3(1+w)}{5+3w} \mathcal{R}_k. \quad (22)$$

因此, 一旦 $\mathcal{P}_\kappa(k, t)$ 给定, 我们就可以通过(21)和(22)式得到(11)式中的密度扰动功率谱, 进而计算出原初黑洞的丰度.

我们常用到如下关系^[46,47]

$$\delta_R = \frac{k_R^2}{a_i^2 H_i^2} \delta_R^H, \quad (23)$$

以及

$$\sigma_R^2 \approx \frac{k_R^4}{a_i^4 H_i^4} \sigma_R^H, \quad (24)$$

这里下标 i 表示变量在初始时刻 t 的取值. 因此, 我们有

$$\frac{\delta_R^2}{\sigma_R^2} \approx \frac{(\delta_R^H)^2}{(\sigma_R^H)^2}, \quad (25)$$

其中 $\sigma_R^H = \sigma_R(t_R)$. 上述等式将极大简化 $n(M_R, \sigma_R)$ 的计算. 将理论计算得到的原初黑洞丰度与观测数据拟合, 就可以最终得到原初黑洞的观测数据对暴胀模型的限制.

3 总结和讨论

形成原初黑洞的机制有多种, 本文中我们简要介绍了通过大幅度密度扰动塌缩机制形成的原初黑洞. 我们首先介绍了几个原初黑洞的基本概念(形成条件、质量、形成时间和寿命); 然后介绍了如何计算原初黑洞的丰度, 以及如何从暴胀模型所给出的原初曲率扰动功率谱得到原初黑洞的丰度.

本文中采用的是高斯扰动假设. 因为原初黑洞的形成要求很大的密度扰动, 所以非高斯的影响可能很大, 有关这方面的研究请参考文献[48,49]及其引用.

我们在2.3小节中介绍的仅仅是一种计算思路. 如果假设原初曲率扰动功率谱是标准的近标度不变谱, 那么不需要假设具体的暴胀模型, 就可以从原初功率谱指标得到原初黑洞的丰度^[41,50]. 另外, 在3.3小节中的介绍没有考虑 Ψ_k 随时间的演化, 有关 Ψ_k 随时间的演化对原初黑洞的影响请详见文献[46,47].

需要指出的是从2.2小节开始, 我们给出的所有公式都既适用于“Carr-Hawking”塌缩模型, 也适用于临界塌缩模型. 在很多情况下“Carr-Hawking”塌缩模型都

是很好的近似, 因此该模型的应用最为广泛. 但是在某些情况下, 临界塌缩模型能够给出更准确的结果.

参考文献

- 1 Zeldovich Y B, Novikov I D. The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model. *Sov Astron*, 1967, 10: 602–603
- 2 Hawking S H. Gravitationally collapsed objects of very low mass. *Mon Not Roy Astron Soc*, 1971, 152: 75–78
- 3 Carr B J, Hawking S W. Black holes in the early universe. *Mon Not Roy Astron Soc*, 1974, 168: 399–415
- 4 Hawking S H. Black holes from cosmic strings. *Phys Lett B*, 1987, 231: 237–239
- 5 Crawford M, Schramm D N. Spontaneous generation of density perturbations in the early universe. *Nature*, 1982, 298: 538–540
- 6 Hawking S H, Moss I G, Stewart J M. Bubble collisions in the very early universe. *Phys Rev D*, 1982, 26: 2681–2693
- 7 Bertone G, Hooper D, Silk J. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys Rept*, 2005, 405: 279–390
- 8 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 061102
- 9 Bird S, Cholis I, Munoz J B, et al. Did LIGO detect dark matter? *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 201301
- 10 Sasaki M, Suyama T, Tanaka T, et al. Primordial black hole scenario for the gravitational-wave event GW150914. *Phys Rev Lett*, 2016, 117: 061101
- 11 Blinnikov S, Dolgov A, Porayko N K. Solving puzzles of GW150914 by primordial black holes. *J Cosmol Astropart Phys*, 2016, 11: 036
- 12 Lyth D H, Liddle A D. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- 13 Carr B J, Gilbert J H, Lidsey J E. Black hole relics and inflation: Limits on blue perturbation spectra. *Phys Rev D*, 1994, 50: 4853–4867
- 14 Carr B J. Primordial black holes as a probe of cosmology and high energy physics. *Lect Notes Phys*, 2003, 631: 301–321
- 15 Carr B J. Primordial black holes-recent developments. *arXiv: astro-ph/0504034*
- 16 Carr B J. Primordial black holes: Do they exist and are they useful? *arXiv: astro-ph/0511743*
- 17 Khlopov M Y. Primordial black holes. *Res Astron Astrophys*, 2010, 10: 495–528
- 18 Carr B J, Kohri K, Sendouda Y, et al. New cosmological constraints on primordial black holes. *Phys Rev D*, 2010, 81: 104019
- 19 Green A M. Primordial black holes: Sirens of the early universe. *Fundam Theor Phys*, 2015, 178: 129
- 20 Kopp M, Hofmann S, Weller J. Separate universes do not constrain primordial black hole formation. *Phys Rev D*, 2011, 83: 124025
- 21 Musco I, Miller J C. Primordial black hole formation in the early universe: Critical behavior and self-similarity. *Class Quant Grav*, 2013, 30: 145009
- 22 Polnarev A G, Musco I. Curvature profiles as initial conditions for primordial black hole formation. *Class Quant Grav*, 2007, 24: 1405
- 23 Harada T, Yoo C M, Kohri K. Threshold of primordial black hole formation. *Phys Rev D*, 2013, 88: 084051
- 24 Bicknell G V, Henriksen R N. Self-similar growth of primordial black holes. II. General sound speed. *Astrophys J*, 1978, 219: 1043
- 25 Lin D N C, Carr B J, Fall S M. The growth of primordial black holes in a universe with stiff equation of state. *Mon Not R Astron Soc*, 1976, 177: 51
- 26 Choptuik M W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys Rev Lett*, 1993, 70: 9–12
- 27 Evans C R, Coleman J S. Critical phenomena and self-similarity in the gravitational collapse of radiation fluid. *Phys Rev Lett*, 1994, 72: 1782–1785
- 28 Choptuik M W, Chmaj T, Bizon P. Critical behavior in gravitational collapse of a Yang-Mills field. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 424–427
- 29 Abrahams A M, Evans C R. Critical behavior and scaling in vacuum axisymmetric gravitational collapse. *Phys Rev Lett*, 1993, 70: 2980–2983
- 30 Niemeyer J C, Jedamzik K. Near-critical gravitational collapse and the initial mass function of primordial black holes. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 5481–5484
- 31 Ade P A R, Aghanim N, Arnaud M, et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron Astrophys*, 2016, 594: A13
- 32 Inomata K, Kawasaki M, Mukaida K, et al. Inflationary primordial black holes as all dark matter. *Phys Rev D*, 2017, 96: 043504
- 33 Hawking S W. Black hole explosions? *Nature*, 1974, 248: 30–31
- 34 Page D N, Hawking S H. Gamma rays from primordial black holes. *Astrophys J*, 1976, 206: 1–7
- 35 Vainer B N, Naselskii P D. Observable consequences of the evaporation of low-mass primordial black holes. *Sov Astron Lett*, 1977, 3: 76–78

- 36 Zeldovich Y B, Starobinskii A A, Khlopov M Y, et al. Primordial black holes and the deuterium problem. *Sov Astron Lett*, 1977, 3: 110–112
- 37 MacGibbon J H. Can Planck-mass relics of evaporating black holes close the universe? *Nature*, 1987, 329: 308–309
- 38 Carr B J. The primordial black holes spectrum. *Astrophys J*, 1975, 201: 1–19
- 39 Press W H, Schechter P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *Astrophys J*, 1974, 187: 425–438
- 40 Kim H I, Lee C H. Constraints on the spectral index from primordial black holes. *Phys Rev D*, 1996, 54: 6001–6007
- 41 Bringmann T, Kiefer C, Polarski D. Primordial black holes from inflationary models with and without broken scale invariance. *Phys Rev D*, 2002, 65: 024008
- 42 Yokoyama J. Cosmological constraints on primordial black holes produced in the near critical gravitational collapse. *Phys Rev D*, 1998, 58: 107502
- 43 Padmanabhan T. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 44 Kim H I. Primordial black holes under the double inflationary power spectrum. *Phys Rev D*, 2000, 62: 063504
- 45 Bugaev E V, Konishchev K V. Constraints on diffuse neutrino background from primordial black holes. *Phys Rev D*, 2002, 65: 123005
- 46 Bugaev E, Klimai P. Constraints on amplitudes of curvature perturbations from primordial black holes. *Phys Rev D*, 2009, 79: 103511
- 47 Lyth D H, Malik K A, Sasaki M, et al. Forming sub-horizon black holes at the end of inflation. *J Cosmol Astropart Phys*, 2006, 0601: 011
- 48 Bullock J S, Primack J R. Non-gaussian fluctuations and primordial black holes from inflation. *Phys Rev D*, 1997, 55: 7423–7439
- 49 Ivanov P. Non-linear metric perturbations and production of primordial black holes. *Phys Rev D*, 1998, 57: 7145–7154
- 50 Green A M, Lindde A R. Constraints on the density perturbation spectrum from primordial black holes. *Phys Rev D*, 1997, 56: 6166–6174

Summary for “原初密度扰动与原初黑洞”

Primordial density perturbation and primordial black holes

Chengyi Sun

Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China

E-mail: ddscy@163.com

The black holes formed in the early universe are called primordial black holes. Primordial black holes provide a profound tool to detect the primordial cosmological structures and study nontrivial physics of the early Universe. By fitting the theoretical predictions about primordial black holes to the observational data, we can constrain the cosmological models. There exist several mechanisms about the formation of primordial black holes. In this review, we focus on the primordial black holes formed by the collapse of over-densed regions. This paper is organized as follows. The first section is the introduction. Then, in the second section, we introduce briefly several basic concepts on the primordial black holes formed by the collapse of the over-densed region, including the condition for an over-densed region to collapse into a primordial black hole, the mass, the formation time and the lifetime of a primordial black hole. About the primordial-black-hole mass, usually, in the over-densed-region-collapsing mechanism, the “Carr-Hawking” collapsing model is adopted to describe the formation. This collapsing model tells us that primordial black holes always form with the mass approximately equal to the mass contained by the Hubble horizon at the time when the over-densed regions enter the Hubble horizon. This is called the horizon-mass relation. But, recently, the numerical simulations show that the phenomenon of the critical collapse happens in the formation of primordial black holes. And primordial black holes with a range of masse are formed. The mass function of primordial black holes is given by a scaling relation. Here, both of the relations are introduced. Then, in the third section, based on the assumption that the primordial cosmological density perturbations obey the Gaussian distribution, we review the calculation of the mass spectrum of the primordial black holes. In this section, we, firstly, review the widely-used approximate expression of the initial mass spectrum of the primordial black holes. This approximate result is based on the horizon-mass relation that is implied by the “Carr-Hawking” collapsing model. Then by using the Press-Schechter method, we introduce the exact expression of the initial mass spectrum of the primordial black holes. This exact expression is based on the scaling relation that is implied by the critical collapse. Then by neglecting the effect of the Hawking radiation of primordial black holes, we express the present mass spectrum of the primordial black holes in terms of the initial mass spectrum of the primordial black holes. However, usually, the effect of the Hawking radiation of primordial black holes cannot be neglected. Then we also review how to calculate the mass spectrum of the primordial black holes by considering the effect of the Hawking radiation. Since the mainstream cosmologists believe that, up to now, inflation is the best mechanism to generate the primordial density perturbation, we assume that the initial over-densed regions also origin from inflation. Then in the subsection of the third section, we relate the primordial power spectrum generated by inflation to the initial mass spectrum of the primordial black holes. The fourth section is the summary and discussion.

primordial black holes, inflation, critical collapse, abundance of primordial black hole

doi: 10.1360/N972018-00314