

人口生育率双向极限

宋 健* 于景元

(北京信息和控制研究所, 北京 100037)

摘 要

本文给出了妇女总和生育率双向极限的精确估计, 证明了双向极限上、下界的基本定理, 提出了总和生育率上极限和下极限的表达形式. 按照这些估计式, 根据实际统计数据, 计算了包括我国在内的世界上 46 个国家的总和生育率双向极限估计. 在此基础上划分了人口发展的正增长、负增长和零增长三种类型. 这些结果不仅在理论上, 而且在实践中对掌握人口发展趋势和控制人口增长具有重要意义.

关键词: 妇女总和生育率双向极限, 上极限, 下极限, 正、负增长, 零增长

一、引 言

本世纪下半叶以来, 世界人口的迅速增长引起了全世界科学家和政治家的忧虑. 世界人口在本世纪初为 16 亿, 1987 年 7 月 11 日已超过 50 亿, 增长了二倍多. 据科学预测, 本世纪末世界人口将超过 62 亿, 到 2025 年将达 87 亿, 2050 年为 108 亿. 中国人口的发展情况, 也十分严峻. 中国人口在本世纪初为 4.2 亿, 1949 年为 5.4 亿, 1989 年 4 月 11 日已超过 11 亿, 40 年翻了一番多. 如果按目前生育水平继续下去, 到本世纪末, 我国人口将接近 13 亿, 2020 年可能达到 15 亿, 2050 年将越 17 亿, 而且将永无止境地增长下去. 科学界已经面临着一个终极的命题: 为了保证人类能享有高度的物质文明和精神文明, 地球最终能容纳多少人口. 中国 960 万平方公里的土地上, 最终以多少人口为宜. 这个命题, 目前还没有明确的科学结论, 但它必将成为 21 世纪人口学和宏观经济学最重要的研究课题之一.

科学界特别是人口学界已普遍承认, 人口发展过程是一个动力学运动过程, 可以较高的精度用偏微分方程或差分方程来描述^[1,2]. 这一描述模式已成为现代数量人口学的理论基础, 也是世界各研究机构进行经济分析的基础.

人口发展过程的连续模型是用带有边界控制的偏微分方程描述的:

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial a} = -\mu(a,t)p(a,t) + g(a,t),$$

1990 年 12 月 24 日收到修改稿.

* 北京信息和控制研究所兼职研究员.

$$p(a, t_0) = P_0(a),$$

$$p(0, t) = \beta(t) \int_{a_1}^{a_2} k(a, t) h(a, t) p(a, t) da, \quad \dots\dots(1)$$

其中 $p(a, t)$ 是人口密度函数, $\mu(a, t)$ 为人口死亡率函数, $k(a, t)$ 表示女性比例函数, $g(a, t)$ 是人口迁移函数. $\beta(t)$ 称作妇女总和生育率, 在统计学意义上, 它表示一个妇女一生所生育的子女数. $h(a, t)$ 为妇女生育模式, 满足如下规范化条件

$$\int_{a_1}^{a_2} h(a, t) da = 1,$$

$[a_1, a_2]$ 是妇女生育年龄区间.

人口发展过程的离散模型是用差分方程描述的双线性系统:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \beta(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1-\mu_1(t) & 0 & \dots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1-\mu_{m-1}(t) & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \\ \vdots \\ g_{m-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{a_1}(t) & \dots & b_{a_2}(t) & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$b_i(t) = (1-\mu_{00}(t))(1-\mu_0(t))k_i(t)h_i(t),$$

$$i = a_1, a_1+1, \dots, a_2.$$

$\mathbf{x}(t)$ 称作 t 年代人口年龄构成向量, $\mathbf{H}(t)$ 为人口状态转移矩阵, $\mathbf{g}(t)$ 为人口迁移向量, $\mathbf{B}(t)$ 为生育矩阵. 这里, $\mu_{00}(t)$ 为初生婴儿死亡率, $\mu_i(t)$ 为年龄别死亡率, $k_i(t)$ 为 i 岁女性比, $h_i(t)$ 为妇女生育模式, 满足如下规范化条件:

$$\sum_{i=a_1}^{a_2} h_i(t) = 1.$$

我们在 1980 年公布了一项研究成果, 证明了关于人口发展过程稳定性的基本定理^[4]. 这个定理指出, 对任何一个人口系统, 存在一个总和生育率双向极限, 在人口学中称作极限总和生育率, 记作 β_{cr} . 在文献 [3, 5] 中, 我们给出了这一极限定理的详细证明. 目前, 这个双向极限定理所揭示的人口系统规律, 已为各国学术界普遍采纳.

二、妇女总和生育率双向极限

妇女总和生育率双向极限 β_{cr} 由下式给出^[1-5]:

$$\beta_{cr} = \left[\int_{a_1}^{a_2} k(a)h(a)e^{-\int_0^a \mu(\xi)d\xi} \right]^{-1}. \quad (3)$$

如果按人口年度统计或人口普查数据, (3) 式可以写成如下离散形式:

$$\beta_{cr} = \left[\sum_{i=a_1}^{a_2} k_i h_i e^{-\mu_{00} - \sum_{\alpha=0}^i \mu_{\alpha}} \right]^{-1}. \quad (4)$$

根据 k_i, h_i, μ_i 三个参数在某年的实际统计数据即可按 (4) 式计算出 β_{cr} . 例如, 根据 1986 年统计数据计算, 我国妇女总和生育率双向极限为 2.117.

严格地说, $\mu(a)(\mu_i), k(a)(k_i), h(a)(h_i)$ 都是时间 t 的函数, 随社会经济和社会福利的发展都将有所变化. 但对一个稳定的社会, 它们的变化很慢, 作为一次近似, 可把它们只视作年龄 a (或 i) 的函数, 而与 t 无关.

总和生育率双向极限 β_{cr} 是人口控制论中的一个非常重要的参数, 这一点可从以下证明了的重要事实看出:

1. 如果实际的妇女总和生育率 β 总大于极限值 β_{cr} , 则人口总数将以指数规律无限制增长, 其自然增长率恒大于零.
2. 如果实际的妇女总和生育率 β 总小于极限值 β_{cr} , 则人口总数将以指数规律递减, 其自然增长率恒小于零.
3. 当实际的总和生育率保持并等于 β_{cr} , 即 $\beta = \beta_{cr}$, 则人口总数量终将稳定在一个常值上, 这个常值的大小与初始人口状态有关, 其自然增长率最终将趋于零.

我国和世界人口发展的实践, 都证明了上述理论的正确性. 以我国为例, 解放以来, 我国妇女总和生育率一直大于极限值 2.1, 即使计划生育工作比较有成效的 80 年代, 历年总和生育率仍然较高 (见表 1).

表 1 80 年代我国妇女总和生育率

年代	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
β	2.31	2.61	2.86	2.42	2.35	2.20	2.42	2.58	2.60

尽管这些年的总和生育率比 50—70 年代降低了许多, 但仍然在极限值以上, 人口总数仍然以每年平均 1500 万人口的速度增长着. 要想把中国人口从增长的趋势转变为下降趋势, 根据上述理论, 唯一的办法是把总和生育率降到 2.1 以下, 否则是不可能的. 这就是为什么我国人口仍然面临着严峻形势的原因所在. 对全世界人口来说, 1989 年已逾 52 亿, 而且还在继续增长. 要把世界人口由增长趋势转变为下降趋势, 同样也必须把世界妇女总和生育率降到极限值以下. 当然, 这个极限值需要根据全球统计数据计算. 对某些发达国家或人口稀少的国家, 如果需要增加人口, 必须把妇女总和生育率提高到极限值以上, 否则要增加人口也是不可能的.

以上讨论表明,总和生育率双向极限在人口控制问题中,无论理论上和实践中都是十分重要的宏观参数. 如果每年或间隔几年能计算出这个参数并把它和实际生育率进行比较,这对于掌握人口发展趋势和制定控制人口的政策都具有根本性意义.

根据(4)式或(3)式计算 β_{σ} , 需要三组统计参数 k_i, h_i, μ_i , 但它们并非每年都能从统计数据中得到,而且因地区不同,国家不同而各异. 特别是,生育模式参数 h_i 尚未普遍被纳入人口统计项目之中. 故需要研究在统计信息不全的情况下,对 β_{σ} 作出较精确估计,具有十分重要的实际意义.

三、总和生育率双向极限的上、下界

首先,在(3)式和(4)式中,令

$$I = \int_{a_1}^{a_2} k(a)h(a)e^{-\int_0^a \mu(\xi)d\xi} da, \\ \varphi(a) = e^{-\int_0^a \mu(\xi)d\xi}. \quad (5)$$

在离散形式下,相应地有

$$J = \sum_{i=a_1}^{a_2} k_i h_i e^{-\mu_{00} - \sum_{\alpha=0}^i \mu_{\alpha}}, \\ \psi(i) = e^{-\mu_{00} - \sum_{\alpha=0}^i \mu_{\alpha}}. \quad (6)$$

显然,函数 φ, ψ 都是年龄 a 或 i 的单调递减函数. 另外,统计表明,女性比例函数 $k(a)$ (或 k_i) 在生育年龄区间 $[a_1, a_2]$ 中,近似为常数. 当然,这个值的大小因地区和国家不同而不同. 根据最近几年统计数据,我国总人口中女性比例 $k=0.487$.

下面我们证明关于估计双向极限 β_{σ} 的上下界的基本定理.

定理. 设函数 $k(a)\varphi(a)$ 和 $k_i\psi(i)$ 在生育区间 $[a_1, a_2]$ 的左右端取极大和极小值,那么妇女总和生育率双向极限 β_{σ} , 对连续人口方程有以下估计式:

$$[k_1\varphi(a_1)]^{-1} \leq \beta_{\sigma} \leq [k_2\varphi(a_2)]^{-1}, \\ k_1 = k(a_1), k_2 = k(a_2). \quad (7)$$

对离散人口方程有:

$$[k_1\psi(a_1)]^{-1} \leq \beta_{\sigma} \leq [k_2\psi(a_2)]^{-1}. \quad (8)$$

证明:对(5)式中的 I , 应用积分第一中值定理有

$$I = \int_{a_1}^{a_2} k(a)h(a)\varphi(a)da = k(c)\varphi(c) \int_{a_1}^{a_2} h(a)da = k(c)\varphi(c), \\ a_1 \leq c \leq a_2.$$

其中利用了 $h(a)$ 满足的规范化条件. 由于 $\varphi(a)$ 的单调递减性,有

$$k_2 \varphi(a_2) \leq k(c) \varphi(c) \leq k_1 \varphi(a_1),$$

所以

$$k_2 \varphi(a_2) \leq I \leq k_1 \varphi(a_1).$$

由此推得

$$[k_1 \varphi(a_1)]^{-1} \leq \beta_{cr} \leq [k_2 \varphi(a_2)]^{-1}.$$

对离散人口方程, 显然有

$$k_2 \psi(a_2) \leq J \leq k_1 \psi(a_1),$$

所以

$$[k_1 \psi(a_1)]^{-1} \leq \beta_{cr} \leq [k_2 \psi(a_2)]^{-1}.$$

证毕.

在(7)式和(8)式中, 常数 k_1, k_2 是容易确定的. 在实际统计计算中, 可取 $k_1 = k_2 = k$, 而 $\varphi(a_1)(\psi(a_1))$ 和 $\varphi(a_2)(\psi(a_2))$ 可从人口统计生命表中的数据算出^[6-9]. 因此, 不等式(8)式或(7)式的两端计算是很容易的, 它不需要 k_i 和 h_i 在整个生育区间中的逐岁统计数据. 这就是不等式估计(8)式或(7)式的实际价值所在. 例如, 根据1986年统计数据计算, 令 $k_1 = k_2 = k = 0.487$, 我国总和生育率双向极限上下界估计为 $[k_1 \psi(a_1)]^{-1} = 2.074$, $[k_2 \psi(a_2)]^{-1} = 2.214$, 而 $\beta_{cr} = 2.117$.

理论分析和计算表明, 估计(8)式或(7)式的下界对 β_{cr} 逼近得很好, 精度很高, 而上界精度则稍差些.

现在我们定义

$$\beta_{cr}^+ = [k_2 \psi(a_2)]^{-1} = [k_2 e^{-\int_0^{a_2} \mu(\xi) d\xi}]^{-1}, \quad (9)$$

或

$$\beta_{cr}^+ = [k_2 \psi(a_2)]^{-1} = [k_2 e^{-\mu_{00} - \sum_{\alpha=0}^{a_2} \mu_{\alpha}}]^{-1}, \quad (10)$$

为妇女总和生育率上极限, 而

$$\beta_{cr}^- = [k_1 \psi(a_1)]^{-1} = [k_1 e^{-\int_0^{a_1} \mu(\xi) d\xi}]^{-1}, \quad (11)$$

或

$$\beta_{cr}^- = [k_1 \psi(a_1)]^{-1} = [k_1 e^{-\mu_{00} - \sum_{\alpha=0}^{a_1} \mu_{\alpha}}]^{-1}, \quad (12)$$

为妇女总和生育率下极限, 于是有

$$\beta_{cr}^- \leq \beta_{cr} \leq \beta_{cr}^+.$$

参数 β_{cr}^+ 和 β_{cr}^- 的计算都无需有 k_i 和 h_i 的精密统计. 但对人口控制来说, 却有直接意义: 对于人口数量一直处在增长的地区或国家, 为使人口转变为下降趋势, 近期目标应先把妇女总和生育率 β 降到 β_{cr}^- 以下, 人口叫数才会逐步转变为下降趋势; 对于人口呈下降趋势的地区或国家, 为使人口转变为上升, 近期目标应把妇女总和生育率提高到 β_{cr}^+ 以上, 人口才会逐步转变为上升趋势.

四、世界各国妇女总和生育率双向极限的估计

按上节(8)式或(7)式, 我们根据各国公布的人口状态统计生命表, 对全世界46个国家的

妇女总和生育率双向极限进行了估算. 再把它和这些国家的现实总和生育率进行比较, 可以看出全世界人口发展趋势中的一些主要特点.

1. 现实总和生育率低于总和生育率下极限, 即 $\beta \leq \beta_{cr}^-$ 的国家, 如美国、英国、法国、德国、日本、澳大利亚、新西兰、加拿大、瑞典、挪威、古巴、芬兰、丹麦、毛里求斯等国家(见表 2), 大部分是发达国家, 他们的人口总数发展趋势是下降的, 呈现负增长.

2. 现实总和生育率高于总和生育率上极限, 即 $\beta_{cr}^+ \leq \beta$ 的国家, 如中国、印度、巴基斯坦、孟加拉、埃及、科威特、智利、马拉维等国家(见表 3). 他们大部分是发展中国家和经济落后国家. 这些国家人口总数是增加的, 人口发展趋势呈现正增长.

表 2 $\beta \leq \beta_{cr}^-$ 的国家及其生育率双向极限估计

国 家	年 代	总和生育率 β	下极限 β_{cr}^-	上极限 β_{cr}^+	双向极限 β_{cr}
美 国	1984	1.757	2.041	2.123	2.061
加 拿 大	1985	1.610	2.051	2.114	2.056
古 巴	1982	1.710	2.065	2.148	2.084
英 国	1984	1.656	2.055	2.122	2.078
法 国	1982	1.905	2.062	2.148	2.069
瑞 典	1985	1.725	2.085	2.138	2.107
德 国	1984	1.297	2.078	2.146	2.107
丹 麦	1985	1.435	2.069	2.140	2.093
挪 威	1984	1.634	2.071	2.127	2.091
芬 兰	1985	1.630	2.064	2.137	2.091
日 本	1985	1.725	2.078	2.146	2.093
澳大利亚	1983	1.905	2.070	2.136	2.079
新西兰	1984	1.904	2.058	2.129	2.067
毛里求斯	1985	1.945	2.082	2.194	2.110

表 3 $\beta_{cr}^+ \leq \beta$ 的国家及其生育率双向极限估计

国 家	年 代	总和生育率 β	下极限 β_{cr}^-	上极限 β_{cr}^+	双向极限 β_{cr}
中 国	1986	2.420	2.074	2.214	2.117
斯里兰卡	1982	3.201	2.146	2.282	2.185
巴基斯坦	1976	6.905	2.647	2.896	2.761
孟加拉	1981	4.819	2.552	2.779	2.633
阿富汗	1979	7.363	2.957	3.874	3.325
菲律宾	1980	4.009	2.147	2.310	2.208
埃 及	1982	5.209	2.624	2.837	2.657
科威特	1980	5.396	2.478	2.622	2.613
智 利	1985	2.305	2.056	2.123	2.086
厄瓜多尔	1981	3.696	2.188	2.324	2.248
马拉维	1977	6.593	3.514	3.748	3.569

3. 现实总和生育率 β 介于 β_{cr}^- 和 β_{cr}^+ 之间, 即 $\beta_{cr}^- \leq \beta \leq \beta_{cr}^+$, 如罗马尼亚、南斯拉夫等国, 他们的人口发展趋势近于零增长. 罗马尼亚的现实总和生育率为 2.194(1984 年), 而 $\beta_{cr}^- = 2.118$, $\beta_{cr}^+ = 2.214$, $\beta_{cr} = 2.140$. 而南斯拉夫的现实总和生育率为 2.128(1982 年), $\beta_{cr}^- = 2.120$,

$\beta_{\sigma}^{+} = 2.204, \beta_{\sigma} = 2.151$ 等.

从以上分类中可以看出,属于人口正增长型的国家,是世界人口急骤增长的主要根源,因而也是应该加强人口控制工作的主要国家. 中国就属于这一类. 过去十年由于实行计划生育控制人口增长,使人口增长速度减慢了,这是我国人口制工作的成绩,但是,我国人口仍然在继续增加,再加上人口基数大,所以我国人口控制任务仍很艰巨. 从上述理论出发,我国人口政策应该是尽快地把妇女总和生育率降到极限值 2.1 以下,才能保证在下个世纪某个时候中国人口数量停止增长. 否则,要想不超过 15 亿或 17 亿甚至 20 亿都是不可能的.

表中的计算数据是刘建平同志完成的,在此表示感谢!

参 考 文 献

- [1] Song Jian & Yu Jing-yuan, *Population System Control*, Springer Verlag, 1988.
- [2] 宋 健、于景元,人口控制论,科学出版社, 1985.
- [3] Song Jian, *Theoretical Population Biology*, **22**(1982).
- [4] 宋 健、于景元, 科学通报, **23**(1980), 1061 — 1062.
- [5] Song Jian & Yu jing-yuan, *Mathematical Modelling*, **2**(1981), 109 — 121.
- [6] Coale, A. J., *The Growth and Structure of Human Population*, Princeton University Press, 1972.
- [7] Pollard, J. H., *Mathematical Models for the Growth of Human Population*. Cambrige University Press, 1973.
- [8] Keyfitz, N., *Applied Mathematical Demography*, John Wiley & Sons Inc., 1977.
- [9] Pielou, E., *Mathematical Ecology*, John Wiley & Sons Inc., 1977.