第六项系数的 Bieberbach 猜想的一个简化证明

龚　昇

（中国科学技术大学；中国科学院应用数学研究推广办公室）

摘　要

本文对第六项系数的 Bieberbach 猜想，给出了一个简化证明。

一、引　言

1916 年，Bieberbach 猜想：对于 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$，则 $|a_n| \leqslant n$，$n = 2, 3, \cdots$ 成立．等号当且仅当 f 为 Koebe 函数 $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ 及其旋转时成立．当 $n = 2$ 时，Bieberbach 用面积原理证明．当 $n = 3$ 时，1923 年由 Löwner 建立了重要的参数表示法得到证明，过了卅多年，直到 1955 年，才由 Garabedian 和 Schiffer[1] 利用变分法和参数法相结合对 $n = 4$ 的情形给了证明．这个证明冗长、复杂．1960 年，Charzynski 和 Schiffer[2] 利用 Grunsky 不等式给了一个十分简洁的证明．这个简化的证明十分重要，为证明以后的几个系数的 Bieberbach 猜想提供了可能．沿着这个途径，1968 年 Pederson[3] 证明了 $n=6$ 时的 Bieberbach 猜想．同时，Ozawa[4] 也独立地证明了这个事实．1972 年，Pederson 和 Schiffer[5] 证明了 $n = 5$ 时的 Bieberbach 猜想．所有这些证明都很复杂，计算量很大．当 $n \geqslant 7$ 时，Bieberbach 猜想至今未能证明．

本文的目的在于给出一个 $n = 6$ 时 Bieberbach 猜想的简化证明．在证明过程中，只假设 $|a_2| \leqslant 2$，$|a_3| \leqslant 3$，$|a_4| \leqslant 4$ 已经证明．这个简化证明将为研究 $n \geqslant 7$ 的情形提供方便．在以后的文章中，将首先讨论 $n = 8$ 的情形．

二、$|a_2|$ 充分小的情形

引理 1. 若 s 为正整数，则

$$(|a_{n+s}|^2 - |a_n|^2)^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{s} k|a_k|^2 + 2s\sum_{k=s+1}^{n-1}|a_k|^2 + 2\sum_{k=n}^{n+s-1}(n-k+s)|a_k|^2$$
$$+ \sum_{k=2n}^{2n+s-1}(k-2n)|a_k|^2 + \sum_{k=2n+s}^{2n+2s-1}(2n+2s-k)|a_k|^2. \tag{2.1}$$

当 $s = 1$ 时，即为文献 [6] 中的引理 5.1．证明方法也与此相仿，从略．

由 Fekete-Szegö[7] 引理，及利用 Fitz Gerald 不等式[8]可得，当 $|a_2| \leqslant a_2^{(0)} = 1.5902223$ 时，

本文 1978 年 9 月 16 日收到．

$|a_3| \leqslant 2.527201$. 由 Ильна-Коломойцева[9] 的结果(即为文献 [10] 中引理 8) 可得,当 $|a_2| \leqslant a_2^{(0)}$ 时, $|a_4| \leqslant 3.4143013$.

在引理 1 中取 $n=4$, $s=1$, 由 (2.1) 式得

$$(|a_5|^2-|a_4|^2)^2 \leqslant 2(1+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2)+|a_9|^2,$$

所以当 $|a_2| \leqslant a_2^{(0)}$ 时, 用 $|a_3| \leqslant 2.527201$ 及 $|a_4| \leqslant 3.4143013$ 以及 $|a_9| < 1.0691 \times 9$[11] 代入上式,得到

$$|a_5|^2 \leqslant |a_4|^2+11.650191 \leqslant 23.307644.$$

于是得到,当 $|a_2| \leqslant a_2^{(0)}$ 时, $|a_5| \leqslant 4.827799$.

在引理 1 中,取 $n=4$, $s=2$, 由 (2.1) 式得

$$(|a_6|^2-|a_4|^2)^2 \leqslant 2+4(|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2)+2|a_5|^2+|a_9|^2+2|a_{10}|^2+|a_{11}|^2.$$

当 $|a_2| \leqslant a_2^{(0)}$ 时,用上述估计及 $|a_n| < 1.0691n$ $(n=9, 10, 11)$ 代入上式,就得到

$$|a_6|^2 \leqslant |a_4|^2+24.297801,$$

即当 $|a_2| \leqslant a_2^{(0)}$ 时, $|a_6| < 5.99627$. 所以在今后的讨论中, 只要讨论 $|a_2| > 1.5902223$ 时的情形就可以了.

三、一个基本不等式

引理 2. (配方公式). 若实对称半定正方阵 $B=B^{(n)}$ 可写成 $\begin{pmatrix} b_1 & v \\ v' & B_1 \end{pmatrix}$, 这里 $b_1=b_1^{(s)}$ 为 $s \times s$ 实对称定正方阵, $v=v^{s\times(n-s)}$ 为 $s\times(n-s)$ 矩阵, $B_1=B_1^{(n-s)}$ 为 $(n-s)\times(n-s)$ 实对称半定正方阵,则 $B_1-v'b_1^{-1}v$ 也是对称半定正方阵.

证. 由于

$$\begin{pmatrix} I^{(s)} & 0 \\ -v'b_1^{-1} & I^{(n-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & v \\ v' & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(s)} & -b_1^{-1}v \\ 0 & I^{(n-s)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & B_1-v'b_1^{-1}v \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

所以 $B_1-v'b_1^{-1}v$ 也是半定正方阵.

若 $\zeta=\frac{1}{z}$, $F(\zeta)=\left(f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right)^{-1}$, $F_2(\zeta)=\sqrt{F(\zeta^2)}$, $|\zeta_\mu|>1$, $|\zeta_\nu|>1$,

$$\log\frac{F_2(\zeta_\mu)-F_2(\zeta_\nu)}{\zeta_\mu-\zeta_\nu}=\sum_{m,l=1}^{\infty} d_{ml}\zeta_\mu^{-m}\zeta_\nu^{-l}.$$

记 $\sqrt{kl}\, d_{kl}=C_{kl}$, $\mathrm{Re}C_{kl}=p_{kl}$, 由 Grunsky 不等式得到

$$\begin{pmatrix} p_{1,1}, & p_{1,3}, & \cdots\cdots, & p_{1,2n+1} \\ p_{1,3}, & p_{3,3}, & \cdots\cdots, & p_{3,2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1,2n+1}, & p_{3,2n+1}, & \cdots, & p_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix} \leqslant I,$$

即

$$\begin{pmatrix} 1-p_{1,1}, & -p_{1,3}, & \cdots\cdots, & -p_{1,2n+1} \\ -p_{1,3}, & 1-p_{3,3}, & \cdots\cdots, & -p_{3,2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{1,2n+1}, & -p_{3,2n+1}, & \cdots, & 1-p_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.1}$$

应用引理 2，即得

$$\begin{pmatrix} p_{3,3} & p_{3,5} \\ p_{3,5} & p_{5,5} \end{pmatrix} \leqslant I - \frac{1}{1-p_{1,1}} \begin{pmatrix} p_{1,3} \\ p_{1,5} \end{pmatrix} (p_{1,3} p_{1,5}).$$

于是对任意 β，有

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \begin{pmatrix} p_{3,3} & p_{3,5} \\ p_{3,5} & p_{5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} \leqslant \frac{\beta^2}{6} + \frac{2}{5} - \frac{1}{1-p_{11}} \left(\frac{\beta}{\sqrt{6}} p_{1,3} + \sqrt{\frac{2}{5}} p_{1,5}\right)^2.$$

此即

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\beta^2}{2} d_{33} + 2\beta d_{35} + 2d_{55}\right) \leqslant \frac{\beta^2}{6} + \frac{2}{5} - \frac{1}{1-\operatorname{Re} d_{11}} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} d_{13} + \sqrt{2} \operatorname{Re} d_{15}\right)^2, \tag{3.2}$$

但是(例如参阅文献 [12])

$$d_{33} = d_{15} - d_{11} d_{13} + \frac{1}{3} d_{11}^3, \tag{3.3}$$

$$d_{35} = d_{17} - d_{15} d_{11} + d_{11}^2 d_{13} - d_{13}^2, \tag{3.4}$$

$$d_{55} = \frac{1}{2} a_6 - 4d_{17} d_{11} - 5d_{15} d_{11}^2 - 11 d_{11}^3 d_{13} - 3d_{11} d_{13}^2 - 6d_{13} d_{15} - \frac{14}{5} d_{11}^5. \tag{3.5}$$

将 (3.3)—(3.5) 式代入 (3.2) 式，(3.2) 式的左边成为：

$$\begin{aligned} a_6 &+ (2\beta - 8d_{11}) d_{17} + \left(\frac{\beta^2}{2} - 2\beta d_{11} - 10 d_{11}^2\right) d_{15} - 12 d_{13} d_{15} \\ &+ \left(\frac{-\beta^2}{2} d_{11} + 2\beta d_{11}^2 - 22 d_{11}^3\right) d_{13} + (-2\beta - 6d_{11}) d_{13}^2 \\ &+ \left(\frac{\beta^2}{6} - \frac{28}{5} d_{11}^2\right) d_{11}^3 \end{aligned}$$

之实部．于是 (3.2) 式成为：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_6 \leqslant{} & \frac{2}{5} + \frac{\beta^2}{6} - \frac{(\beta p'_{1,3} + 2p'_{1,5})^2}{2(1-p'_{1,1})} - 2\beta p'_{1,7} + 8\operatorname{Re}(d_{11} d_{17}) - \frac{\beta^2}{2} p'_{15} \\ & + 2\beta \operatorname{Re}(d_{11} d_{15}) + 10 \operatorname{Re}(d_{11}^2 d_{15}) + 12 \operatorname{Re}(d_{13} d_{15}) \\ & + \frac{\beta^2}{2} \operatorname{Re}(d_{11} d_{13}) - 2\beta \operatorname{Re}(d_{11}^2 d_{13}) + 22 \operatorname{Re}(d_{11}^3 d_{13}) + 2\beta \operatorname{Re}(d_{13}^2) \\ & + 6 \operatorname{Re}(d_{11} d_{13}^2) - \frac{\beta^2}{6} \operatorname{Re}(d_{11}^3) + \frac{28}{5} \operatorname{Re}(d_{11}^5) \end{aligned} \tag{3.6}$$

这里 $p'_{1,j} = \operatorname{Re} d_{1j}$．如果记

$$d_{11} = p + ix',\ d_{13} = y + iy',\ d_{15} = \eta + i\eta',\ d_{17} = \xi + i\xi'. \tag{3.7}$$

于是有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_6 \leqslant{} & \frac{2}{5} + \frac{\beta^2}{6} - \frac{(\beta y + 2\eta)^2}{2(1-p)} - 2\beta\xi + 8p\xi - 8x'\xi' - \frac{\beta^2}{2}\eta + 2\beta p\eta \\ & - 2\beta x'\eta' + 10(p^2 - x'^2)\eta - 20x'p\eta' + 12y\eta - 12y'\eta' + \frac{\beta^2}{2} py \\ & - \frac{\beta^2}{2} x'y' - 2\beta(p^2 - x'^2) y + 4\beta x'y'p + 22y(p^3 - 3px'^2) \end{aligned}$$

$$- 22y'(3x'p^2 - x'^3) + 2\beta(y^2 - y'^2) + 6p(y^2 - y'^2)$$
$$- 12x'y'y - \frac{\beta^2}{6}(p^3 - 3px'^2) + \frac{28}{5}(p^5 - 10p^3x'^2 + 5px'^4). \tag{3.8}$$

在 (3.8) 式中,取 $\beta = 4p$, 于是得到本文用来证明 $\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant 6$ 的基本不等式:

$$\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant \frac{2}{5} + \frac{8p^2}{3} + \frac{44p^5}{15} - \frac{2(2py + \eta)^2}{1 - p} - X + 10(p^2 - x'^2)\eta + 12y\eta$$
$$+ (22p^3 - 58px'^2 - 12x'y')y + 14py^2, \tag{3.9}$$

这里

$$X = (x', y', \eta', \xi')\begin{pmatrix} 48p^3 - 28px'^2, & 29p^2 - 11x'^2, & 14p, & 4 \\ 29p^2 - 11x'^2, & 14p, & 6, & 0 \\ 14p, & 6, & 0, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \eta' \\ \xi' \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

(3.9) 式包含了 Ozawa[5] 中用来证明 $\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant 6$ 而建立起来的二个基本不等式，即文献[5]中 § 1 的不等式 (A) 及 (B),而且比这二个不等式都来得强.

还可以用引理 2 及 Grunsky 不等式建立起比 (3.9) 式更好的不等式,

$$\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant \frac{2}{5} - \frac{2y^2}{1-p} - \frac{6\left(\xi - p\eta + x'\eta' + p^2y - x'^2y - 2px'y' - y^2 + y'^2 + \dfrac{y\eta}{1-p}\right)^2}{1 - 3\left(\eta - py + x'y' - px'^2 + \dfrac{1}{3}p^3 + \dfrac{y^2}{1-p}\right)}$$
$$+ 8(p\xi - x'\xi') + 10(\eta(p^2 - x'^2) - 2px'\eta') + 22[y(p^3 - 3px'^2)$$
$$- y'(3p^2x' - x'^3)] + 6[p(y^2 - y'^2) - 2x'y'y] + 12(y\eta - y'\eta')$$
$$+ \frac{28}{5}(p^5 - 10p^3x'^2 + 5px'^4). \tag{3.11}$$

由于

$$2\sqrt{6}\left(\mathrm{Re}\, d_{35} + \frac{y\eta}{1-p}\right)\frac{A}{\sqrt{6}} - \frac{6\left(\mathrm{Re}\, d_{35} + \dfrac{y\eta}{1-p}\right)^2}{1 - 3\left(\mathrm{Re}\, d_{33} + \dfrac{y^2}{1-p}\right)}$$
$$\leqslant \frac{A^2}{6}\left(1 - 3\left(\mathrm{Re}\, d_{33} + \frac{y^2}{1-p}\right)\right)$$

成立,所以 (3.11) 式可以导出

$$\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant \frac{2}{5} + \frac{28p^5}{5} + \frac{A^2(1-p^3)}{6} + (8p - 2A)\xi + \left(10p^2 - 10x'^2 + 2pA\right.$$
$$\left.- \frac{1}{2}A^2\right)\eta + \left(22p^3 - 66px'^2 - 12x'y' - 2p^2A + 2x'^2A + \frac{A^2p}{2}\right)y$$
$$- \frac{2}{1-p}\eta^2 + \left(6p + 2A - \frac{A^2}{2(1-p)}\right)y^2 + \left(12 - \frac{2A}{1-p}\right)y\eta$$
$$+ \left(28px'^2 - 56p^3 + \frac{A^2}{2}p\right)x'^2 + (-6p - 2A)y'^2 - 12y'\eta'$$

$$+(-20p-2A)x'\eta'-8x'\xi'+\left(-66p^2+22x'^2+4pA-\frac{A^2}{2}\right)x'y'. \quad (3.12)$$

在 (3.12) 式中取 $A=4p$，就得到 (3.9) 式．所以 (3.11) 式确实比 (3.9) 式来得好！本文中只要用 (3.9) 式已经足够，不必用比 (3.9) 式更强的 (3.11) 式．

还要顺便提一下的是：关于 Charzynski 和 Schiffer 的 $|a_4|\leqslant 4$ 的证明[3]．这是可以从 (3.1) 式中取 $n=1$，用引理 2，即得

$$p_{33}\leqslant 1-\frac{p_{13}^2}{1-p_{11}},$$

这就是

$$\mathrm{Re}\left(\frac{3}{2}a_4-3a_2a_3+\frac{13}{8}a_2^3\right)\leqslant 1-\frac{\frac{3}{4}\left(\mathrm{Re}\left(a_3-\frac{a_2^2}{4}\right)\right)^2}{1-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,a_2}.$$

记 $\lambda=a_3-\frac{3}{4}a_2^2$，则上式即为：

$$\mathrm{Re}\,a_4\leqslant\frac{2}{3}+\mathrm{Re}\,(2a_2\lambda)+\frac{5}{12}\mathrm{Re}\,a_2^3-\frac{(\mathrm{Re}\,\lambda)^2}{2-\mathrm{Re}\,a_2}. \quad (3.13)$$

(3.13) 式就是文献 [3] 中 §2 的 (5) 式，这是用来证明 $\mathrm{Re}\,a_4\leqslant 4$ 最关键的不等式．所以用本文中的方法，得出 (3.13) 式这个不等式是最直接的．而证明 $\mathrm{Re}\,a_6\leqslant 6$ 在本文中所用的不等式 (3.9) 是与证明 $\mathrm{Re}\,a_4\leqslant 4$ 的 (3.13) 式这个不等式相当的．它们都是由 Grunsky 不等式及引理 2 直接导出来的．在以后讨论 a_8 的情形也应用其相应的不等式．

要证明 $|a_6|\leqslant 6$，等号当且仅当 f 为 Koebe 函数及其旋转时成立，只要证明：当 $|\arg a_2|\leqslant\frac{\pi}{5}$ 时，$\mathrm{Re}\,a_6\leqslant 6$，等号当且仅当 f 为 Koebe 函数时成立即可．记 $k=|\mathrm{Im}\,a_2/\mathrm{Re}\,a_2|$，于是只要讨论 $k\leqslant k_0=\tan\frac{\pi}{5}=(5-2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}=0.7265425$，即

$$k^2\leqslant k_0^2=5-2\sqrt{5}=0.5278640$$

即可，当

$$\mathrm{Re}\,a_2=2p\leqslant 1.2865174$$

时，$|a_2|^2\leqslant(\mathrm{Re}\,a_2)^2(1-2\sqrt{5}+5)\leqslant 2.5288069$，即 $|a_2|\leqslant 1.5902223$．但在第一节中已经证明，此时 $|a_6|<6$ 是成立的，也就是当 $p\leqslant p_0=0.6432587$ 时，$|a_6|<6$ 已经证明．所以只要讨论 $p>p_0$ 时即可．

四、当 $k^2>\frac{1}{19}$, $y\geqslant 0$ 的情形

对任意 $\alpha,\beta\geqslant 0$

$$\alpha(p^2-1)\leqslant-\alpha x'^2-3\alpha y'^2-3\alpha y^2-5\alpha\eta'^2-5\alpha\eta^2-7\alpha\xi'^2-7\alpha\xi^2, \quad (4.1)$$

$$-12x'y'y\leqslant 6\left(\beta x'^2y^2+\frac{y'^2}{\beta}\right) \quad (4.2)$$

成立，而

$$-\frac{2p(2py+\eta)^2}{1-p}+2(2py+\eta)\times 5(p^2-x'^2)\leqslant\frac{25}{2p}(p^2-x'^2)^2(1-p) \tag{4.3}$$

显然成立．将(4.1)—(4.3)式代入(3.9)式，就得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a_6\leqslant 6-X'-Y'+(2p^3-28px'^2)y-\frac{(40-15\alpha)(1-p^2)+44(1-p^5)}{15}\\+\frac{25}{2p}(1-p)(p^2-x'^2)^2,\end{aligned} \tag{4.4}$$

这里

$$X'=(x',y',\eta',\xi')\begin{pmatrix}48p^3-28px'^2+\alpha, & 29p^2-11x'^2, & 14p, & 4\\ 29p^2-11x'^2, & 14p+3\alpha-\frac{6}{\beta}, & 6, & 0\\ 14p, & 6, & 5\alpha, & 0\\ 4, & 0, & 0, & 7\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ \eta'\\ \xi'\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$Y'=(y,\eta)\begin{pmatrix}3\alpha-14p-\beta x'^2+8p^2, & -6+4p\\ -6+4p, & 5\alpha+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ \eta\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

取 $\alpha=4,\beta=3$，则 $X'\geqslant 0$，$Y'\geqslant 0$，所以

$$\operatorname{Re} a_6\leqslant 6+2p^3(1-19k^2)y-\frac{44(1-p^5)-20(1-p^2)}{15}+\frac{25}{2}p^3(1-p)(1-k^2)^2,$$

而当 $p>p_0$，$k^2>\frac{1}{19}$ 时，$1-\frac{1}{k^2}<\frac{18}{19}$，

$$-\frac{24+24p+44p^2+44p^3+44p^4}{15}+\frac{25}{2}p^3\left(\frac{18}{19}\right)^2<0.$$

因此，当 $k^2>\frac{1}{19}$，$y>0$ 时，$\operatorname{Re} a_6<6$ 成立．

五、当 $y\leqslant 0$ 的情形

令 $x=1-p$，对于任意的 T 可以有

$$\frac{-2(2py+\eta)^2}{1-p}=-\frac{2(2py+\eta-xT)^2}{1-p}-4T(2py+\eta)+2xT^2.$$

所以(3.9)式还可以写成

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a_5\leqslant\frac{2}{5}+\frac{8p^2}{3}+\frac{44}{15}p^5-\frac{2(2py+\eta-xT)^2}{1-p}+2xT^2\\+[10(p^2-x'^2)-4T]\eta+12y\eta+14py^2\\+(22p^3-58px'^2-12x'y'-8Tp)y-X.\end{aligned} \tag{5.1}$$

这里 X 由(3.10)式所定义．对任意 A，有

$$\frac{-2}{1-p}(2py+\eta-xT)^2+2(2py+\eta-xT)A\leqslant\frac{A^2}{2}(1-p),$$

所以(5.1)式导出

$$\operatorname{Re} a_6\leqslant\frac{2}{5}+\frac{8p^2}{3}+\frac{44}{15}p^5+[10(p^2-x'^2)-4T]\eta+12y\eta+14py^2$$

$$+(22p^3-58px'^2-12x'y'-8Tp)y-2(2py+\eta$$
$$-xT)A+\frac{A^2}{2}x+2xT^2-X.$$

取 $T=3y+Q$，则上式成为：

$$\operatorname{Re}a_6\leqslant\frac{2}{5}+\frac{8p^2}{3}+\frac{44}{15}p^5+[10(p^2-x'^2)-4Q-2A]\eta$$
$$+(18x-10p)y^2+(22p^3-58px'^2-12x'y'-8Qp$$
$$-4pA+6xA+12xQ)y+2xQA+\frac{A^2}{2}x+2xQ^2-X.\tag{5.2}$$

取 $A=-5x'^2$，$Q=5p^2/2$，则 (5.2) 式成为：

$$\operatorname{Re}a_6\leqslant\frac{2}{5}+\frac{8}{3}p^2+\frac{44}{15}p^5+\frac{25}{2}p^4x+2(9-14p)y^2-30xx'^2y$$
$$+(-38px'^2+2p^3+30p^2x-12x'y')y-25xp^2x'^2+\frac{25}{2}x'^4x-X.$$

而 $-12x'y'\geqslant-\sqrt{12}(x'^2+3y'^2)\geqslant-2\sqrt{3}(1-p^2)$，所以上式的右边中 y 的系数不小于

$$-38px'^2+2p^3+30p^2x-30xx'^2-2\sqrt{3}(1-p^2)=2p\left(p^2-\frac{x'^2}{k_0^2}\right)$$
$$+\left(\frac{2}{k_0^2}-38\right)px'^2+30x(p^2-x'^2)-2\sqrt{3}(1-p^2).$$

由于 $p^2-\frac{x'^2}{k_0^2}=p^2\left(1-\frac{k^2}{k_0^2}\right)\geqslant0$，所以 y 的系数不小于

$$\left(\frac{2}{k_0^2}-38\right)px'^2+30xp^2(1-k^2)-2\sqrt{3}(1-p^2)=\left(\frac{2}{k_0^2}-38\right)px'^2$$
$$+2\sqrt{3}x(5\sqrt{3}l^2p^2-p-1).$$

此处 $l^2=1-k^2\geqslant1-k_0^2=l_0^2$。所以 y 的系数不小于

$$\left(\frac{2}{k_0^2}-38\right)px'^2+2\sqrt{3}x(5\sqrt{3}l_0^2p^2-p-1).$$

而当 $p\geqslant\frac{1+(1+20\sqrt{3}l_0^2)^{\frac{1}{2}}}{10\sqrt{3}l_0^2}\doteq0.6317192\cdots$时，$5\sqrt{3}l_0^2p^2-p-1\geqslant0$。因此，当 $p\geqslant0.6317193$，$y\leqslant0$ 时，

$$\operatorname{Re}a_6\leqslant\frac{2}{5}+\frac{8}{3}p^2+\frac{44}{15}p^5+\frac{25}{2}p^4x+\left(\frac{2}{k_0^2}-38\right)px'^2y+2(9-14p)y^2$$
$$-25p^2x'^2x+\frac{25}{2}x'^4x-X\leqslant\frac{2}{5}+\frac{8}{3}p^2+\frac{44}{15}p^5+\frac{25}{2}p^4x$$
$$+(17.105576\beta p+18-28p)y^2+\frac{17.105576}{\beta}px'^4$$
$$-25p^2x'^2x+\frac{25}{2}xx'^4-X.$$

这里 β 为待定的一个正的常数。由 (4.1) 式就得

$$\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant \frac{2}{5} + \frac{8}{3} p^4 + \frac{44}{15} p^5 + \frac{25}{2} p^4 x + \alpha(1 - p^2) + (17.105576\beta p$$
$$+ 18 - 28p - 3\alpha) y^2 + \frac{17.105576}{\beta} p x'^4 - 25 p^2 x'^2 x + \frac{25}{2} x x'^4 - X', \tag{5.3}$$

此处 X' 由 (4.5) 式所定义.

取 $\alpha = \frac{15}{4}$, $\beta = \left(28p - \frac{27}{4}\right) \Big/ 17.105576p$, 则 (5.3) 式中 y^2 的系数为零,于是

$$\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant \frac{2}{5} + \frac{15}{4} + \left(\frac{8}{3} - \frac{15}{4}\right) p^2 + \frac{25}{2} p^4 + \left(\frac{44}{15} - \frac{25}{2}\right) p^5 + \frac{25}{2} x'^4$$
$$+ \left(\frac{17.105526}{\beta} - \frac{25}{2}\right) p x'^4 - 25 p^2 x'^2 + 25 p^3 x'^2 - X'.$$

而当 $p \geqslant 0.6317193$ 时,方阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{48p^2 - 28px'^2 + \frac{15}{4} - \frac{25}{2} xx'^2 + 25xp^2 - (17.105526p)^2}{\left(28p - \frac{27}{4}\right)}, & 29p^2 - 11x'^2, & 14p, & 4 \\ 29p^2 - 11x'^2, & 14p + \dfrac{45}{4}, & 6, & 0 \\ 14p, & 6, & \dfrac{75}{4}, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & \dfrac{105}{4} \end{pmatrix}$$

是定正的. 而 $\frac{2}{5} + \frac{15}{4} + \left(\frac{8}{3} - \frac{15}{4}\right) p^2 + \frac{25}{2} p^4 + \left(\frac{44}{15} - \frac{25}{2}\right) p^5$ 当 $p \geqslant 0.6317193$ 时是不大于6的. 所以当 $y \leqslant 0$, $p > 0.6317193$ 时; $\mathrm{Re}\, a_6 \leqslant 6$ 成立. 而当 $p \leqslant 0.6317193$ 时, $\mathrm{Re}\, a_6 < 6$ 早已在第二节中证明.

六、当 $k^2 \leqslant \frac{1}{19}$, $y \geqslant 0$ 的情形

引理 3 (Голузин 不等式).

$$p^2(\eta + 4py) \leqslant \frac{1}{6}(1 - p^6) + \frac{25}{8} p^2 (1 - p^2) - \frac{5}{2} p^2 (1 - p^2) y - \frac{1}{2} y^2$$
$$- \frac{1}{2} \left(y' + \frac{5}{2} p x'\right)^2 - \frac{3}{2} \left\{\eta' + \frac{3}{2} p y' + \frac{1}{3}(3p^2 - x'^2) x' - x' y\right\}^2$$
$$- p^2 x' y' + p^4 x'^2 - \frac{5}{2} \left\{\xi' + \frac{3}{2} p \eta'\right.$$
$$\left. + (p^2 - x'^2) y' - 2(y' - px') y - x' \eta\right\}^2. \tag{6.1}$$

证明见文献[5].

由于

$$-\frac{2p^2(2py + \eta)^2}{1 - p} \leqslant -2\sqrt{2}(2py + \eta) A + \frac{(1 - p) A^2}{p^2}$$

及 (4.1), (4.2) 式, 取 $B \geqslant 0$, 则由 (3.9) 式可以导出

$$\operatorname{Re} a_6 \leqslant 6 - \frac{(40-15\alpha)(1-p^2)+44(1-p^5)}{15} - X' + \frac{(1-p)A^2}{p^2} + B(y+4p\eta)$$
$$-(y,\eta)\begin{pmatrix} 3\alpha - 14p - \beta x'^2 + 8p^2 + 8p^3, & -6+4p+4p^2 \\ -6+4p+4p^4, & 5\alpha+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$+(22p^3 - 38px'^2 - 4\sqrt{2}pA - 4pB)y + (10p^2 - 10x'^2 - 2\sqrt{2}A - B)\eta. \quad (6.2)$$

取 $A = \frac{9(p^2+x'^2)}{2\sqrt{2}}$, $B = p^2 - 19x'^2$ $\left(由于 k^2 \leqslant \frac{1}{19}, 所以 B \geqslant 0\right)$, 则 (6.2) 式中后二项为零. 将 (6.1) 式代入 (6.2) 式得到

$$\operatorname{Re} a_6 \leqslant 6 - \frac{(40-15\alpha)(1-p^2)+44(1-p^5)}{15}$$
$$-(y,\eta)\begin{pmatrix} 3d - 14p - \beta x'^2 + 8p^2 + 8p^3, & -6+4p+4p^2 \\ -6+4p+4p^2, & 5\alpha+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$- X' + \frac{81(1-p)(p^2+x'^2)^2}{8p^2} + \frac{p^2-19x'^2}{p^3}\left\{\frac{1}{6}(1-p^6)\right.$$
$$+\frac{25}{8}p^2(1-p^2) - \frac{5}{2}p^2(1-p^2)y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\left(y' + \frac{5}{2}px'\right)^2$$
$$-\frac{3}{2}\left\{\eta' + \frac{3}{2}py' + \frac{1}{3}(3p^2 - x'^2)x' - x'y\right\}^2 - p^3x'y' + p^4x'^2$$
$$-\frac{5}{2}\left\{\xi' + \frac{3}{2}p\eta' + (p^2 - x'^2)y' - 2(y' - px')y - x'\eta\right\}^2.$$

取 $\alpha = \frac{21}{16}$, 则

$$-\frac{(40-15\alpha)(1-p^2)+44(1-p^5)}{15} + \frac{81(1-p)(p^2+x'^2)^2}{8p^2}$$
$$+\frac{p^2-19x'^2}{p^3}\left(\frac{1}{6}(1-p^6) + \frac{25}{8}p^2(1-p^2)\right)$$
$$= -(1-p)\left(\frac{-20+494.5p+119.5p^2-1258p^3+332p^4+332p^5}{120p}\right.$$
$$\left.+x'^2\frac{76+76p+1501p^2+1015p^3+76p^4+76p^5-243px'^2}{24p^3}\right).$$

但是

$$-20+494.5p+119.5p^2-1258p^3+332p^4+332p^5$$
$$=(1-p)(-20+474.5p+594p^2-664p^3-332p^4),$$

当 $p \geqslant p_1 = 0.7749788$ 时是大于零的. 因此, 当 $p \geqslant p_1$ 时,

$$\operatorname{Re} a_6 \leqslant 6 - (1-p)x'^2\mathscr{F}(p) - (x', y', \eta', \xi')D_1(x', y', \eta', \xi')'$$
$$-(y,\eta)D_2(y,\eta)' + (p^2 - 19x'^2)J/p^3, \quad (6.3)$$

其中

$$\mathscr{F}(p) = \frac{76+76p+1501p^2+1015p^3+76p^4+76p^5-243px'^2}{24p^3}, \quad (6.4)$$

$$J=-\frac{5}{2}p^2(1-p^2)y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}\left(y'+\frac{5}{2}px'\right)^2-\frac{3}{2}\left\{\eta'+\frac{3}{2}py'+\frac{1}{3}(3p^2-x'^2)x'-x'y\right\}^2-p^3x'y'+p^4x'^2-\frac{5}{2}\left\{\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'-2(y'-px')y-x'\eta\right\}^2, \tag{6.5}$$

$$D_1=\begin{pmatrix} 48p^3-28px'^2+\frac{21}{16}, & 29-11x'^2, & 14p, & 4 \\ 29p^2-11x'^2, & 14p+\frac{63}{16}-\frac{6}{\beta}, & 6, & 0 \\ 14p, & 6, & \frac{105}{16}, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & \frac{147}{16} \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

$$D_2=\begin{pmatrix} \frac{63}{16}-14p+8p^2+8p^3-\beta x'^2, & -6+4p+4p^2 \\ -6+4p+4p^2, & \frac{137}{16} \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

(6.5) 式中的 y 的系数为:

$$-\frac{5}{2}p^2(1-p^2)+3x'\left\{\eta'+\frac{3}{2}py'+\frac{1}{3}(3p^2-x'^2)x'\right\}+10(y'-px')\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right).$$

但是

$$-\frac{5}{2}p^2(1-p^2)+\frac{5}{16}\left\{3x'\left[\eta'+\frac{3}{2}py'+\frac{1}{3}(3p^2-x'^2)x'\right]+10(y'-px')\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)\right\}=-\frac{5}{16}(x',y',\eta',\xi')D_3(x',y',\eta',\xi')',$$

这里

$$D_3=\begin{pmatrix} 5p^2+x'^2, & 5p^3-\frac{9}{4}p-5px'^2, & -\frac{3}{2}+\frac{15}{2}p^2, & 5p \\ 5p^3-\frac{9}{4}p-5px'^2, & 14p^2+10x'^2, & -\frac{15}{2}p, & -5 \\ -\frac{3}{2}+\frac{15}{2}p^2, & -\frac{15}{2}p, & \frac{25}{2}p^2, & 0 \\ 5p, & -5, & 0, & \frac{35}{2}p^2 \end{pmatrix}.$$

当 $p\geqslant p_1$ 时，D_3 是定正的，由于 $y\geqslant 0$，所以可以去掉这部份。因此，(6.5) 式中 y 的系数如下

$$I_1=\frac{11}{16}\left\{x'\left[(3-15p^2)\eta'+\left(\frac{9}{2}-10p^2+10x'^2\right)y'+(3p^2-x'^2)x'-10p\xi'\right]\right.$$

$$+10y'\left\{\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right\}\Bigg\}.$$

于是对于任意 $s_1, s_2 \geqslant 0$，有

$$I_1 y\leqslant\frac{55}{16}\left[\frac{y^2}{s_1}+s_1x'^2\left\{\left(\frac{3-15p^2}{10}\right)\eta'+\left(\frac{9-20p^2+20x'^2}{20}\right)y'+\left(\frac{3p^2-x'^2}{10}\right)x'-p\xi'\right\}^2+\frac{y^2}{s_2}+s_2y'^2\left\{\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right\}^2\right]\leqslant\frac{55}{16}\left[\frac{y^2}{s_1}+s_1x'^2\left\{\left(\frac{3-15p^2}{10}\right)\eta'+\left(\frac{9-20p^2+20x'^2}{20}\right)y'+\left(\frac{3p^2-x'^2}{10}\right)x'-p\xi'\right\}^2+\frac{y^2}{s_2}+s_2(1-x'^2-p^2)\left\{\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)\right)y'\right\}^2\right].\tag{6.8}$$

(6.5) 式中 η 的系数为:

$$I_2=5x'\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right),$$

于是对于任意 $s_3 \geqslant 0$，

$$I_2\eta\leqslant\frac{5}{2}\left[\frac{\eta^2}{s_3}+s_3x'^2\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)^2\right].\tag{6.9}$$

将 (6.8)，(6.9) 式代入 (6.3) 式得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}a_6\leqslant\ &6-(1-p)x'^2\mathscr{F}(p)-(x',y',\eta',\xi')D_1(x',y',\eta',\xi')'\\&-(y,\eta)D_2(y,\eta)'+\frac{p^2-19x'^2}{p^3}\left\{\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x'^2-10(y'-px')^2\right.\right.\\&\left.+\frac{55}{16s_1}+\frac{55}{16s_2}\right]y^2+\left(-\frac{5}{2}x'^2+\frac{5}{2s_3}\right)\eta^2-10x'(y'-px')y\eta\\&-\frac{1}{2}\left(y'+\frac{5}{2}px'\right)^2-\frac{3}{2}\left(\eta'+\frac{3}{2}py'+\frac{1}{3}(3p^2-x'^2)x'\right)^2\\&-p^3x'y'+p^4x'^2-\frac{5}{2}\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)^2+\frac{55}{16}s_1x'^2\left(\frac{3-15p^2}{10}\eta'\right.\\&\left.+\frac{9-20p^2-20x'^2}{20}y'+\frac{3p^2-x'^2}{10}x'-p\xi'\right)^2+\frac{55}{16}s_2(1-x'^2-p^2)\\&\left.\cdot\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta+(p^2-x'^2)y'\right)^2+\frac{5}{2}s_3x'^2\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

取 $s_2=\frac{8}{11}$，$s_3=1$，则

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\left(y'+\frac{5}{2}px'\right)^2-\frac{3}{2}\left(\eta'+\frac{3}{2}py'+\frac{1}{3}(3p^2-x'^2)x'\right)^2-p^3x'y'\\&+p^4y'^2-\frac{5}{2}\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)^2+\frac{55s_2}{16}(1-x'^2-p^2)\\&\cdot\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)^2+\frac{5s_3}{2}x'^2\left(\xi'+\frac{3}{2}p\eta'+(p^2-x'^2)y'\right)^2\\&=(x',y',\eta',\xi')D_4(x',y',\eta',\xi')',\end{aligned}$$

此处

$$-D_4=$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{25}{4}p^2+\frac{(3p^2-x'^2)^2}{6}-p^4, & \frac{5}{4}p+\frac{p^5}{2}+\frac{3}{4}p(3p^2-x'^2), & \frac{1}{2}(3p^4-x'^4), & 0\\
\frac{5}{4}p+\frac{11}{4}p^3-\frac{3}{4}px'^2, & \frac{1}{4}+\frac{27}{8}p^2+\frac{5}{2}p^4-\frac{5p^2x'^2}{2}, & \frac{9}{4}p+\frac{15}{4}p^5-\frac{15}{4}p^3x'^2, & \frac{5}{2}p^2(p^4-x'^2)\\
\frac{1}{2}(3p^2-x'^2), & \frac{9}{4}p+\frac{15}{4}p^5-\frac{15}{4}p^3x'^2, & \frac{3}{2}+\frac{45}{8}p^4, & \frac{15}{4}p^3\\
0, & \frac{5}{2}p^2(p^2-x'^2), & \frac{15}{4}p^3, & \frac{5p^2}{2}
\end{pmatrix}.$$

于是 $D_1-\frac{D_4}{p}=D_5-x'^2D_6$，而

$$D_5=\begin{pmatrix}
\frac{97}{2}p^3+\frac{21}{16}+\frac{25}{4}p, & \frac{127}{4}p^2+\frac{5}{4}, & \frac{31}{2}p, & 4\\
\frac{127}{4}p^2+\frac{5}{4}, & \frac{5}{2}p^3+\frac{139}{8}p+\frac{63}{13}-\frac{6}{\beta}+\frac{1}{4p}, & \frac{15}{4}p^4+\frac{33}{4}, & \frac{5}{2}p^3\\
\frac{31}{2}p, & \frac{15}{4}p^4+\frac{33}{4}, & \frac{3}{2p}+\frac{105}{16}+\frac{45}{8}p^3, & \frac{15}{4}p^2\\
4, & \frac{5}{2}p^3, & \frac{15}{4}p^2, & \frac{5}{2}p,
\end{pmatrix},$$

$$D_6=\begin{pmatrix}
29p-\frac{x'^2}{6p}, & \frac{47}{4}, & \frac{1}{2p}, & 0\\
\frac{47}{4}, & \frac{5p}{2}, & \frac{15p^4}{4}, & \frac{5}{2}p\\
\frac{1}{2p}, & \frac{15}{4}p^2, & 0, & 0,\\
0, & \frac{5}{2}p, & 0, & 0
\end{pmatrix}.$$

但是

$$\left(\frac{3-15p^2}{10}\eta'+\frac{9-20p^2+20x'^2}{20}y'+\frac{3p^2-x'^2}{10}x'-p\xi'\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3-15p^2}{10}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{9-20p^2+20x'^2}{20}\right)^2+\left(\frac{3p^2-x'^2}{10}\right)^2+\frac{p^4}{7}\right)(x'^2+3y'^2+5\eta'^2+7\xi'^2)$$
$$\leqslant(1-p^2)\left(\frac{9-90p^2+225p^4}{500}+\frac{(9-20p^2+20x'^2)^2}{1200}+\frac{3(p^2-x'^2)^2}{100}\right.$$
$$\left.+\frac{p^2}{7}\right)\leqslant(1-p^2).$$

于是得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}a_6\leqslant 6&-(x',y',\eta',\xi')D_5(x',y',\eta',\xi')'-(y,\eta)D_8(y,\eta)'\\&+x'^2\left[\frac{55s_1}{16}(1-p^4)p^4-(1-p)\mathscr{F}(p)\right.\\&\left.+(x',y',\eta',\xi')D_7(x',y',\eta',\xi')'\right],\end{aligned}\qquad(6.10)$$

这里

$$D_7=(e_{ij}),\quad 1\leqslant i,j\leqslant 4.$$

而

$$e_{11}=\frac{77}{2}p^4+\frac{243}{24}p(1-p)-\frac{1045}{16}s_1(1-p^2)+\frac{475}{4}p^2-\frac{115}{6}p^2x'^2+\frac{19}{6}x'^4,$$

$$e_{12}=64p^3+\frac{95}{4}p-\frac{57}{4}px'^2,\quad e_{13}=29p^2-\frac{19}{2}x'^2,\quad e_{14}=0,$$

$$e_{22}=50p^4+\frac{513}{8}p^2+\frac{19}{4}-\frac{95}{2}px'^2,\quad e_{23}=75p^5+\frac{171}{4}p-\frac{285}{4}p^3x'^2,$$

$$e_{24}=50p^4-\frac{95}{2}p^2x'^2,\quad e_{33}=\frac{57}{2}+\frac{858}{8}p^4,\quad e_{34}=\frac{285}{4}p^3,\quad e_{44}=\frac{95}{2}p^2.$$

取 $s_1=16$，再用 (4.1) 式，立刻得到 (6.10) 式的最后一项，当 $p\geqslant p_1$ 时是不大于零的，而

$$D_8=\begin{pmatrix}\frac{63}{16}-14p+8p^2+8p^3-\beta x'^2+\frac{1}{p}\left(\frac{3}{2}x'^2-\frac{567}{256}\right), & -6+4p+4p^2\\ -6+4p+4p^2, & \frac{137}{16}-\frac{5}{27}\end{pmatrix}$$

$$+\frac{19x'^2}{p^3}\begin{pmatrix}\frac{567}{256}+\frac{3}{2}x'^2, & 0\\ 0, & \frac{5}{2}\end{pmatrix},$$

取 $\beta=\frac{41}{2}$，当 $p\geqslant p_1$ 时，这是定正的．而 D_5 也是定正的．

这就证明了：当 $y\geqslant 0$，$k^2\leqslant\frac{1}{19}$，$p\geqslant p_1$ 时，$\mathrm{Re}\,a_6\leqslant 6$ 成立．而当 $p\leqslant p_1$ 时，由于 $k^2\leqslant\frac{1}{19}$，所以当 $p\leqslant p_1$ 时，

$$|a_2|^2=(\mathrm{Re}\,a_2)^2(1+k^2)\leqslant\frac{20}{19}\times 4p_1^2=2.5288069\cdots,$$

即 $|a_2|\leqslant 1.5902223$，但在第二节中已经证明，此时 $|a_6|<6$ 是成立的．

这就完全证明了当 $k^2\leqslant\frac{1}{19}$，$y\geqslant 0$ 时，$\mathrm{Re}\,a_6\leqslant 6$ 成立．至于等号当且仅当 $p=1$ 时才成立，也就是当且仅当 f 是 Koebe 函数时才成立．

参　考　文　献

[1] Garabedian, P. R. & Schiffer, M., A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, *J. Rat. Mech. Anal.*, 4(1955), 427—465.
[2] Charzynski, Z. & Schiffer, M., A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, *Arch. Rat. Meth. Anal.*, 5 (1960), 187—193.
[3] Pederson, R, N., A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 31 (1968/69), 331—351.
[4] Ozawa, M., On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 21 (1969), 97—128.
[5] Pederson, R. N. & Schiffer, M., A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient, *Arch. Ret. Mech. Anal.*, 45 (1972), 161—193.
[6] 龚昇，Fitz Gerald 不等式的改进，中国科学，1979，3，237—246.
[7] Fekete, M. & Szegö, G., Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktinen, *J. London Math. Soc.*,

8(1933), 85—89.

[8] Fitz Gerald, C. H., Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **46**(1972), 356—368.

[9] Ильна, Л. П. и Коломойцева, З. Д., Об оценке $|a_4|$ в зависимости от $|c_2|$ в класс, 5, *Вести. Ленинг. ун-та*, **1** (1974), 27—30.

[10] 龚昇,在第二项系数限制下的 Bieberbach 猜想,中国科学数学专辑(1),1979,202—214.

[11] Horowitz, D., A refinement for coefficient estimates of univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54** (1976), 176—178.

[12] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, 1975.