

有限域上射影特殊酉群的几类极大子群

李 尚 志 查 建 国

(中国科学技术大学数学系, 合肥)

摘 要

本文定出了 $PSU(n, q^2) (n \geq 3)$ 中含 T -子群的全部极大子群 (T -子群是指由某一方向上全部酉平延组成的子群). 这些极大子群的所有可能的类型为: $PSU(n, q^2)$ 所作用的空间 V 的全迷向子空间或维数小于 $\frac{n}{2}$ 的非退化子空间的定驻子群; 将 V 分成一些同维数的子空间的正交和, 这些子空间组成的集合的定驻子群 (有少数例外); 当 n 为偶数时, 自然地嵌在 $PSU(n, q^2)$ 中的 $PS_p(n, q)$ 或 $PS_p(n, q)Z_2$; 以及 $PSU(6, 4)$ 中一类特殊子群.

一、引 言

1. F_{q^2} 是 q^2 个元素的有限域. $a \mapsto \bar{a} = a^q$ 是 F_{q^2} 的二阶自同构, 以 F_q 为不变子域. V 是 F_{q^2} 上 n 维行向量空间, 定义了反 Hermite 内积

$$(x, y) = xHy', \quad x, y \in V,$$

其中

$$H = \begin{cases} \begin{pmatrix} & I_m \\ -I_m & \end{pmatrix}, & \text{当 } n = 2m, \\ \begin{pmatrix} & I_m \\ -I_m & \Delta \end{pmatrix}, & \text{当 } n = 2m + 1, \text{ 这里 } \Delta \in F_q^*, \bar{\Delta} = -\Delta. \end{cases}$$

V 中保持以上内积不变的行列式为 1 的全体线性变换组成特殊酉群 $SU(n, q^2)$, 而 $SU(n, q^2)$ 对中心的商群就是对应的射影群 $PSU(n, q^2)$. 本文中总假定 $n \geq 3$.

对任给的 V 中迷向向量 v 及 F_q^* 中元素 s , 我们把由矩阵 $T_{v,s} = I - sH\bar{v}'v$ 所决定的变换

$$xT_{v,s} = x - s(x, v)v, \quad x \in V$$

叫做一个酉平延. 众所周知, 全体酉平延在群 $PSU(n, q^2)$ 中组成一个共轭类, 并且, 除 $n = 3$, 且 $q = 2$ 的情形外, 酉平延生成群 $PSU(n, q^2)$. 在本文的讨论中将排除 $PSU(3, 4)$ 这一例外情形.

对任意给定的迷向向量 $v \in V$, 子群 $T_v = \{T_{v,s} | s \in F_q^*\}$ 叫做一个 T -子群. $T_u = T_v$ 当且仅当 $\langle u \rangle = \langle v \rangle$, 即: $T_v \mapsto \langle v \rangle$ 是迷向线与 T -子群之间的 1-1 对应. 还要提到的是, 对

$PSU(n, q^2)$ 中任意元 g 和 V 中任意迷向向量 u , 有 $g^{-1}T_u g = T_{ug}$.

2. 联系到单本原置换群的分类问题, O'Nan^[1] 建议研究有限典型群的极大子群问题. 他还列出了射影辛群的几类子群, 猜想它们是极大的, 并预料对其余的典型群也有类似的结果. 我们从几何的考虑出发, 成功地定出了 $PS_p(2n, q)$ 中含 T -子群的全部极大子群¹⁾, 部分地证实了 O'Nan 的猜想. 现在, 我们将对群

$$G = PSU(n, q^2), n \geq 3 \text{ 且当 } n = 3 \text{ 时, } q > 2$$

作同样的事情, 所不同的是, 由于非迷向向量的存在, 增加了问题的难度. 我们的主要结果是:

定理 1. 以下子群在 G 中极大:

- a) V 的全迷向子空间的定驻子群.
- b) V 的维数小于 $n/2$ 的非退化子空间的定驻子群.
- c) 将 V 分解成一些两两正交的 r 维的子空间的直和, 这里, 当 $q > 2$ 时, $r \geq 2$; 当 $q = 2$ 时, $r \geq 3$, 或 $r = 1$ 但 $n \neq 6$. 这些子空间的集合的定驻子群.
- d) $q = 2$, 且 $n = 6$ 时, 形如

$$\langle \alpha_i x_i + \alpha_j x_j \rangle, \quad i \neq j, \quad \alpha_i, \alpha_j \neq 0$$

或

$$\langle \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_6 x_6 \rangle, \quad \alpha_1 \cdots \alpha_6 = 1$$

的全体迷向线的集合的定驻子群, 其中 $\{x_1, \cdots, x_6\}$ 是由两两正交的非迷向向量组成 V 的一组基.

- e) $n = 2m$ 时, 形如

$$\langle (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m}) \rangle, \quad \alpha_i \in F_q, \quad i = 1, 2, \cdots, 2m$$

的全体迷向线的集合在 G 中的定驻子群及其在 $PU(n, q^2)$ 作用下的任一共轭子群.

上述子群都含 T -子群. 反过来, 我们有

定理 2. G 的任一含 T -子群的极大子群必是定理 1 所列的子群之一.

从线性变换群的观点来看, 上述 a), b) 型的子群是可约的, c) 型的子群当 $r \geq 2$ 时是不可约, 但是非本原的, 其余的子群都是不可约而是本原的. 还值得指出, e) 型的极大子群, 其实就是 F_q 上的射影辛群 $PS_p(2m, q)$, 或这个射影辛群的指数为 2 的扩群.

应用我们的主要结果, 在第四节中我们还讨论了几个有关的群论问题.

二、迷向线与 T -子群

我们把任一子空间 V_1 中全体迷向线的集合记作 $L_0(V_1)$, 这些迷向线所对应的全体 T -子群 $\{T_v | \langle v \rangle \in L_0(V_1)\}$ 所生成的群记作 T_{V_1} . 另一方面, 对 G 的任一子群 G_1 , 满足 $T_v \leq G_1$ 的全体迷向线 $\langle v \rangle$ 的集合, 则被记作 $L_0(G_1)$.

引理 1. 设 $G_1 \leq G$, $L_0(G_1)$ 非空, 则 $G_1 \leq \text{Stab } L_0(G_1)$. 特别, 若 M 是 G 中含 T -子群的极大子群, 则 $M = \text{Stab } L_0(M)$.

1) 见作者的“射影辛群 $PS_p(2n, F)$ 中几类极大子群”一文.

引理 2. i) 子空间 V_1 能被迷向向量张成的充要条件是: V_1 全迷向或含有二维非退化子空间.

ii) 设 S_0 是 $L_0(V)$ 的子集, 则 $L_0\langle S_0 \rangle = S_0$ 的充要条件是: 对任一对 $\langle u \rangle, \langle v \rangle \in S_0$, 有 $L_0\langle u, v \rangle \subseteq S_0$.

引理 3. 设 u, v 是一对迷向向量. 若 $\langle u, v \rangle \neq 0$, 则 $T_{\langle u, v \rangle} = \langle T_u, T_v \rangle$; 若 $\langle u, v \rangle = 0$, 则 $T_{\langle u, v \rangle} = \langle T_u, T_v, T_{u+s v}, T_{u+\theta v} \rangle$, 其中 s, θ 分别是 $F_q^*, F_q^* \setminus F_q$ 中任一元.

引理 4. i) 设 V_1 是一个双曲平面, $\langle u \rangle$ 是不含于 V_1 且不含于 $V_1^\perp$ 的任一迷向线. 若子空间 $\langle V_1, u \rangle$ 非退化, 则 $T_{\langle V_1, u \rangle} = \langle T_{V_1}, T_u \rangle$.

ii) 设 V_1 是至少三维的子空间, 它的核 $\text{Ker } V_1 = V_1 \cap V_1^\perp$ 的维数不超过 1, 迷向线 $\langle u \rangle$ 既不含于 V_1 也不含于 $V_1^\perp$, 另外, V_1 与 $\langle V_1, u \rangle$ 至少有一个非退化, 则除了一个例外情形外, (即 $q = 2, \dim V_1 = 3, V_1$ 与 $\langle V_1, u \rangle$ 都非退化), 我们有 $T_{\langle V_1, u \rangle} = \langle T_{V_1}, T_u \rangle$.

iii) V 的子空间 $W_1, \dots, W_l$ 组成的链称为一个斜交链, 如果: 每个子空间 W_i 由迷向线张成, 每个 $W_i (i \geq 2)$ 既不含于 $\langle W_1, \dots, W_{i-1} \rangle$, 也不含于 $\langle W_1, \dots, W_{i-1} \rangle^\perp$. 若 $W_1, \dots, W_l$ 是斜交链, 并且它们所张成的子空间 $W = \langle W_1, \dots, W_l \rangle$ 非退化, V_1 是 W 的一个子空间,

$$\dim \text{Ker } V_1 \leq 1, \dim V_1 \geq \begin{cases} 3, & \text{当 } q > 2, \\ 4, & \text{当 } q = 2, \end{cases}$$

则 $T_W = \langle T_{V_1}, T_{W_1}, T_{W_2}, \dots, T_{W_l} \rangle$.

三、含 T -子群的极大子群

引理 5. G_{V_1} 是子空间 V_1 在 G 中的定驻子群, 则 T -子群 T_v 含于 G_{V_1} 当且仅当 v 含于 V_1 或 $V_1^\perp$.

定理 1a. 全迷向子空间 V_0 的定驻子群 G_{V_0} 在 G 中极大.

证明要点. 由引理 5, $L_0(G_{V_0}) = L_0(V_0^\perp)$. 再利用引理 2 的 i) 可得 $G_{V_0} = \text{Stab } L_0(V_0^\perp)$. 于是, 若 G 的子群 M 真包含 G_{V_0} , 则由引理 1 知 $L_0(M)$ 含有 $V_0^\perp$ 之外的迷向线 $\langle u \rangle$. 于是, V_0 中有向量 v , 使 $\langle u, v \rangle = 1$, 且

$$V_0 = \langle v \rangle \perp (u^\perp \cap V_0).$$

对 $V_0^\perp$ 外的任一向量 $\tilde{u}$, 我们同样有 $\tilde{v} \in V_0, (\tilde{u}, \tilde{v}) = 1, V_0 = \langle \tilde{v} \rangle \perp (\tilde{u}^\perp \cap V_0)$. 根据 Witt 扩张定理, 存在 $g \in G$, 使

$$ug = \beta u, vg = \bar{\beta}^{-1}v, (u^\perp \cap V_0)g = (\tilde{u}^\perp \cap V_0),$$

这里 β 是在 F_q^* 中适当选取使 g 的行列式为 1 的一个元素. 显然, 有 $g \in G_{V_0}, \langle \tilde{u} \rangle = \langle ug \rangle$, 于是

$$T_{\tilde{u}} = T_{ug} = g^{-1}T_u g \leq M.$$

所有 T -子群都含于 M , 因而 $M = G, G_{V_0}$ 的极大性得证.

定理 1b. 维数小于 $n/2$ 的子空间 V_1 的定驻子群在 G 中极大.

证明要点. 分两种情形讨论:

1) $V_1 = \langle x \rangle$ 是非迷向线. 易见 $L_0(G_{\langle x \rangle}) = L_0(x^\perp), G_{\langle x \rangle} = \text{Stab } L_0(x^\perp)$, 且对任意真包含 $G_{\langle x \rangle}$ 的子群 M , $L_0(M)$ 含有形如 $\langle x + y \rangle, y \in x^\perp$ 的迷向线, 而任一个不在 $x^\perp$ 中的迷向线具有形式 $\langle x + \tilde{y} \rangle, \tilde{y} \in x^\perp$. 由于 $(y, y) = -(x, x) = (\tilde{y}, \tilde{y})$, 根据 Witt 扩张定理可知, 存

在 $g \in G$, 使 $xg = x$, $yg = \tilde{y}$. 这就有 $g \in G_{(x)}$, $(x+y)g = (x+\tilde{y})$, 从而 $T_{x+\tilde{y}} \leq M$.

2) $\dim V_1 \geq 2$. 我们有

$$L_0(G_{V_1}) = L_0(V_1) \cup L_0(V_1^\perp), \quad G_{V_1} = \text{Stab}(L_0(V_1) \cup L_0(V_1^\perp)).$$

若子群 M 真包含 G_{V_1} , $L_0(M)$ 必含迷向线 $\langle w_1 + w_2 \rangle$, $0 \neq w_1 \in V_1$, $0 \neq w_2 \in V_1^\perp$. 注意到 $V_1, \langle w_1 + w_2 \rangle, V_1^\perp$ 所组成斜交链, $V_1^\perp$ 是 $V = \langle V_1, w_1 + w_2, V_1^\perp \rangle$ 的至少三维的非退化子空间, 由引理 4 的 iii) 立即可得 $M = G$, 只有 $q = 2$, 且 $\dim V_1^\perp = 3$ 的情形例外.

当 $q = 2$, 且 $\dim V_1^\perp = 3$ 时, 我们能够在 $L_0(M)$ 中找到形如 $\langle \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \rangle$ 的迷向线, 其中 $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ 分别是 $V_1, V_1^\perp$ 中的迷向向量. 于是 $\langle V_1^\perp, \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \rangle$ 退化, 可用引理 4 的 ii) 得出 $T_{\langle V_1^\perp, \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \rangle} \leq M$. 再利用引理 4 的 iii) 即得 $M = G$. 至于刚才所说的 $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ 的存在性, 可由如下途径得出: 若在 $L_0(M)$ 所含的迷向线 $\langle w_1 + w_2 \rangle$ 中 w_1, w_2 都非迷向, 则由 Witt 扩张定理, 可找到 $g \in G_{V_1}$, 使 $w_1 g = x, w_2 g = w_2 + v$, 这里 x 是 V_1 中与 w_1 正交的一个非迷向向量, v 是 $V_1^\perp$ 中与 w_2 正交的一个迷向向量. 于是 $\langle x + (w_2 + v) \rangle = \langle (w_1 + w_2)g \rangle \in L_0(M)$. 令 $\tilde{w}_1 = w_1 + x, \tilde{w}_2 = v$, 则由 $\langle w_1 + w_2, x + w_2 + v \rangle = 1$ 知 $\langle \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 \rangle = \langle (w_1 + w_2) + (x + w_2 + v) \rangle \in L_0(M)$, 且 $\tilde{w}_1$ 与 $\tilde{w}_2$ 迷向.

定理 1c. 若 $V = V_1 \perp \cdots \perp V_l$, $\dim V_1 = \cdots = \dim V_l = r$, 其中当 $q > 2$ 时, $r \geq 2$, 当 $q = 2$ 时, $r \geq 3$, 则子空间集合 $\{V_1, \cdots, V_l\}$ 的定驻子群 G_l 在 G 中极大.

证明要点. 我们有 $G_l = \text{Stab}(L_0(V_1) \cup \cdots \cup L_0(V_l))$, $L_0(G_l) \supseteq L_0(V_1) \cup \cdots \cup L_0(V_l)$. 对任意子群 $M \leq G_l$, $L_0(M)$ 含有形如 $\langle a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \rangle$ 的迷向线, 这里 $k \geq 2$, $0 \neq a_j \in V_{j_i}$, $j = i_1, \cdots, i_k$. 对每一个 $t \in \{k, k+1, \cdots, l\}$, G_l 中有元素分别将 $V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots, V_{i_k}$ 变到 $V_{t-k+1}, V_{t-k+2}, \cdots, V_t$. 因而, 对每个 t , 我们有一条迷向线 $\langle w_t \rangle \in L_0(M)$, 这里 $w_t = a_{t-k+1} + \cdots + a_t$, $0 \neq a_j \in V_{j_i}$, $j = t-k+1, \cdots, t$. 将这些迷向线插入子空间链 $V_1, \cdots, V_l$ 中, 我们得到斜交链

$$V_1, \langle w_k \rangle, V_2, V_3, \cdots, V_k, \langle w_{k+1} \rangle, V_{k+1}, \langle w_{k+2} \rangle, \cdots, V_{l-1}, \langle w_l \rangle, V_l.$$

若 $r \geq 3$, 与定理 1b 的推证一样可得 $M = G$. 若 $r = 2$, 但 $q > 2$, 能够在 $L_0(M)$ 找到迷向线 $\langle a_1 + a_2 + \cdots + a_k \rangle$, 使它在 V_1 中的分量 a_1 非迷向, 于是子空间 $\langle V_1, a_1 + a_2 + \cdots + a_k \rangle$ 非退化, 先用引理 4 的 i), 再用引理 4 的 iii) 即可得出所需结论.

至于 $r = 2$, 且 $q = 2$ 的情形, G_l 不极大. 实际上, 此时每个 V_i 中仅有两条迷向线 $\langle x_i \rangle, \langle y_i \rangle$, 它们相互正交, 于是可以看出 G_l 真包含于两两正交的非迷向线的集合 $\{\langle x_1 \rangle, \langle y_1 \rangle, \cdots, \langle x_l \rangle, \langle y_l \rangle\}$ 的定驻子群之中.

定理 1d. 设 $q = 2$, $x_1, \cdots, x_n$ 是由两两正交的非迷向向量组成的 V 的一组基, 则除 $n = 6$ 的情形外, 线集 $\{\langle x_1 \rangle, \cdots, \langle x_n \rangle\}$ 的定驻子群 G_n 在 G 中极大. 而当 $n = 6$ 时, G_6 不极大, 真包含于迷向线集 $L_{2,6}$ 的定驻子群之中, 这里 $L_{2,6}$ 由全体形如

$$\langle \alpha_i x_i + \alpha_j x_j \rangle, \quad i \neq j, \quad \alpha_i \alpha_j \neq 0$$

或

$$\langle \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_6 x_6 \rangle, \quad \alpha_1 \cdots \alpha_6 = 1$$

的迷向线组成, $\text{Stab } L_{2,6}$ 在 G 中极大.

证明要点. $L_0(G_n)$ 由全体形如 $\langle \alpha_i x_i + \alpha_j x_j \rangle, i \neq j, \alpha_i \alpha_j \neq 0$ 的迷向线组成, $G_n = \text{Stab } L_0(G_n)$. 若子群 M 真包含 G_n , $L_0(M)$ 必含有迷向线 $\langle \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \rangle, k \geq 4, \alpha_1 \cdots \alpha_k$

$\neq 0$.

若 $n = 4$, 立即得出 $M = G$.

若 $n = 5$ 或 $n \geq 7$, 我们总可在 $L_0(M)$ 中找到迷向线 $\langle \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \rangle$, 使 $k < n$, $\alpha_1 \cdots \alpha_k \neq 0$, 于是四维子空间 $\langle x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \rangle$ 退化, 可用引理 4 的 ii) 和 iii), 得出 $M = G$.

当 $n = 6$ 时, 验证了 $L_{2,6} = L_0(\text{Stab } L_{2,6})$ 之后, 就很容易推出 $\text{Stab } L_{2,6}$ 在 G 中的极大性.

定理 1e. 设 $n = 2m$, L_i 是全体形如

$$\langle (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m}) \rangle, \quad \alpha_i \in F_q, i = 1, 2, \cdots, 2m$$

的迷向线的集合, 则 L_i 在 G 中的定驻子群 $\text{Stab } L_i$ 及其在 $PU(n, q^2)$ 下的任一共轭在 G 中极大.

证明要点. V 中全体形如

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m}), \quad \alpha_i \in F_q, i = 1, 2, \cdots, 2m$$

的向量组成 F_q 上的一个辛空间 V_i , 以 V 中所定义的内积为内积, 而 $G_i = G \cap PGL(2m, q)$ 就是作用于 V_i 上的射影辛群 $PSp(2m, q)$. 任意给定非对称元 $\theta \in F_{q^2} \setminus F_q$, L_i 之外的任一迷向线具有形式 $\langle u \rangle$, 其中 $u = w_1 + \theta w_2$, w_1, w_2 是 V_i 中一对线性无关且相互正交的向量.

令子群 M 真包含 $\text{Stab } L_i$, 则 $L_0(M)$ 含有 L_i 之外的迷向线 $\langle u \rangle = \langle w_1 + \theta w_2 \rangle$. 设 $\langle \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{w}_1 + \theta \tilde{w}_2 \rangle$ 是 L_i 之外任一迷向线, 则由 Witt 扩张定理知: 存在 $g \in G_i \leq \text{Stab } L_i$, 使 $w_1 g = \tilde{w}_1$, $w_2 g = \tilde{w}_2$, 从而 $\langle \tilde{u} \rangle = \langle u g \rangle \in L_0(M)$. 这就证明了 $M = G$.

定理 2. G 的任一含 T -子群的极大子群 M 必是定理 1 所列的子群之一.

证明要点. 由引理 1, 我们有 $M = \text{Stab } L_0(M)$. 为证明本定理, 我们分两种情况讨论:

1) $\langle L_0(M) \rangle = V_1 \neq V$. 必有 $M = \text{Stab } V_1$. 若 V_1 退化, $\text{Ker } V_1 = V_0$, 则 $M = \text{Stab } V_0$ 是定理 1a 中所说类型的极大子群. 若 V_1 非退化, 则 $V_1^\perp$ 的维数必为 1, $M = \text{Stab } V_1^\perp$ 属于定理 1b 的类型. 事实上, 若 $\dim V_1^\perp \geq 2$, 则将有 $\langle L_0(M) \rangle = \langle L_0(V_1) \cup L_0(V_1^\perp) \rangle = V$, 产生矛盾.

2) $\langle L_0(M) \rangle = V$. 考虑由 $L_0(M)$ 中取出迷向线来组成的具有极大长度的斜交链 $\langle w_1 \rangle, \langle w_2 \rangle, \cdots, \langle w_r \rangle$.

若 $\langle w_1, \cdots, w_r \rangle = V_1 \neq V$, 从 $L_0(M) \setminus L_0(V_1) \subseteq L_0(V_1^\perp)$ 中取出迷向线组成另一条不可加长的斜交链, 得到另一个子空间 $V_2 \subseteq V_1^\perp$. 照此下去, 最后得到 V 的一个正交分解: $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_l$, $L_0(M) \subseteq L_0(V_1) \cup \cdots \cup L_0(V_l)$. M 中每一元素将每一 V_i 变到某一 V_i 中, 可见 $M \leq \text{Stab } \{V_1, \cdots, V_l\}$, 由 M 的极大性可知, 或者所有 V_i 的维数相等, 因而 M 属于定理 1c 的类型, 不然就有 $l = 2$, M 属于定理 1b 的类型.

当 $\langle w_1, \cdots, w_r \rangle = V$ 时, 我们试图在 $L_0(M)$ 的每一条迷向线中选定一个向量, 使所选定的所有向量两两的内积都在 F_q 中. 如果这种选法能够实现, M 就是定理 1c 类型的子群. 通过更仔细的讨论, 我们证明了, 仅当 $q = 2$ 时, 这种选择过程才有可能失败, 而在这种选择失败时, 又可证明 M 属于定理 1d 所说的类型.

四、几点应用

设 p 是基域 F_{q^2} 的特征. 本节的论证将建立在以下简单事实上:

引理 6. 任给迷向向量 u , 则迷向线 $\langle u \rangle$ 的定驻子群 $G_{\langle u \rangle}$ 是 T -子群 T_u 在 G 中的正规化子. $G_{\langle u \rangle}$ 的 Sylow p -子群 S_p 也是 G 的 Sylow p -子群, T_u 是 S_p 的中心.

我们还要指出, 若 x 是非迷向向量, 则 $G_{\langle x \rangle}$ 的 Sylow p -子群不是 G 的 Sylow p -子群.

推论 1. G 是单群.

证. 设 $N \trianglelefteq G$. 若 p 整除 $|N|$, 则对 G 的任一 Sylow p -子群 S_p , $\{1\} \neq N \cap S_p \trianglelefteq S_p$. 由于 p -群的非单位正规子群必含有此 p -群的非单位中心元. N 也就含有至少一个西平延因而含有所有西平延. 于是必有 $N = G$.

若 p 不整除 $|N|$, 则对任一非迷向向量 x , 根据先前事实, $NG_{\langle x \rangle}$ 不含 G 的 Sylow p -子群, 仍是 G 的真子群, 由 $G_{\langle x \rangle}$ 的极大性知 $N \leq G_{\langle x \rangle}$. 从而 $N \leq \bigcap G_{\langle x \rangle} = \{1\}$.

推论 2. G 的任一自同构 σ 具有形式

$$U \mapsto P^{-1}U^{\tau}P, \quad U \in G,$$

其中 $\tau \in \text{Aut } F_q^2$, P 是广义西方阵.

证明要点. G 的所有 Sylow p -子群的集合在 σ 作用下不变, Sylow p -子群的中心—— T -子群的集合亦如此. T -子群在 G 中正规化子的集合, 也就是迷向线定驻子群的集合 V_0^* , 在 σ 作用下也不变.

将线定驻子群集合 $\{G_{\langle u \rangle} | u \in V\}$ 记作 V^* . 若 $n = 3$, 则 V^* 就是 G 中含 T -子群的全体极大子群的集合, 在 σ 下不变. 若 $n > 3$, 子群 M 属于 V^* 当且仅当:

i) M 是 G 中含 T -子群的极大子群.

ii) 若 T -子群 T_{u_1}, T_{u_2} 含于 M , 则交

$$\bigcap_{\langle T_{u_1}, T_{u_2} \rangle \leq G_{\langle u \rangle} \in V_0^*} G_{\langle u \rangle}$$

中任一 T -子群亦含于 M .

iii) 除了 M 本身外, 任何满足条件 i), ii) 的子群不能包含 M 中所有 T -子群.

由引理 5 和引理 2 的 ii), 条件 ii) 意味着 $L_0(M) = L_0\langle L_0(M) \rangle$, 于是 $\langle L_0(M) \rangle = V_1 \cong V$, M 只能是非迷向线定驻子群或全迷向子空间定驻子群. 条件 iii) 排除了维数 ≥ 2 的全迷向子空间定驻子群.

易见, 满足上面条件的子群, 它们之间的关系在 σ 下仍然成立, 从而 σ 诱导出集合 V^* 的一个置换 σ^* . 为了看出置换表示 $\sigma \mapsto \sigma^*$ 的忠实性, 注意到这个表示的核中任一元 σ_0 定驻每一个 T -子群 T_v , 从而将每一个西平延 $T_{v,s}$ 变到某个 T_{v,s_1} . 对任一满足 $(u, v) = 1$ 的迷向向量 u , 我们有

$$T_{u-sv} = T_{u-sv}^{\sigma_0} = (T_{v,s}^{-1} T_u T_{v,s})^{\sigma_0} = T_{v,s_1}^{-1} T_u T_{v,s_1} = T_{u-s_1v},$$

从而 $s = s_1$. 这说明 σ_0 定驻每一个西平延, 从而 $\sigma_0 = 1$.

集合 V^* 可以看作射影空间, 以每个 $G_{\langle u \rangle} \in V^*$ 为射影点, u 的坐标作为 $G_{\langle u \rangle}$ 的齐次坐标. 点 $G_{\langle u \rangle}$ 与 $G_{\langle v \rangle}$ 正交可用群论语言刻划如下: 若其中一点 $G_{\langle u \rangle} \in V_0^*$, 则 $T_u \leq G_{\langle v \rangle}$; 若两点都不属于 V_0^* , 则 $G_{\langle u \rangle} \cap G_{\langle v \rangle}$ 含于至多 3 个 V^* 中子群中. V^* 中三点 $G_{\langle u_1 \rangle}, G_{\langle u_2 \rangle}$ 及 $G_{\langle u_3 \rangle}$ 共线可刻划为: 与其中任意两点正交的点必与其中第三点正交. 于是 σ^* 保持射影点的正交性与共线性, 用射影几何基本定理可知 $\text{Aut } G$ 同构于由全体具有以下形状的变换组成的群的一个子群:

$$w \mapsto w^{\tau} P, \quad w \in V,$$

其中 $\tau \in \text{Aut } F_{q^2}$, P 是广义酉方阵. 由此即可推出所需结论.

应用 Baer^[2] 关于非交换 p -群的格同构象的一个定理, 我们还可证明:

推论 3. 若群 G^* 与 G 的子群格相互同构, 则 G^* 与 G 同构.

参 考 文 献

- [1] O'Nan, M. E., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **37**(1980), Amer. Math. Soc., L 28, 1—14.
- [2] Baer, R., *Amer. J. Math.*, **61**(1939), 1—44.