

Korteweg-De Vries-Burgers 方程的级数解

忻孝康 赵越*

(复旦大学应用力学系, 上海 200433)

摘 要

本文给出了 KdV-Burgers 方程行波解的如下边值问题:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - Am \frac{du}{dz} + u^2 - u = 0,$$

$$u(-\infty) = 1, u(+\infty) = 0$$

的级数解。求解的方法是把整个解分解成三个区域的级数解, 然后利用对接条件(函数和导数连续)构成一个整体级数解。与精确解的比较表明, 精度可达到任意位小数。对方程中的参数 A_m 的任意值均可给出相应的级数解。特别对 $A_m < 2$ 的情况, 第一次给出了振荡型激波的级数解。

关键词: KdV-Burgers 方程, 级数解, 振荡型激波

一、引 言

如所周知, KdV 方程由于存在孤立波和孤立子那样的定型波解, 已被流体力学家和物理学家们广泛研究过^[1,2]。目前对 KdV-Burgers 方程的研究也渐趋增加^[3-6]。许多非线性波动问题(详见文献[3,6,7])均可归结为如下的 KdV-Burgers 方程:

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad \delta, \nu > 0, \quad (1)$$

如果寻求这个方程的行波解, 即

$$u(x, t) = u(x - \lambda t + x_0) = u(s), \quad (2)$$

则(1)式化为:

$$-\lambda u_s + uu_s - \nu u_{ss} + \delta u_{sss} = 0. \quad (3)$$

如果把边界条件规定为标准形式:

$$\begin{cases} u(-\infty) = 1, u(+\infty) = 0, \\ \text{且当 } s \rightarrow \pm\infty \text{ 时, } u \text{ 的各阶导数均趋于零。} \end{cases} \quad (4)$$

那么对(3)式积分一次, 并利用边界条件(4), 方程可化为

$$\delta u_{ss} - \nu u_s + u^2 - u = 0, \quad (5)$$

本文 1990 年 12 月 17 日收到, 1991 年 4 月 22 日收到修改稿。

* 现在上海正泰橡胶厂工作。

稍作变换,方程(5)可化为含有单参数的标准形式^[7]:

$$\begin{cases} u_{zz} - A_m u_z + u^2 - u = 0, \\ u(-\infty) = 1, u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$z = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \xi, \quad A_m = \frac{\nu}{\sqrt{\delta}} > 0. \quad (7)$$

对于方程(5),文献[3]中曾给出了用 Jacobi 椭圆函数表达的一类解析解;对问题(6),文献[4,5]中分别给出了同样的精确解:

$$u_1(x) = 1 - \frac{1}{(1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{\delta}} x})^2},$$

$$\text{当 } A_m = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ 时.} \quad (8)$$

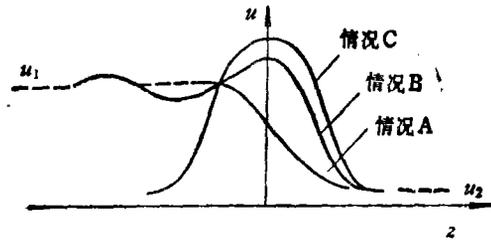


图1 KdV-Burgers 方程的典型解曲线

从常微分方程的定性理论可以知道,问题(6)存在如下三类形式的解^[8]:

(i) 情况 (A), $A_m \geq 2$, 单调激波型解,

(ii) 情况 (B), $A_m < 2$, 振荡激波型解,

(iii) 情况 (C), $A_m = 0$ ($\nu = 0$), 孤立波解,

其图形可参看图 1.

文献[3—5]均只给出单调激波型的解,至今尚未见到有人以解析形式给出情况(B),即 $A_m < 2$ 时的振荡激波型解.本文试图给出问题(6),在任何 A_m 值下的级数形式解,从而也给出了 $A_m < 2$ 时的振荡激波解.

本文利用函数 $u(z)$ 在无穷远处的特性,估计出函数 $u(z)$ 在 $z > 0$ 和 $z < 0$ 两个区域的级数特性,然后再建立 $z = 0$ 附近的中间幂级数.接着利用这三个级数在对接处 $z = z_R > 0$ 和 $z = z_L < 0$ 的连接条件(函数和导数连续)得到了完整的级数形式的解.与精确解(8)的比较表明,级数解能达到任意精确度,只要适当选取项数即可.与其它数值方法(如差分法)相比较,级数解没有数值耗散和色散之类的误差,可以作为其它数值方法比较的标准.本文给出了不同 A_m 值下,问题(6)的各种级数解.

二、 $A_m \geq 2$ 情况的级数解法

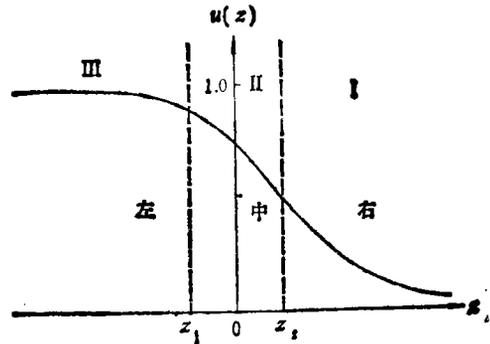
由于函数 $u(z)$ 在 $z = \pm \infty$ 处的性态截然不同^[7],因此用一个级数的形式来表达函数 u 似乎是很困难的.这样,至少要两个级数 ($z < 0$ 和 $z > 0$) 来加以表达.从精确解(8)易于看出, $z = 0$ 点正好是这两个级数的发散点,因此无法在 $z = 0$ 处对接.从而有必要引入第三个级数 ($z = 0$ 附近的中间级数),使对接处不会出现级数的发散.另一方面,由于问题(6)的解具有平移性,即若 $u_1(z)$ 为(6)式的解, $u_1(z - z_0)$ 也为(6)式的解,因此在 $u(0)$ 值估计有误差时,左、右级数 ($z < 0$ 和 $z > 0$) 的发散点可能在 $z = 0$ 附近移动,这就更有必要引入第三个在 $z = 0$ 附近的中间级数,以便使级数易于对接,又不使级数在对接处发散.

为此,我们按 z 的不同值, $I(-\infty, z_L]$, $II[z_L, z_R]$, $III[z_R, +\infty)$ 把 u 的级数分成三个,分别称为左、中、右级数(图 2).考虑到中间级数的收敛半径, $|z_R|$, $|z_L|$ 值一般不宜过

大,通常取 $z_R = -z_L = 1.0$.

下面我们给出三个级数的估计形式.左、右级数形式的确定是由问题(6)的解 $u(x)$ 在 $z = \pm \infty$ 处的渐近性态而定的^[7]. 令 $v = uz$, 则(6)式化为:

$$\frac{dv}{du} = A_m - \frac{(u-1)u}{v} \quad (9)$$



由边界条件(4)知^[7]:

图 2 级数解的三个区间

$$\begin{cases} z \rightarrow +\infty, u(z) \propto Ae^{\sigma_1 z}, & \sigma_0 = \frac{1}{2}(A_m - \sqrt{A_m^2 + 4}) < 0, \\ z \rightarrow -\infty, u(z) - 1 \propto Be^{\sigma_2 z}, & \sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(A_m \pm \sqrt{A_m^2 - 4}) > 0. \end{cases} \quad (10)$$

由此,则易于估计出左、右级数的形式.

(i) 对右段 ($z > 0$) 级数,我们设

$$u^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{\sigma_1 z})^n, \quad (11a)$$

若令 $\tau_0 = e^{\sigma_1 z}$, 则级数又可写成:

$$u^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau_0^n; \quad (11b)$$

(ii) 对中间 ($z = 0$ 附近)级数,我们可用通常的幂级数的形式,记为:

$$u^0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n; \quad (12)$$

(iii) 对左段 ($z < 0$) 级数,我们可以设

$$u^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B(n, m) (e^{\sigma_1 z})^n \cdot (e^{\sigma_2 z})^m, \quad (13)$$

若令

$$\tau_1 = e^{\sigma_1 z}, \quad \tau_2 = e^{\sigma_2 z},$$

则有

$$u^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B(n, m) \tau_1^n \cdot \tau_2^m. \quad (14)$$

这里在正式计算时尚需分两种情况:

(A) 当 $\sigma_1/\sigma_2 =$ 无理数时, $u^-(z)$ 采用(14)或(13)式的一般形式;

(B) 当 $\sigma_1/\sigma_2 =$ 有理数 $= p/q$, 这里 p, q 为正整数. 这时(14)式的各项有可能出现重复项,因此采用如下形式的级数是合理的:

$$u^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (e^{\frac{\sigma_1}{p} z})^n, \quad (15)$$

它包含了这种情况的各种可能形式。

由边界条件(4)知:

$$a_0 = 0, B(0, 0) = 1 \text{ 或 } b_0 = 1. \tag{16}$$

有了上述三个级数的估计形式之后,把左、中、右级数代入(6)式,利用级数的乘法,按同类项合并,可以容易导出级数的系数之间的递推关系式:

(i) $a_0 = 0, a_1$ 待定,

$$a_n = \frac{-1}{(n\sigma_0^2 + 1)(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k}, \quad n \geq 2; \tag{17}$$

(ii) $C_0 = u(0)$ 由解的唯一性给出, C_1 待定,

$$C_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[(n+1)A_m C_{n+1} + (1-2C_0)C_n - \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k} \right], \tag{18}$$

$n \geq 1.$

由于解的可平移性,要唯一确定解必须给定 $C_0 = u(0)$ 值. 一般对 $0 < C_0 < 1$ 的任一值均可给出一条解曲线.

(iii) 分两种情况:

(A). 当 $\sigma_1/\sigma_2 =$ 无理数时,

$B(0, 0) = 1, B(0, 1)$ 和 $B(1, 0)$ 为待定值,

$$B(n, m) = - \left[\sum_{k=0}^n \sum_{L=0}^m B(k, L) \cdot B(n-k, m-L) - 2B(n, m) \right] / \tag{19}$$

$[(m\sigma_1 + n\sigma_2)^2 - A_m(m\sigma_1 + n\sigma_2) + 1].$

(B). 当 $\sigma_1/\sigma_2 = p/q =$ 有理数时,

$b_0 = 1, b_p, b_q$ 待定,

$$b_n = \frac{-1}{\left(\frac{n^2\sigma_1^2}{p^2} - A_m \frac{n}{p} \sigma_1 + 1\right)} \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot b_{n-k}, \quad n \neq p, n \neq q. \tag{20}$$

综合上面各式,可以看出这三个级数共有四个未定常数: $a_1, B(0, 1), B(1, 0)$ (或 b_p, b_q) 和 C_1 . 恰好有四个对接条件(函数值和一阶导数值连续)¹⁾成立,它们是:

$$\begin{cases} f_1 \equiv u^0(z_R) - u^+(z_R) = 0, \\ f_2 \equiv \frac{du^0(z_R)}{dz} - \frac{du^+(z_R)}{dz} = 0, \quad z_R > 0 \\ f_3 \equiv u^1(z_L) - u^-(z_L) = 0, \\ f_4 \equiv \frac{du^0(z_L)}{dz} - \frac{du^-(z_L)}{dz} = 0, \quad z_L < 0 \end{cases} \tag{21}$$

方程组(21)可看作是未定常数 $a_1, B(0, 1) B(1, 0)$ (或 b_p, b_q) 和 C_1 的非线性代数方程组:

1) 由于对接点两边均满足同一个二阶常微分方程,因此只要函数值和一阶导数值连续,则二阶导数及其它高阶导数均为连续. 因此,只要对接点在收敛半径内,级数解与对接点位置无关.

$$f_i(a_1, B(0, 1), B(1, 0), C_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (22)$$

它可以用 Newton-Raphson 方法迭代求解之:

$$\underline{X}^{r+1} = \underline{X}^r - [J^r]^{-1} \cdot \underline{f}^r. \quad (23)$$

这里 r 是迭代次数; 矩阵 $[J]$ 是 Jacobi 矩阵, 其元素为:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}$$

而 $\underline{X} = (a_1, B(0, 1), B(1, 0), C_1)^T, \underline{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ 迭代方程至

$$\|\underline{X}^{r+1} - \underline{X}^r\| < \varepsilon (= 10^{-1} \sim 10^{-10}) \quad (24)$$

为止.

一旦求出参数 $a_1, B(0, 1), B(1, 0)$ 和 C_1 后, 级数的所有系数完全确定, 从而对任一固定 z 可计算出 $u(z)$ 值, 问题(6)完全解决.

三、 $A_m < 2$ 情况的级数解法

$A_m < 2$ 与上面 $A_m \geq 2$ 情况所不同的是: 在 $A_m < 2$ 时, $\sigma_{1,2}$ 是一对共轭复数, 即

$$\sigma_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad (25)$$

其中

$$\alpha = A_m/2, \quad \beta = \sqrt{4 - A_m^2}/2. \quad (26)$$

这也就是解在 $z < 0$ 区域出现振荡型激波的来源.

很显然, 对于右边级数和中间级数来说, $A_m < 2$ 与 $A_m \geq 2$ 情况完全相同, 计算公式也同样适用, 其差别仅在于左面级数的估计形式和计算公式. 如果考虑到 $\sigma_{1,2}$ 在复数情况下, 左面级数解仍有(13)式的形式, 那么我们可以把左面级数解估计成如下的形式:

$$u^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cos n\beta z + p_n(z) \sin n\beta z, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} g_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B(n, m) e^{(n+2m)\alpha z}, \\ p_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C(n, m) e^{i(n+2m)\alpha z}, \end{cases} \quad (28)$$

这里 α 和 β 值由(26)式确定.

把(27), (28)式进行求导、平方代入(6)式, 经过归并同类项并比较同类项系数后(详见附录 A), 可以得到如下结果:

$$\begin{cases} B(0, 0) = 1, \quad C(0, 0) = 0 \quad (\text{边界条件}), \\ B(1, 0) \text{ 和 } C(1, 0) \text{ 为待定值}, \\ B(n, m) = \frac{-s(d+2) + R \cdot g}{(d+2)^2 + g^2}, \quad C(n, m) = \frac{-s \cdot g - R \cdot (d+2)}{(d+2)^2 + g^2}, \end{cases} \quad (29)$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

其中

$$\begin{cases}
 d = (n+2m)^2\alpha^2 - n^2\beta^2 - A_m \cdot (n+2m)\alpha - 1, \\
 g = 2n\alpha\beta(n+2m) - A_m \cdot n\beta, \\
 S = \frac{1}{2} \sum_{L=0}^m \sum_{k=0}^n [B(k, L) \cdot B(n-k, m-L) - C(k, L) \cdot C(n-k, m-L)] \\
 \quad + \sum_{k=0}^m \sum_{L=0}^{m-k} [B(n+k, L) \cdot B(k, m-k-L) + C(n+k, L) \\
 \quad \cdot C(k, m-k-L)] - 2B(n, m), \\
 R = \frac{1}{2} \sum_{L=0}^m \sum_{k=0}^n [C(k, L) \cdot B(n-k, m-L) + B(k, L) \cdot C(n-k, m-L)] \\
 \quad - \sum_{k=0}^m \sum_{L=0}^{m-k} [B(n+k, L) \cdot C(k, m-k-L) - C(n+k, L) \\
 \quad \cdot B(k, m-k-L)] - 2C(n, m).
 \end{cases} \quad (30)$$

因此,只要 $B(1, 0)$, $C(1, 0)$ 值已知之后,则可由(29)式逐次算出任意 n 和 m 值的 $B(n, m)$ 和 $C(n, m)$ 值. 与 $A_m \geq 2$ 情况相类似,在 $A_m < 2$ 情况,左、中、右三个级数共有四个未定参数: $a_1, C_1, B(1, 0)$ 和 $C(1, 0)$, 其对接条件仍然是(21)式,它们同样可以用 Newton-Raphson 方法迭代求解. 其求解过程与 $A_m \geq 2$ 情况几乎一样.

四、数值计算结果和讨论

1. 与精确解(8)的对比情况

这时 $A_m = 5/\sqrt{6}$, $\sigma_0 = -1/\sqrt{6}$, $\sigma_{1,2} = \frac{3}{\sqrt{6}}$ 和 $\frac{2}{\sqrt{6}}$. 由于 $\sigma_1/\sigma_2 = 3/2 =$ 有理数,故左面级数有(15)式的形式. 级数对接处分别取作: $z_R = 0.5$, $z_L = -0.5$. Newton-Raphson 迭代精度 ε 取作 10^{-10} . 那么级数解与精确解之间的最大绝对误差为:

$$\max_x |u_{\text{级数}} - u_{\text{精确}}| \approx 0.137 \times 10^{-11}.$$

可见,在 ε 很小的情况下,级数解与精确解几乎没有什么误差. 可以看出,只要迭代精度要求高(包括计算机精度),解就可达到很高的精度.

如果对精确解(8)进行二项式展开,不难看出,当 $z > 0$ 时成立:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= 1 - \frac{1}{(1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{6}}z})^2} = 1 - [1 - 2e^{-\frac{1}{\sqrt{6}}z} + 3e^{-\frac{2}{\sqrt{6}}z} - 4e^{-\frac{3}{\sqrt{6}}z} + \dots] \\
 &= 2e^{\sigma_1 z} - 3e^{2\sigma_1 z} + 4e^{3\sigma_1 z} - \dots
 \end{aligned}$$

这与我们的(11a)式相一致.

对 $z < 0$, 同样用二项式展开就有:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= 1 - \frac{1}{e^{-\frac{2}{\sqrt{6}}z} (1 + e^{\frac{1}{\sqrt{6}}z})^2} = 1 - e^{\frac{2}{\sqrt{6}}z} [1 - 2e^{-\frac{1}{\sqrt{6}}z} + 3e^{-\frac{2}{\sqrt{6}}z} - \dots] \\
 &= 1 - e^{\sigma_2 z} + 2e^{\sigma_1 z} - 3e^{2\sigma_1 z} + 4e^{(\sigma_1 + \sigma_2)z} + \dots
 \end{aligned}$$

这与(13)和(15)式估计相一致. 不难看出, $z = 0$ 是左、右两级数的发散点,无法对接;必须加入中间级数以避免对接时的发散.

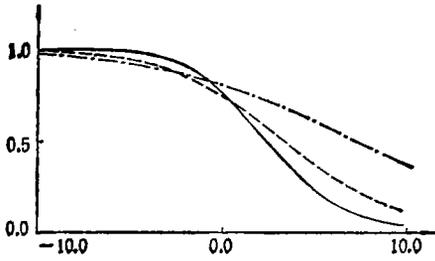


图 3 对不同 $A_m > 2$ 的级数解曲线

(— $A_m = 2.1$, --- $A_m = 3.0$, - · - $A_m = 5.0$)

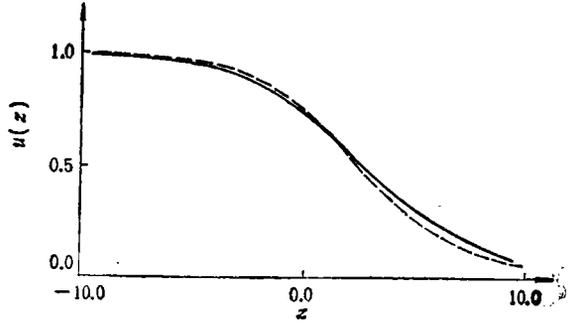


图 4 对 $A_m = 5/\sqrt{6}$ 和 $13/\sqrt{30}$ 情况的级数解曲线

(— $A_m = 5/\sqrt{6}$, --- $A_m = 13/\sqrt{30}$)

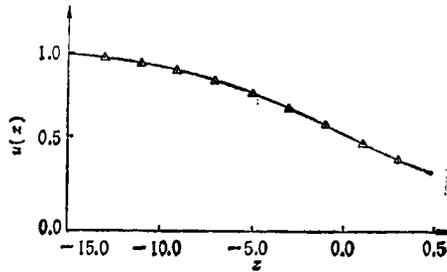


图 5 对 $A_m = 5/\sqrt{6}$ 情况的级数解与渐近解(经过平移)的比较

(—级数解, Δ Canosa^[8](经过平移))

2. 单调激波解 ($A_m \geq 2$)

图 3 分别给出了 $A_m = 2.1, 3.0$ 和 5.0 情况下级数解的曲线, 它们对应于 $\sigma_1/\sigma_2 =$ 无理数的情况。很显然, 随着 A_m 的增加, 曲线将越来越平坦。图 4 分别给出了 $A_m = 5/\sqrt{6}$ 和 $13/\sqrt{30}$ 情况下级数解的曲线, 它们分别对应于 $\sigma_1/\sigma_2 = 3/2$ 和 $10/3$ 两种情况, 其左边级数由(15)式确定。为了与已知的渐近解^[8]相比较, 在图 5 中给出了 $A_m = 5$ (对应于文献[8]中的 $\epsilon = 0.04$) 的级数解与 Canosa 的二阶渐近解的比较(经过适当的平移), 可以看出, 两者几乎没有什么误差。这是一种非常奇特的现象, 值得人们加以研究。如果把文献[8]的解化成本文参数 A_m 的形式, 则有:

$$u_{\text{渐近}} = \frac{1}{1 + \eta} + \epsilon \frac{\eta}{(1 + \eta)^2} \left[1 - \ln \frac{4\eta}{(1 + \eta)^2} \right] + O(\epsilon^2), \quad (31)$$

其中 $\eta = \exp(z_1/A_m)$, $\epsilon = 1/A_m^2$, z_1 与本文的 z 可差一个常数。通过计算不难发现, 只要对曲线(31)进行适当的向右平移, 渐近解与级数解的误差相当微小, 即使对 A_m 不太大 (ϵ 不太小) 的情况也成立(至少在 $z \in [-10, 10]$ 范围内)。具体数值参见表 1。这就是说, 二阶渐近解(31)是问题(6)的一个较好的近似(对 $A_m \geq 2$)。但是, 仔细分析解(31)可以发现, 解(31)在 $z_1 \in (-\infty, \infty)$ 内会出现极大值(即曲线并非单调下降), 例如, 当 $A_m = 2.1$ 时, $z_1 = -12.2150448$ 处, $u_{\text{渐近}} = 1.000680022$; $A_m = 3$ 时, $z_1 = -31.16036332$, $u_{\text{渐近}} = 1.000003427$ 等等。对于大 A_m 值也可以证明存在极值处。由解(31)求导, 不难得出极值点的位置在于 η 满足如下的方程:

$$\frac{4\eta}{(1+\eta)^2} = e^{A_m^2 \frac{(1+\eta)}{\eta-1}} \tag{32}$$

随着 A_m 的增加,极值点越来越远离 $z_1 = 0$, $u_{渐近}$ 的最大值越来越接近于 1.

表 1 $A_m = 3$ 时级数解与渐近解的比较

z	$u_{级数}$	z_1	$u_{渐近}$
9.5	0.11961275	6.62466664	0.11914108
9.0	0.13686539	6.12466664	0.13637248
8.0	0.17784294	5.12466664	0.17727465
7.0	0.22827959	4.12466664	0.22759679
6.0	0.28864092	3.12466664	0.28783805
5.0	0.35844210	2.12466664	0.35757633
4.0	0.43593103	1.12466664	0.43512145
3.0	0.51801198	0.12466664	0.51739038
2.0	0.60056562	-0.87533336	0.60020293
1.0	0.67917024	-1.87533336	0.67903744
0.0	0.75000000	-2.87533336	0.75000000
-1.0	0.81054487	-3.87533336	0.81058228
-2.0	0.85987511	-4.87533336	0.85990626
-3.0	0.89843460	-5.87533336	0.89846902
-4.0	0.92755880	-6.87533336	0.92763081
-5.0	0.94896625	-7.87533336	0.94910523
-6.0	0.96437712	-8.87533336	0.96459355
-7.0	0.97530045	-9.87533336	0.97558605
-8.0	0.98295613	-10.87533336	0.98329099
-9.0	0.98827860	-11.87533336	0.98863892
-10.0	0.99195797	-12.87533336	0.99232168

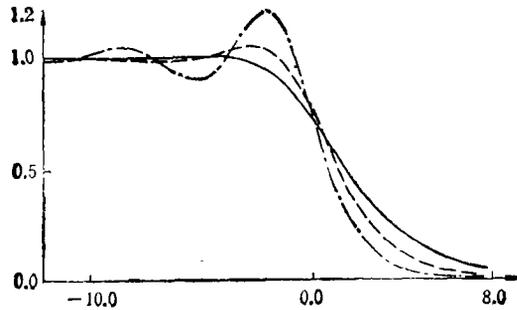


图 6 对不同 $A_m < 2$ 情况的振荡型级数解
(— $A_m = 1.5$, --- $A_m = 1.0$, -·-·- $A_m = 0.5$)

3. 振荡激波解 ($A_m < 2$)

用本文的方法同样可给出 $A_m < 2$ 时的级数解,这时左面级数采用(27)式,计算级数系数采用(29)式. 图 6 给出了 $A_m = 0.5, 1.0$ 和 1.5 情况下的三条级数解曲线. 可以看出,当 $A_m < 2$ 时,解的左边 ($z < 0$) 出现了波动和振荡,但振荡的幅值并未有文献[7]的草图上所指出的那么大.

综上所述,可以看出,对于 KdV-Burgers 方程的定型波解,可以采用本文提出的级数解法,得到任意参数 A_m 值下的级数解,特别是得到了振荡型激波的解。与精确解和渐近解的比较表明,本文的方法是正确、精确和有效的。本文的级数解法尚可推广到求解某些非线性常微分方程的边值问题上去。

附 录 A

对(27)式关于 x 求导,易得出:

$$u_x^- = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n' + n\beta p_n) \cos n\beta x + (p_n' - n\beta g_n) \sin n\beta x, \quad (\text{A.1})$$

$$u_{xx}^- = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n'' + 2n\beta p_n' - n^2\beta^2 g_n) \cos n\beta x + (p_n'' - 2n\beta g_n' - n^2\beta^2 p_n) \sin n\beta x, \quad (\text{A.2})$$

其中

$$\begin{cases} p_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha(n+2m)B(n,m)e^{(n+2m)\alpha x}, \\ p_n'' = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^2(n+2m)^2 B(n,m)e^{(n+2m)\alpha x}, \\ g_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha(n+2m)C(n,m)e^{(n+2m)\alpha x}, \\ g_n'' = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^2(n+2m)^2 C(n,m)e^{(n+2m)\alpha x}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

比较复杂的是计算 $(u^-)^2$ 项,利用三角公式不难得出:

$$\begin{aligned} (u^-)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_m \cos m\beta z + p_m \sin m\beta z) \cdot (g_{n-m} \cos(n-m)\beta z + p_{n-m} \sin(n-m)\beta z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [g_m g_{n-m} \cos m\beta z \cos(n-m)\beta z + p_m g_{n-m} \sin m\beta z \cos(n-m)\beta z \\ &\quad + g_m p_{n-m} \cos m\beta z \cdot \sin(n-m)\beta z + p_m p_{n-m} \sin m\beta z \cdot \sin(n-m)\beta z] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\cos n\beta z \cdot \bar{r}_n^m + \sin n\beta z \cdot \bar{S}_n^m + \cos(n-2m)\beta z \cdot r_n^m \\ &\quad - \sin(n-2m)\beta z \cdot S_n^m], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

这里

$$\begin{cases} r_n^m = \frac{g_m g_{n-m} + p_m p_{n-m}}{2}, & S_n^m = \frac{p_m g_{n-m} - p_{n-m} \cdot g_m}{2}, \\ \bar{r}_n^m = \frac{g_m g_{n-m} - p_m p_{n-m}}{2}, & \bar{S}_n^m = \frac{p_m g_{n-m} + g_m p_{n-m}}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

利用性质:

$$\begin{aligned} r_n^m &= r_n^{n-m}, & \bar{r}_n^m &= \bar{r}_n^{n-m}, \\ S_n^m &= -S_n^{n-m}, & \bar{S}_n^m &= \bar{S}_n^{n-m}, \end{aligned}$$

(A.4)式可化为:

$$\begin{aligned} (u^-)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{r}_n^m \cdot \cos n\beta z + \bar{S}_n^m \cdot \sin n\beta z + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (r_{n+1}^m \cdot \cos n\beta z \\ &\quad + S_{n+1}^m \cdot \sin n\beta z) + \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

再注意到 $g_m g_{n-m}, p_m p_{n-m}, g_m g_{n+m}$ 等项, 利用级数乘法不难得出:

$$\begin{aligned}
 g_m g_{n-m} &= \sum_{i=0}^{\infty} [B(m, i)e^{(m+2i)\alpha z}] \cdot \sum_{i=0}^{\infty} [B(n-m, i)e^{(n-m+2i)\alpha z}] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{L=0}^k [B(m, L) \cdot B(n-m, k-L) \cdot e^{(n+2k)\alpha z}], \\
 g_m \cdot g_{n+m} &= \sum_{i=0}^{\infty} [B(m, i)e^{(m+2i)\alpha z}] \cdot \sum_{i=0}^{\infty} [B(n+m, i)e^{(n+m+2i)\alpha z}] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{L=0}^k B(m, k-L) \cdot B(n+m, L)e^{(n+2m+2k)\alpha z} \\
 &= \sum_{T=0}^{\infty} \sum_{L=0}^{T-m} B(m, T-m-L) \cdot B(n+m, L)e^{(n+2T)\alpha z}.
 \end{aligned}$$

从而不难求出

$$\sum_{m=0}^n \bar{r}_m^n, \quad \sum_{m=0}^n \bar{S}_m^n, \quad \sum_{m=0}^n r_{n+2m}^m, \quad \sum_{m=0}^n S_{n+2m}^m \quad \text{和} \quad \sum_{m=0}^n r_{2m}^m$$

的表达式. 把 (A.1)–(A.6) 式代入方程(6), 比较 $\sin n\beta z, \cos n\beta z$ 和 $e^{(n+2m)\alpha z}$ 的系数, 可以得出如下两组方程:

$$\begin{aligned}
 &B(n, m) \cdot d + C(n, m) \cdot g + \frac{1}{2} \sum_{L=0}^m \sum_{k=0}^n [B(k, L) \cdot B(n-k, m-L) - C(k, L) \\
 &\quad \cdot C(n-k, m-L)] + \theta \cdot \sum_{k=0}^m \sum_{L=0}^{m-k} [B(n+k, L) \cdot B(k, m-k-L) + \\
 &\quad C(n+k, L) \cdot C(k, m-k-L)] = 0,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 &-B(n, m) \cdot g + C(n, m) \cdot d + \frac{1}{2} \sum_{L=0}^m \sum_{k=0}^n [C(k, L) \cdot B(n-k, m-L) \\
 &\quad + B(k, L) \cdot C(n-k, m-L)] - \theta \sum_{k=0}^m \sum_{L=0}^{m-k} [B(n+k, L) \cdot C(k, m-k-L) \\
 &\quad - C(n+k, L) \cdot B(k, m-k-L)] = 0,
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

其中

$$\begin{cases} \theta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ 1, & n \geq 1. \end{cases} \\ d = (n+2m)^2 \alpha^2 - n^2 \beta^2 - A_m \cdot (n+2m)\alpha - 1, \\ g = 2n\beta\alpha(n+2m) - A_m \cdot n\beta, \end{cases} \tag{A.9}$$

由此可得(29)式. 由(A.7)和(A.8)式及边界条件知:

$$B(0, 0) = 1, \quad C(0, 0) = 0, \quad B(1, 0) \quad \text{和} \quad C(1, 0) \quad \text{是待定的.}$$

参 考 文 献

- [1] Miura, R. M., *SIAM Rev.*, 18(1976), 3:412–459.
- [2] 郭柏灵、庞小峰, 孤立子, 科学出版社, 1987.
- [3] 忻孝康、黄光伟, *力学学报*, 18(1986), 3: 193–199.
- [4] 周祖巍, *应用科学学报*, 6(1988), 374–376.
- [5] Melkonian, S., in *Continuum Mechanics and its Applications* (Eds. Graham, G. A. C. & Malik, S. K.), Hemisphere Pub. Co., 1989, 411–423.
- [6] 忻孝康等, 计算流体动力学, 国防科技大学出版社, 1989.
- [7] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Pub., New York, 1974.
- [8] Canosa, J., *I. B. M. J. Res. Develop.*, 17 (1973), 307–313.