



三维非理想高磁雷诺数磁流体流动的数值模拟

吕浩宇^{①*}, 李椿萱^②

① 北京航空航天大学宇航学院空间科学研究所, 北京 100191;

② 北京航空航天大学国家计算流体力学实验室, 北京 100191

* E-mail: Lvhy@buaa.edu.cn

收稿日期: 2009-03-13; 接受日期: 2009-06-27

摘要 对三维高磁雷诺数下非理想可压磁流体方程组发展了基于 TVD 的守恒格式. 八波模型磁流体方程组属于非严格的非凸双曲型方程组, Powell 对该方程组进行了修正并建立了一组新的磁流体方程组. 修正后的方程组形式上非守恒, 不能直接采用守恒型格式. 针对该方程组构造了基于 TVD 的守恒格式, 并通过一维磁流体激波管问题进行了验证; 对不同情况下的非定常磁流体 Rayleigh 问题和定常 Hartmann 问题数值模拟结果和解析解的比较说明算法可靠性较高, 可采用此算法对高磁雷诺数下的磁流体问题(如宇宙磁流体问题、钝头体高超声速绕流)进行有效的数值模拟.

关键词

磁流体
数值模拟
磁流体 Rayleigh 流动
磁流体 Hartmann 流动

空间物理、天体物理等物理过程将涉及到空气动力学和磁场的相互作用. 例如, 已经知道太阳表面的局部强磁场可达到上千高斯的强度, 而且太阳附近的大气是部分电离或者完全电离的. 太阳及其大气中的许多物理过程都受到磁场和等离子体的控制^[1~3]. 在过去的几年中, 将磁流体技术应用于高超动力学中的课题越来越受到学者的关注. 二十世纪九十年代初, 俄罗斯提出了一种采用涡喷发动机与磁流体强化超燃冲压发动机的组合推进系统作为其高超声速巡航飞行器的动力系统的新设想, 并制定了相关技术的“AJAX”发展计划^[4].

磁流体动力学包含了电磁学、流体动力学、化学动力学以及等离子体动力学等多门基本学科, 是一门复杂的交叉学科, 其理论模型由流体力学守恒方程组、Maxwell 方程组以及磁流体本构方程组成, 因此磁流体动力学模型的数学特性高度复杂. 在数值

模拟研究方面, Zachary 和 Colella^[5]利用高阶 Godunov 格式求解了一维理想磁流体方程. Dai 和 Woodward 对于多维理想磁流体方程发展了基于非线性 Riemann 解的迭代算法^[6], 随后他们又引入基于特征法的高阶 Godunov 格式建立了一维磁流体方程的近似 Riemann 解算法^[7]. 在文献[8]中, Dai 和 Woodward 又针对双曲型守恒方程组引进了一种 Godunov 型的隐显式混合格式, 该格式的优点是具有严格的守恒形式, 而且对于任意的 CFL 数, 其空间和时间精度都能达到二阶.

由于磁流体方程组本质上属于双曲型方程组, 将 TVD 格式引入到磁流体方程组的数值模拟中也受到了广泛的关注^[9~13]. 利用 TVD 格式需要确定偏微分方程组的特征值和特征向量, 然而该方程组已经被证明是非严格的双曲型方程组, 存在既非线性退化场又非真正非线性场的特征场, 而且 Jacobi 矩阵不

满秩^[9]. Powell^[9]提出了消除上述奇异性的三个原则, 并且通过引入磁场散度的影响建立了一组新的磁流体方程组. 近年来, Hoffmann 等人^[11-13]把利用 TVD 限制器修正的四阶龙格-库塔方法应用到磁流体的数值模拟, 该格式的缺点是由于引进了龙格-库塔方法, 增加了计算量.

本文采用八波模型的磁流体方程组对高磁雷诺数情况下磁流体 Rayleigh 问题和 Hartmann 问题进行数值模拟. 当磁雷诺数 $Re_m \gg 1$ 时, 八波模型的磁流体方程组在形式上非守恒, 不能直接采用守恒型格式. 本文研究目的是构造基于 TVD 的守恒格式, 并通过一维磁流体激波管问题进行了验证, 最后通过数值模拟并与具有解析解的高磁雷诺数下的磁流体 Rayleigh 问题和 Hartmann 问题的比较, 说明算法的可靠性.

1 八波模型非理想磁流体控制方程

对磁流体方程组的推导需要考虑到磁场对导电流体的作用, 以及流场对磁场的影响, 因此磁流体方程组由 Navier-Stokes 方程组、Maxwell 方程组以及 Ohm 定律推导得出, 它包括质量方程、动量方程、能量方程以及磁感应方程.

采用下面的无量纲参数:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{tu_\infty}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad u^* = \frac{u}{u_\infty}, \\ v^* &= \frac{v}{u_\infty}, \quad w^* = \frac{w}{u_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad T^* = \frac{T}{T_\infty}, \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad B_x^* = \frac{B_x}{\sqrt{\mu_{m\infty} \rho_\infty u_\infty^2}}, \quad B_y^* = \frac{B_y}{\sqrt{\mu_{m\infty} \rho_\infty u_\infty^2}}, \\ B_z^* &= \frac{B_z}{\sqrt{\mu_{m\infty} \rho_\infty u_\infty^2}}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_\infty}, \quad \mu_m^* = \frac{\mu_m}{\mu_{m\infty}}. \end{aligned}$$

定义下面的无量纲参数为,

$$\text{马赫数: } M_\infty = u_\infty / \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty};$$

$$\text{雷诺数: } Re = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty;$$

$$\text{普朗特数: } Pr = mc_p / k;$$

$$\text{磁雷诺数: } Re_m = \sigma_\infty \mu_{m\infty} u_\infty L.$$

对八波模型的磁流体方程组无量纲化并且考虑原方程奇异性的影响, 可得如下的方程组(此方程已经去掉了*号):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \mathbf{B} \\ \rho e_t \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + P \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{\mu_m} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ (\rho e_t + P) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{\mu_m} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathbf{B}}{\mu_m} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_m} \end{bmatrix} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ = \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Re} \boldsymbol{\tau} \\ \frac{1}{Re_m} \cdot \frac{1}{\mu_m \sigma} \nabla \mathbf{B} \\ \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{Re} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{(\gamma-1) Pr M_\infty^2 Re} \nabla T \\ &-\frac{1}{Re_m} \cdot \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_m} \cdot \nabla \frac{\mathbf{B}}{\mu_m} - \nabla \frac{\mathbf{B}}{\mu_m} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_m} \right) \end{aligned} \right\} \end{bmatrix}, \quad (1) \end{aligned}$$

其中

$$P = p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_m}, \quad e_t = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_m \rho}.$$

方程(1)在笛卡尔坐标系下可简写为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} + \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{F}^v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}^v}{\partial z}, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{M}$ 为考虑磁流体流动在时间推进中保证磁场满足散度条件而加入到八波模型中, Powell^[9]研究发现形如方程(1)的八波模型可避免原磁流体方程组对流项 Jacobi 矩阵非满秩的性质. 因此在本文研究中, 将采用方程(1)作为模型方程.

2 数值计算方法

2.1 一般坐标下方程形式

在一般曲线坐标系 (ξ, η, ζ) 下, 方程(1)可写成

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} + \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{F}^v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}^v}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}^v}{\partial \zeta}, \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z, \rho e_t]^T,$$

$$\mathbf{F} = \xi_x \mathbf{f} + \xi_y \mathbf{g} + \xi_z \mathbf{h}, \quad \mathbf{G} = \eta_x \mathbf{f} + \eta_y \mathbf{g} + \eta_z \mathbf{h},$$

$$\mathbf{H} = \zeta_x \mathbf{f} + \zeta_y \mathbf{g} + \zeta_z \mathbf{h},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_\xi + \mathbf{m}_\eta + \mathbf{m}_\zeta = \mathbf{K} \frac{\partial B_\xi}{\partial \xi} + \mathbf{K} \frac{\partial B_\eta}{\partial \eta} + \mathbf{K} \frac{\partial B_\zeta}{\partial \zeta},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^v &= \eta_x \mathbf{f}^v + \eta_y \mathbf{g}^v + \eta_z \mathbf{h}^v, \quad \mathbf{H}^v = \zeta_x \mathbf{f}^v + \zeta_y \mathbf{g}^v + \zeta_z \mathbf{h}^v, \\ B_\xi &= \xi_x B_x + \xi_y B_y + \xi_z B_z, \quad B_\eta = \eta_x B_x + \eta_y B_y + \eta_z B_z, \\ B_\zeta &= \zeta_x B_x + \zeta_y B_y + \zeta_z B_z, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{K} = \left(0, \frac{B_x}{\mu_m}, \frac{B_y}{\mu_m}, \frac{B_z}{\mu_m}, u, v, w, \frac{1}{\mu_m} (uB_x + vB_y + wB_z) \right)^T.$$

为了防止坐标变换在均匀流场引入误差, 此处并未采用通常所用的“守恒”形式, 而是直接对上述方程组构造差分格式^[14].

2.2 方程组的特征系统

一维的理想磁流体方程组已经被证明为非严格的双曲型方程组, 在磁流体方程组的特征场中, 存在既非真正非线性场, 亦非线性退化场的情况. 因此, 其特征场的特性要远比 Euler 方程组复杂. 文献[15]指出, 由于磁流体方程组的非凸性, 可以产生混合波. 虽然采用 Powell 准则所构造的新磁流体方程组避免了通量的 Jacobi 矩阵不可逆, 但是对其特征向量的构造仍然存在问题.

以曲线坐标 ξ 方向为例, 其通量 $\mathbf{F}$ 的 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_{0\xi} &= U, \quad \lambda_{a\xi\pm} = U \pm v_{a\xi}, \quad \lambda_{t\xi\pm} = U \pm v_{t\xi}, \\ \lambda_{s\xi\pm} &= U \pm v_{s\xi}, \quad \lambda_{d\xi} = U, \end{aligned}$$

其中 $U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w$; $v_{a\xi}$, $v_{t\xi}$ 和 $v_{s\xi}$ 分别为 ξ 方向 Alfvén 波、快磁声波和慢磁声波的波速, 其形如:

$$\begin{aligned} v_{a\xi} &= \xi_x v_{ax} + \xi_y v_{ay} + \xi_z v_{az}, \quad v_{t\xi}^2 = \frac{1}{2} \left[a_4 (v_a^2 + c_s^2) + z_\xi \right], \\ v_{s\xi}^2 &= \frac{1}{2} \left[a_4 (v_a^2 + c_s^2) - z_\xi \right], \quad v_{ax} = \frac{B_x}{\sqrt{\mu_m \rho}}, \quad v_{ay} = \frac{B_y}{\sqrt{\mu_m \rho}}, \\ v_{az} &= \frac{B_z}{\sqrt{\mu_m \rho}}, \quad v_a^2 = v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2, \quad c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \\ z_\xi^2 &= a_4 \left[a_4 (v_a^2 + c_s^2)^2 - 4c_s^2 v_{a\xi}^2 \right], \end{aligned}$$

该 8 个特征值所对应的特征向量见文献[13]. 观察上述曲线坐标 ξ 方向的特征值不难发现, 当 $B_\xi = 0$ 时, 8 个特征值中有 6 个均为 U , 而且 $v_{s\xi} = 0$, 该慢磁声波所对应的特征场退化为线性场. 此时特征值 $\lambda_{s\xi\pm}$ 所对应的右特征向量表现出奇性. 该奇性可通过以下方法予以消除. 注意到以下等式成立:

$$v_{t\xi} v_{s\xi} = \sqrt{\frac{a_4}{\mu_m \rho}} c_s |B_\xi|,$$

即

$$\frac{B_\xi}{v_{s\xi}} = \sqrt{\frac{\mu_m \rho}{a_4}} \frac{v_{t\xi}}{c_s} \text{sgn}(B_\xi).$$

若 $B_\xi = 0$, 取 $\text{sgn}(B_\xi) = 1$. 应用上式对文献[13]中的左、右特征向量进行修正, 可得出一组新的特征向量. 同样, 可给出 η 与 ζ 方向的 Jacobi 矩阵特征值及特征向量.

2.3 数值模拟方法

由方程(1)可看出, 该方程组的无粘部分是非守恒形式. 由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的限制项 $\mathbf{M}$ 对于流场变量 $\mathbf{Q}$ 是线性的, 因此 $\mathbf{M}$ 项只对该双曲型方程组的线性场有影响. 进一步研究可发现 $\mathbf{M}$ 项是将特征值为零的特征场改变为熵波场. 因此该项对磁流体非线性场并未有影响, 即 $\mathbf{M}$ 项不会影响非线性场的激波结构.

磁流体方程组无粘部分的差分方程可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ijk}^{n+1} &= \mathbf{Q}_{ijk}^n - \Delta t \left(\bar{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}jk} - \bar{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}jk} + \mathbf{M}_{\xiijk}^n \right) \\ &\quad - \Delta t \left(\bar{\mathbf{G}}_{ij+\frac{1}{2}k} - \bar{\mathbf{G}}_{ij-\frac{1}{2}k} + \mathbf{M}_{\etaijk}^n \right) \\ &\quad - \Delta t \left(\bar{\mathbf{H}}_{ijk+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{H}}_{ijk-\frac{1}{2}} + \mathbf{M}_{\zetaijk}^n \right) \\ &= \left[\mathbf{I} - \Delta t \left(\delta \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{M}_{\xiijk}^n \right) - \Delta t \left(\delta \bar{\mathbf{G}}_j + \mathbf{M}_{\etaijk}^n \right) \right] \\ &\quad \times \left[-\Delta t \left(\delta \bar{\mathbf{H}}_k + \mathbf{M}_{\zetaijk}^n \right) \right] \mathbf{Q}_{ijk}^n. \end{aligned}$$

上式已经利用了条件 $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$, 其右侧采用了算子记法, 若给上式加一个小量

$$\begin{aligned} &(\Delta t)^2 \left(\delta \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{M}_{\xiijk}^n \right) \left(\delta \bar{\mathbf{G}}_j + \mathbf{M}_{\etaijk}^n \right) \\ &+ (\Delta t)^2 \left(\delta \bar{\mathbf{G}}_j + \mathbf{M}_{\etaijk}^n \right) \left(\delta \bar{\mathbf{H}}_k + \mathbf{M}_{\zetaijk}^n \right) \\ &+ (\Delta t)^2 \left(\delta \bar{\mathbf{H}}_k + \mathbf{M}_{\zetaijk}^n \right) \left(\delta \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{M}_{\xiijk}^n \right) \\ &- (\Delta t)^2 \left(\delta \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{M}_{\xiijk}^n \right) \left(\delta \bar{\mathbf{G}}_j + \mathbf{M}_{\etaijk}^n \right) \left(\delta \bar{\mathbf{H}}_k + \mathbf{M}_{\zetaijk}^n \right), \end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ijk}^{n+1} &= \left[\mathbf{I} - \Delta t \left(\delta \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{M}_{\xiijk}^n \right) \right] \times \left[\mathbf{I} - \Delta t \left(\delta \bar{\mathbf{G}}_j + \mathbf{M}_{\etaijk}^n \right) \right] \\ &\quad \times \left[\mathbf{I} - \Delta t \left(\delta \bar{\mathbf{H}}_k + \mathbf{M}_{\zetaijk}^n \right) \right] \mathbf{Q}_{ijk}^n. \end{aligned} \quad (4)$$

该格式可以在 i, j, k 三个方向上分别进行计算.

不但简化了程序设计, 而且提高了稳定性. 以 i 方向为例, Harten 的二阶 TVD 格式^[10]的数值通量为

$$\delta \bar{F}_i = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}, \quad \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} = \bar{F}(Q_{i-2}, Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}, \xi_x, \xi_y, \xi_z),$$

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}(Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2}, \xi_x, \xi_y, \xi_z),$$

$$\bar{F} = \frac{1}{2}(\bar{F}_{i-1} + \bar{F}_i) + \mathbf{R}_{\text{Roe}}(Q_{i-1}, Q_i) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{g_-^l + g_+^l}{2} \\ -\frac{Q_k(\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_{i-1}, Q_i) + \mu^l)}{2} \mathbf{L}_{\text{Roe}}^l(Q_{i-1}, Q_i)(Q_i - Q_{i-1}) \end{array} \right\},$$

其中: $g_-^l = \text{superbee}(g_1^l, g_2^l)$, $g_+^l = \text{superbee}(g_2^l, g_3^l)$,

$$\mu^l = \frac{g_+^l - g_-^l}{\mathbf{L}_{\text{Roe}}^l(Q_{i-1}, Q_i)(Q_i - Q_{i-1})},$$

$$g_1^l = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_k(\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_{i-2}, Q_{i-1}))}{-\Delta t (\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_{i-2}, Q_{i-1}))^2} \right] \cdot \mathbf{L}_{\text{Roe}}^l(Q_{i-2}, Q_{i-1})(Q_{i-1} - Q_{i-2}),$$

$$g_2^l = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_k(\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_{i-1}, Q_i))}{-\Delta t (\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_{i-1}, Q_i))^2} \right] \cdot \mathbf{L}_{\text{Roe}}^l(Q_{i-1}, Q_i)(Q_i - Q_{i-1}),$$

$$g_3^l = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_k(\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_i, Q_{i+1}))}{-\Delta t (\lambda_{\text{Roe}}^l(Q_i, Q_{i+1}))^2} \right] \cdot \mathbf{L}_{\text{Roe}}^l(Q_i, Q_{i+1})(Q_{i+1} - Q_i),$$

$$Q_k(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \varepsilon_k, \\ \frac{z^2 + \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k}, & |z| < \varepsilon_k, \end{cases}$$

$$\text{superbee}(a, b) = \frac{\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)}{2} \cdot \max[\min(2|a|, |b|), \min(|a|, 2|b|)],$$

其中, $\mathbf{L}_{\text{Roe}}$, $\mathbf{R}_{\text{Roe}}$ 和 λ_{Roe}^l 分别为方程(3)采用了 Roe 平均之后的右特征向量、左特征向量和特征值.

对于粘性部分的求解, 采用显式中心差格式.

3 数值模拟结果分析

3.1 磁流体激波管问题

激波管问题属于可压流动的经典问题, 在初始

时刻, 激波管由处于原点的薄膜分割成的两部分均衡状态组成. 本文研究对磁流体激波管和空气动力学激波管问题均进行了数值模拟实验, 以利于对比. 对磁流体激波管问题采用本文提出的基于 TVD 的守恒格式, 而对 Euler 方程组采用熵条件格式^[14].

磁流体激波管问题采用 Brio 和 Wu 提出的算例^[15]. 数值模拟的结果如图 1~5 所示. 网格数量、空间步长和时间步长均和文献[15]中的相同, 即 $\Delta x = 1$, 网格数量 $n = 800$, $\Delta t = 0.2$.

对于上述磁流体激波管问题, Brio 和 Wu 发现会出现以下的波: 向左传播的快膨胀波(FR)、慢混和波(SC)和向右传播的接触间断(CD)、慢激波(SS)和快膨胀波(FR), 这些波在密度图中均已标出.

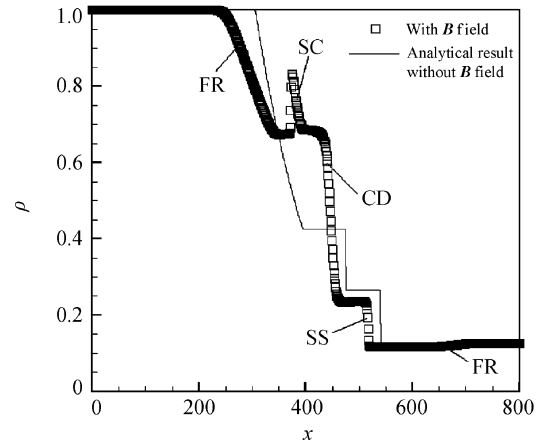


图1 密度

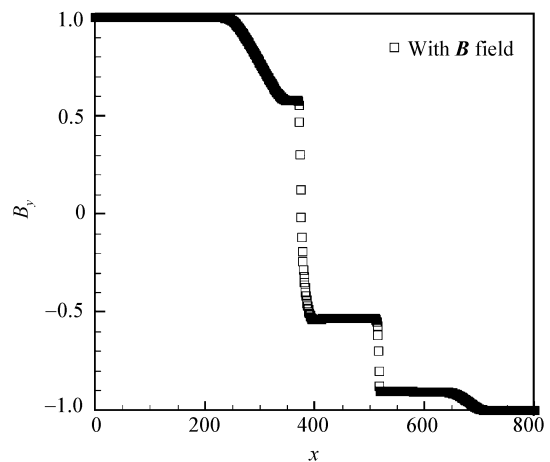


图2 y 方向磁感应强度

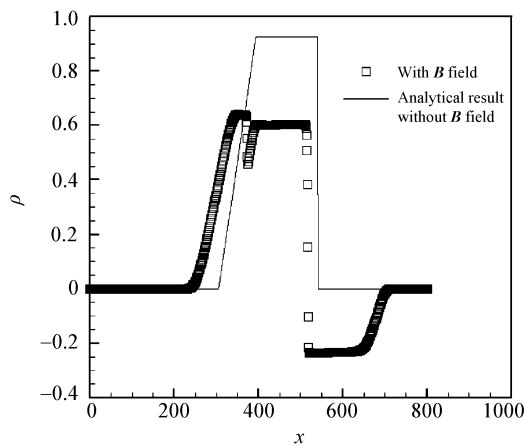


图3 x 方向速度

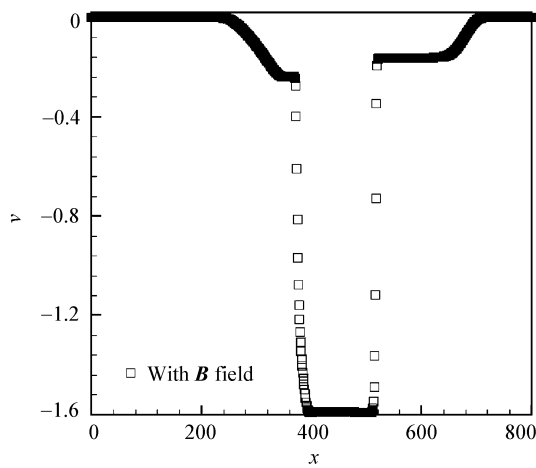


图4 y 方向速度

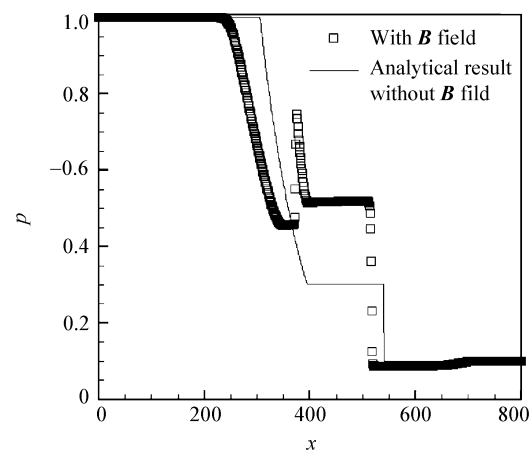


图5 压强

从图中可以看出, 尽管在接触间断附近有抹平, 该格式对激波的捕捉只需要5个点, 而且在慢激波附近没有明显的振荡. 因此, 本文构造的算法能够很好的捕捉到磁流体的特征波, 得到的结果比较令人满意.

3.2 磁流体 Rayleigh 流动问题

磁流体 Rayleigh 问题是指无限长的平板在 z 方向上施加随时间和空间不变的磁场强度 B_z , 沿 x 方向在 $t=0$ 时刻突然以不变速度 U 运动. 磁流体 Rayleigh 问题是磁流体边界层流动中很重要的基本问题, 它考虑了分子粘性、磁场扩散率以及阿尔芬波的传播^[16]. 该问题可以作为检验数值模拟磁流体边界层流动的程序的标准.

当磁谱朗特数 $P_m = \mu / \mu_m \sigma \rho = 1$ 时, 磁流体 Rayleigh 问题有解析解. 本文数值模拟采用的参数如表1所示, 网格为 $5 \times 4 \times 100$ 的三维网格, 移动壁面采用绝缘壁面. 图6和7分别给出了当 $B_z = 1.5 \times 10^{-4} \text{T}$ 时不同时刻速度型和感应磁场强度分布的数值模拟和解析解的比较. 图8和9分别给出了不同外加磁场强度在同一时刻的速度型和感应磁场强度分布的数值模拟和解析解的比较.

在上述的条件下, $Re = Re_m \gg 1$, 因此采用八波模型的算法求解. 从上图可以看出, 在外加磁场不变的

表1 磁流体 Rayleigh 问题参数

$\rho (\text{kg/m}^3)$	$p (\text{Pa})$	$\sigma (\text{mho/m})$
4×10^{-5}	32.3	1.78×10^7

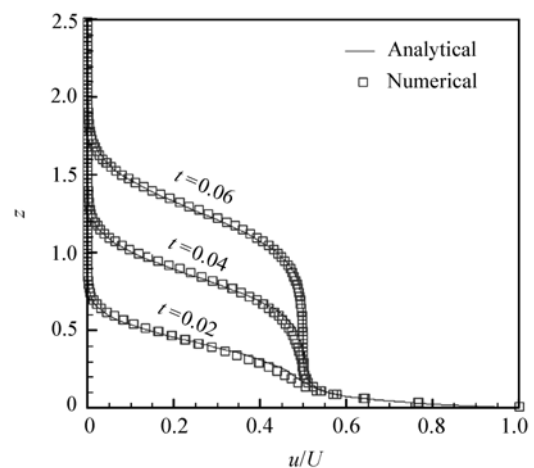


图6 不同时刻的速度型分布

情况下, 匀速区随着时间扩大, 而 Hartmann 层不变; 如果外加磁场增大, 匀速区扩大, 而且 Hartmann 层变薄.

3.3 磁流体 Hartmann 流动问题

在磁流体旁路超燃冲压发动机推进系统中, 最关键的部件是内部磁流体发生器^[17]. 从原理上磁流体发生器内部流动属于磁流体 Hartmann 流动^[18], 该流动为等离子体在两个无限长平行平板之间的流动, z 方向施加磁场强度, 在平板的展向有一对电极. 假设管道的高宽比非常小, 即 $2H/W \ll 1$, 因此忽略电极附近的边缘效应对中心流动的影响. 电极上的电势不同, 两电极之间的电场强度由负载因子给出, 即 $E_y = -ku_\infty B_z$, 其中 k 为负载因子. 当 $0 < k < 1$ 时, 该结构为磁流体发生

器, 当 $k > 1$ 时, 该结构为磁流体加速器.

考虑流量一定的情况, 此时容易证明当磁场为零时, Hartmann 流动退化为 Poiseuille 流动. 数值模拟中采用的网格为 $30 \times 5 \times 50$ 的三维网格, 雷诺数和磁雷诺数分别为 $Re=100$, $Re_m=100$. 图 10 给出了不同 Ha 数下数值模拟和解析求解 Hartmann 流动速度型的比较图, 图 11 给出了感应磁场强度的比较图, 从图中看出随着 Ha 数的增大, 速度型变得平坦, 边界层变薄. 这是因为无量纲化后的边界层厚度为:

$$\delta^* = \frac{\delta}{L} = \frac{\mu}{B_\infty L \sqrt{\sigma}} = \frac{1}{Ha},$$

因此 Ha 数增大而边界层变薄, 在流量不变的情况下, 速度型势必变得平坦, 同时感应磁场强度也减小.

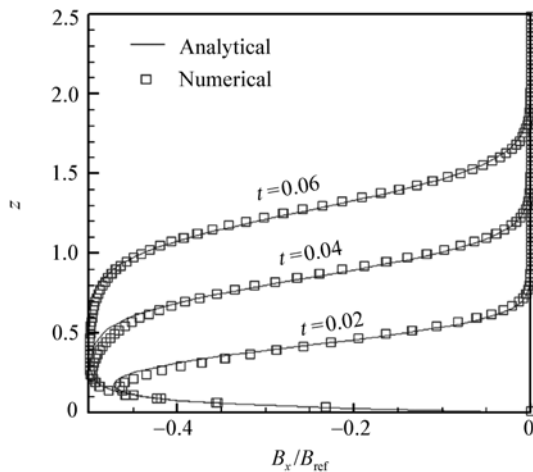


图7 不同时刻的感应磁场强度分布

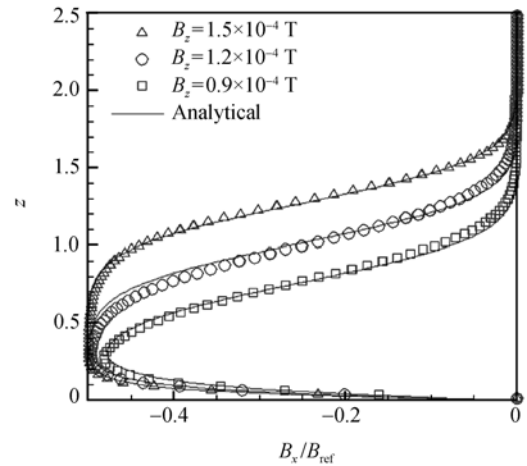


图9 不同 B_z 时的 B_x 分布

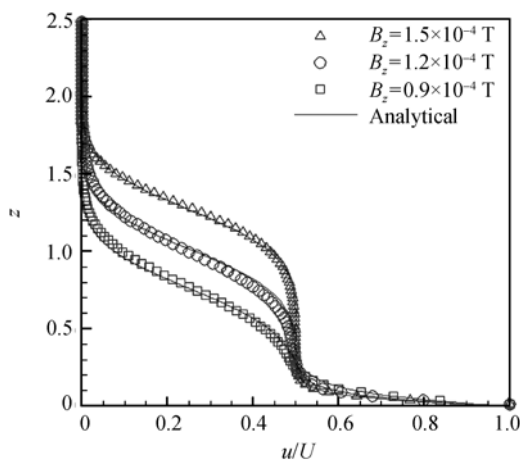


图8 不同 B_z 时的速度型分布

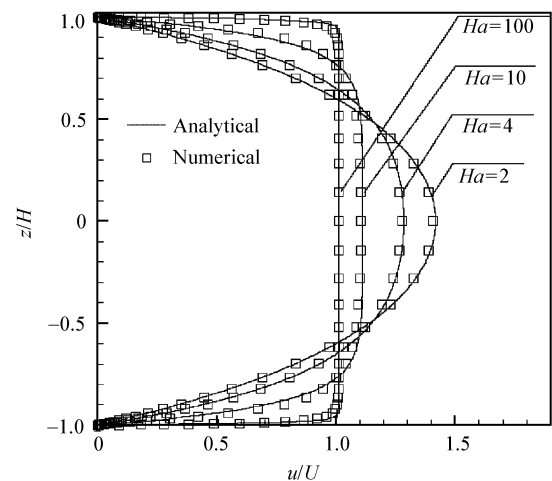
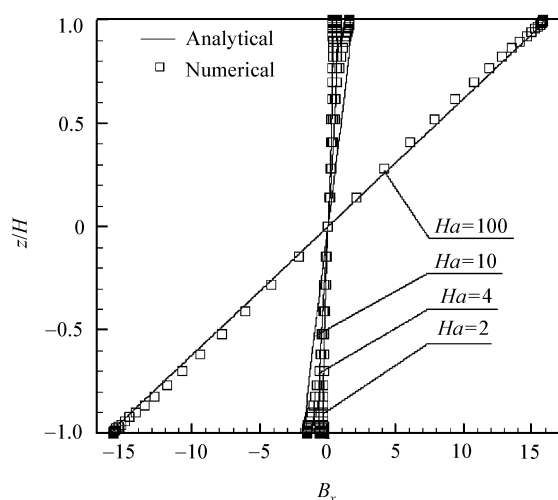


图10 不同 Ha 数时速度型的分布

图 11 不同 Ha 数时 B_x 的分布

4 结束语

本文对三维高磁雷诺数下的非理想磁流体方程组

发展了基于 TVD 的守恒格式, 并利用该算法对高磁雷诺数下的磁流体 Rayleigh 问题和 Hartmann 流动问题进行数值模拟研究.

Powell 修正后的磁流体八波模型形式非守恒, 不能直接采用守恒型格式. 本文构造了基于 TVD 的守恒格式, 并通过一维磁流体激波管问题进行了验证. 比较结果说明该格式能够有效的捕捉到磁流体的特征波. 磁流体 Rayleigh 问题和 Hartmann 问题是磁流体流动中最基本的问题, 在特定情况下具有解析解. 采用本文构造的格式对非定常的磁流体 Rayleigh 问题在不同时刻和同一时刻不同外加磁场强度情况分别进行了数值模拟, 并对定常磁流体 Hartmann 流动在不同 Ha 数情况进行了数值模拟. 数值模拟结果和解析解的比较说明本文构造格式可靠性较高, 可采用此算法对高磁雷诺数下的磁流体流动问题(如宇宙磁流体问题、钝头体高超声速绕流)进行有效的数值模拟.

参考文献

- 1 Rossow V J. On Flow of Electrically Conducting Fluids over a Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field. Technical Report, NACA TN 3971. 1957
- 2 Lykoudis P S. On a class of compressible laminar boundary layers with pressure gradient for an electrically conducting fluid in the presence of a magnetic field. In: Proc 9th Ann Congress Int Astronautical Federation. Vienna: Springer-Verlag, 1959. 168—180
- 3 Blevis Z O. Magnetogasdynamics of hypersonic Couette flow. J Aero/Space Sci, 1958, 25(10): 601—615
- 4 Gurijanov E P, Harsha P T. AJAX: New Directions in Hypersonic Technology. Technical Report, AIAA 96-4609. 1996
- 5 Zachary A L, Collella P. A Higher-order scheme for magnetohydrodynamics. J Comput Phys, 1992, 99(1): 341—347
- 6 Dai W, Woodward P R. Extension of the piecewise parabolic method to multidimensional ideal magnetohydrodynamics. J Comput Phys, 1994, 115(2): 485—514
- 7 Dai W, Woodward P R. A simple Riemann solver and high-order Godunov schemes for hyperbolic systems of conservation laws. J Comput Phys, 1995, 121(1): 51—65
- 8 Dai W, Woodward P R. A second-order iterative implicit-explicit hybrid scheme for hyperbolic systems of conservation laws. J Comput Phys, 1996, 128(1): 181—196
- 9 Powell K G, Roe P L, Myong R S, et al. An Upwind Scheme for Magnetohydrodynamics. Technical Report, AIAA 95-1704. 1995
- 10 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J Comput Phys, 1983, 49(2): 357—393
- 11 Harada S, Augustinus J, Hoffmann K A, et al. Development of a Modified Runge-Kutta Scheme with TVD Limiters for the Ideal 1-D MHD Equations. Technical Report, AIAA 97-2090. 1997
- 12 Harada S, Hoffmann K A, Augustinus J. Development of a Modified Runge-Kutta Scheme with TVD Limiters for the Ideal Two-Dimensional MHD Equations. Technical Report, AIAA-98-0981. 1998
- 13 Damevin H M, Hoffmann K A. Development of a Modified Rungekutta Scheme with TVD Limiters for Ideal Three-Dimensional Magnetogasdynamics. Technical Report, AIAA 2001-2739. 2001
- 14 董海涛, 张立东, 李椿萱. 基于熵条件二阶差分格式的嵌套网格分区算法. 计算物理, 2003, 20(3): 102—106
- 15 Briot M, Wu C C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. J Comput Phys, 1988, 75(2): 400—422
- 16 Moreau R. Magnetohydrodynamics. Dordrecht: Kluwer Academic, 1990
- 17 Lee C H, Lü H Y. Quasi-one-dimensional Parametric Study for MHD Generator in MHD Bypass Scramjet System. Technical Report, AIAA 2007-0644. 2007
- 18 Sutton G W, Sherman A. Engineering Magnetohydrodynamics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965