# 关于抽象 CR 流形的嵌入*

韩祖宏　　陈志华
（上海交通大学应用数学系）

**关键词**　　CR流形、标准丛、嵌入

## 一. 引　言

为简便起见，本文用$M$表示 CR 流形及其局部领域.

抽象的 CR 流形是指偶对 $(M, V)$，其中$M$是 $2m+d$ 维光滑实流形，$V$是 $CTM$ 的复子丛，满足：

(1) $V \cap \bar{V} = \{0\}$, $\dim_c V_p = m \quad \forall p \in M$,

(2) $[V, V] \subset V$,

此处$V$称为$M$的 CR 结构.

如果在局部的嵌入 $\phi: M \to \mathbb{C}^{m+d}$，使得

$\phi_*(V) \subset \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{m+d}}\right\}$，则称$M$是可局部嵌入的或CR结构$V$是可积的，这里$(z_1, \cdots, z_{m+d})$ 是 $\mathbb{C}^{m+d}$ 的复坐标.

抽象 CR 结构的嵌入是 CR 流形研究中的一个重要问题. 对超曲面型的情况（即 $d=1$），Kuranishi[1]的深刻结果指出任何 9 维以上的严格伪凸 CR 流形总是局部可嵌入的. 最近，Akahori[2] 将其结果改进为 7 维以上的严格伪凸 CR 流形总是局部可嵌入的. Nirenberg[3] 给出一个 3 维 CR 流形不可嵌入的例子，剩下 5 维情况是一个未解决的问题. Jacobowitz 在文献[4]中得到了一些超曲面型 CR 结构可嵌入性的结果(包括 5 维的情况). 直到现在，对高余维的情况(即 $d>1$)还几乎没有什么结果发表，本文将文献[4]的某些结果推广到高余维的情况.

## 二、标　准　丛

设 $(M, V)$ 是抽象的 CR 流形，$\{L_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ 是$V$的局部基，方程组:

$$L_j h = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m \qquad (*)$$

称为切向的 Cauchy-Riemann 方程，满足(*)式的函数称为 CR 函数，显然我们有

**命题 2.1**　$(M, V)$ 局部可嵌入的充要条件是(*)式存在 $m+d$ 个局部独立的解.

**证**　设(*)式存在局部独立解 $\phi_1, \cdots, \phi_{m+d}$，则命 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_{m+d}): M \to \mathbb{C}^{m+d}$ 是局部嵌入映射，设 $(z_1, \cdots, z_{m+d})$ 是 $\mathbb{C}^{m+d}$ 的坐标，那么：$\phi_*(L_j) z_k = L_j(z_k \circ \phi) = L_j(\phi_k)$

本文 1988 年 11 月 10 日收到.
* 国家自然科学基金资助项目.

$=0, 1 \leqslant j \leqslant m,\ 0 \leqslant k \leqslant m+d$. 所以 $\phi_*(L_j) = \sum_{k=1}^{m+d} a_j^k(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$, 因此 $(M, V)$ 是局部可嵌入的. 命题的必要性更为显然.

今用 $\Lambda^p(M)$、$\Lambda_c^p(M)$ 分别表示$M$上的实、复$p$次外形式，设$\mathscr{D}$是 $M$ 上的$q$维分布，$\omega \in \Lambda_c^p(M)$ 称为在 $m \in M$ 零化 $\mathscr{D}$,如果对任何 $X_1, \cdots, X_p \in \mathscr{D}$, 有 $\omega(X_1, \cdots, X_p)(m) = 0$, 如果$\omega$在$M$上每点都零化 $\mathscr{D}$,称$\omega$在$M$上零化 $\mathscr{D}$. 命 $\Lambda_c(M) = \bigoplus_p \Lambda_c^p(M)$, 如 $\omega \in \Lambda_c(M)$ 零化 $\mathscr{D}$ 是指$\omega$的每个齐次部分零化 $\mathscr{D}$.

令$\mathscr{T}(V) := \{\omega \in \Lambda_c(M) \mid \omega$ 零化 $V\}$,则存在 $m+d$ 个独立的1形式 $\omega^1, \cdots, \omega^{m+d}$,在 $\Lambda_c(M)$ 中生成 $\mathscr{T}(V)$, 而且 $\mathscr{T}(V)$ 是一个微分理想[3].

$(M, V)$ 上的标准丛 $K^p := \{\Omega \in \Lambda_c^p(M) \mid i_L\Omega = 0,\ \forall L \in V\}$, $1 \leqslant p \leqslant m+d$, 则显然 $K^p$ 是由 $\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p} \mid_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant m+d}\}$ 所生成的 $C^\infty(M)$-模. 反之, CR 结构也可写为: $V = \{L \in \mathbf{C}TM \mid i_L\Omega = 0,\ \forall \Omega \in K^p\}$, 则下面的命题是等价于命题 2.1.

**命题 2.2** $(M, V)$ 局部可嵌入的充要条件是 $\mathscr{T}(V)$ 中存在一组闭的生成元，即有1形式: $w^1, \cdots, w^{m+d}$ 生成 $\mathscr{T}(V)$, 且 $dw^\alpha = 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m+d$.

## 三、主要结果及其证明

Jacobowitz 在文献 [4] 中给出超曲面型 CR 流形的局部可嵌的充要条件为存在$M$上的向量场 $Y \notin V \oplus \bar{V}$, 使的 $\mathscr{L}_Y V \subset V$, 此处 $\mathscr{L}_Y$ 表示 Lie 导数. 本文对高余维的情况得到:

**定理 3.1** $(M^{2m+d}, V)$ 局部可嵌入的充要条件存在$d$个独立的向量场 $Y_k$, $1 \leqslant k \leqslant d$, 满足: $Y_k \notin V \oplus \bar{V}$, $\mathscr{L}_{Y_k} V \subset V$, $[Y_j, Y_k] = 0\ \forall 1 \leqslant j, k \leqslant d$.

**证** 设 $(M, V)$ 可嵌入,不失一般性,可认为$M$在 $\mathbf{C}^{m+d}$ 的原点附近,而且 $0 \in M$, 且有: $V|_{z=0} = \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_0, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}\Big|_0\right\}$. 现在 $(z_1, \cdots, z_{m+d})$ 为 $\mathbf{C}^{m+d}$ 的复坐标,由于 $d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_m \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m \wedge dz_{m+1} \wedge \cdots \wedge dz_{m+d}$ 在 $z=0$ 附近是$M$上的非零形式, 故存在$d$个独立的向量场 $Y_k$, $1 \leqslant k \leqslant d$, 使得: $dz_{m+l}(Y_k) = \delta_k^l$, $dz_j(Y_k) = d\bar{z}_j(Y_k) = 0$, $1 \leqslant l, k \leqslant d$, $1 \leqslant j \leqslant m$, 显然, $\{Y_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ 在 $z=0$ 附近独立, 且 $Y_k \notin V \oplus \bar{V}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. 事实上可取 $Y_k = \frac{\partial}{\partial z_{m+k}}\Big|_M$, $1 \leqslant k \leqslant d$, 则 $[Y_j, Y_k] = 0$, $1 \leqslant j, k \leqslant d$. 最后来证明 $\mathscr{L}_{Y_p} V \subset V$,现在 $\{dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}|_M\}$构成标准丛 $K^p$ 的一组基,而且它们都是闭的,今用 $\Omega^{i_1,\cdots,i_p} = dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}|_M$, $1 \leqslant p \leqslant m+d$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m+d$. 显然 $i_{Y_k}\Omega^{i_1,\cdots,i_p}$ 仍是闭的, 因此:

$$\mathscr{L}_{Y_k}\Omega^{i_1,\cdots,i_p} = d i_{Y_k}\Omega^{i_1,\cdots,i_p} + i_{Y_k} d\Omega^{i_1,\cdots,i_p} = 0.$$

由此可知对任何 $\Omega \in K^p$, $\mathscr{L}_{Y_k}\Omega \in K^p$,再由恒等式: $\mathscr{L}_{Y_k} i_L \Omega = i(\mathscr{L}_{Y_k}L)\Omega + i_L \mathscr{L}_{Y_k}\Omega$, $\forall L \in V$, $\Omega \in K^p$, 得到 $i(\mathscr{L}_{Y_k}L)\Omega = 0$, 因此 $\mathscr{L}_{Y_k}L \subset V$, $\forall L \in V$.

反之,我们考虑 $M \times \mathbf{R}^d$, 设 $(x_1, \cdots, x_d)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的坐标,将$V$及 $\{Y_k\}_{1\leqslant k\leqslant d}$ 视为 $M \times \mathbf{R}^d$ 上的与 $(x_1, \cdots, x_d)$ 无关的复切丛与向量场, 令 $Z_k = Y_k + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant d$, 再命: $W = V \oplus \left\{\sum_{j=1}^d f_j Z_j,\ f_j \in C^\infty(M \times \mathbf{R}^d)\right\}$, 易知有 $W \cap \bar{W} = \{0\}$,因此$W$给出 $M \times \mathbf{R}^d$ 上

的一个概复结构，由 $\mathscr{L}_{Y_k}V\subset V$，及 $V$ 和 $\{Y_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ 独立于 $(x_1,\cdots,x_d)$，不难验证 $[W,W]\subset W$，这说明此概复结构可积，由 Newlander-Nirenberg 定理[6]，$M\times\mathbb{R}^d$ 上存在唯一由 $W$ 诱导的复结构，取 $V$ 的局部基 $\{L_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$，则存在全纯坐标 $z_1,\cdots,z_{m+d}$，使得：$L_j=\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_j}$，$1\leqslant j\leqslant m$，$Z_k=\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_{m+k}}$，$1\leqslant k\leqslant d$，命 $\phi_k=z_k|_M$，$1\leqslant k\leqslant m+d$，由命题 2.1，$(M,V)$ 是局部可嵌入的。

用 $\mathrm{CR}(M)$ 表示 $M$ 上的 CR 函数所组成的空间，$\{Y_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ 为定理 3.1 中的向量场，用 **F** 表示 $Y_1,\cdots,Y_d$ 作为生成元的 $\mathrm{CR}(M)$-模，则我们有：

**系** 若 $(M,V)$ 可局部嵌入，那么有

(1) 对每个 $X\in\mathbf{F}$，对应有 $\phi_X:\mathrm{CR}(M)\to\mathrm{CR}(M)$ 的线性变换，其定义为 $\phi_X(f)=Xf$，$f\in\mathrm{CR}(M)$。

(2) 对任何 $X\in\mathbf{F}$，$X\neq 0$，当 $M$ 为解析时，$\mathscr{L}_XV=V$。

**证** 因为对每个 $L\in V$，$\mathscr{L}_XL\subset V$，则对每个 $f\in\mathrm{CR}(M)$，$L(Xf)=X(Lf)-(\mathscr{L}_XL)f=0$。因此 $Xf\in\mathrm{CR}(M)$，故(1)成立。

为证(2)，我们只要证明对 $\forall L'\in V$，存在 $L\in V$，使 $\mathscr{L}_XL=L'$。取 $V$ 的基为 $L_1,\cdots,L_m$，那么：$L=\sum_{k=1}^m f_kL_k$，$L'=\sum_{k=1}^m g_kL_k$，$\mathscr{L}_XL_k=\sum_{l=1}^m C_k^lL_l$。因此，$\mathscr{L}_XL=L'$，等价于方程组

$$Xf_k+\sum_{l=1}^m f_lC_k^l=g_k,\quad k=1,\cdots,m.$$

当 $M$ 是实解析时，此方程组必有解。

下面的定理也是属于 Jacobowitz。

**定理** $(M^{2m+1},V)$ 是可嵌入的，若 $M$ 上存在 $m$ 个强独立的 CR 函数，且标准丛 $K^{m+1}$ 具有非零的闭截面。

这里 $\phi_j$，$1\leqslant j\leqslant m$ 称为 $m$ 个强独立的 CR 函数是指：$d\phi_1\wedge\cdots\wedge d\phi_m\wedge d\bar{\phi}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{\phi}_m\neq 0$。

现在我们考虑高余维的情况。命 $Y_c(M)=\dfrac{CTM}{V\oplus\bar{V}}$，则 $\mathscr{T}(V\oplus Y_c(M))$ 中存在 $m$ 个独立的 1 形式 $w^1,\cdots,w^m$，生成 $\mathscr{T}(V\oplus Y_c(M))$，显然 $\bar{w}^1,\cdots,\bar{w}^m$ 生成 $\mathscr{T}(\bar{V}\oplus Y_c(M))$。命 1 形式 $\theta^1,\cdots,\theta^d$ 为 $\mathscr{T}(V\oplus\bar{V})$ 的生成元，则 $w^1,\cdots,w^m$，$\bar{w}^1,\cdots,\bar{w}^m$，$\theta^1,\cdots,\theta^d$ 是 $CT^*M$ 的局部基。若我们进一步假设：$V\oplus Y_c(M)$ 是 Frobenius 可积的，那么存在 1 形式 $(w_\beta^\alpha)$ 使得

$$dw^\alpha=\sum_{\beta=1}^m w_\beta^\alpha\wedge w^\beta,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant m.$$

**定理 3.2** 若 $V\oplus Y_c(M)$ 是 Frobenius 可积，且存在 1 形式 $(h_\beta^j)$ 使得：$d\theta^j=\sum_{\beta=1}^m h_\beta^j\wedge w^\beta$，$1\leqslant j\leqslant d$。那么 $(M,V)$ 是可嵌入的。

**证** 考虑 $\{\theta_j\}$ 的对偶向量场 $\{Y_j\}$，则 $Y_j\notin V\oplus\bar{V}$，$j=1,\cdots,d$，对每个 $L\in V$，由假设：

$$\theta^j(\mathscr{L}_{Y_k}L)=d\theta^j(Y_k,L)-Y_k\theta^j(L)+L\theta^j(Y_k)=0.$$

$$w^\alpha(\mathscr{L}_{Y_k}L) = dw^\alpha(Y_k, L) - Y_k w^\alpha(L) + L w^\alpha(Y_k) = 0,$$

对 $1 \leqslant j,k \leqslant d$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$ 成立,故 $\mathscr{L}_{Y_k}L \subset V$; 另一方面,设

$$[Y_j, Y_k] = \sum_{i=1}^{d} a_{jk}^i Y_i + \sum_{\alpha=1}^{m} b_{jk}^\alpha L_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} C_{jk}^\beta \bar{L}_\beta,$$

这里 $L_1, \cdots, L_m$ 为 $V$ 的一组基对偶于 $w^1, \cdots, w^m$. 则有

$$a_{jk}^i = \theta^i([Y_j, Y_k]) = d\theta^i(Y_j, Y_k) = 0,$$
$$b_{jk}^\alpha = w^\alpha([Y_j, Y_k]) = dw^\alpha(Y_j, Y_k) = 0,$$
$$c_{jk}^\beta = \bar{w}^\beta([Y_j, Y_k]) = d\bar{w}^\beta(Y_j, Y_k) = 0.$$

所以 $[Y_j, Y_k] = 0$, $1 \leqslant j, k \leqslant d$, 由定理 3.1, $(M, V)$ 是可嵌入的.

注. 定理 3.2 的条件比 Jacobowitz 的定理弱,因为若 $\phi_1, \cdots, \phi_m$ 是 Jacobowitz 定理中的强独立 CR 函数,由文献[4], 存在 1 形式 $\theta$ 使得 $\theta \wedge d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_m$ 是 $K^{m+1}$ 的非零截面,因为 $K^{m+1}$ 具有一个闭的非零截面 $\Omega$, 取 $f \neq 0$ 使得

$$f\theta \wedge d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_m = \Omega, \text{ 置 } \tilde{\theta} = f\theta,$$

得到

$$d\hat{\theta} \wedge d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_m = 0.$$

因此,$d\tilde{\theta} = \sum_{\alpha=1}^{m} g_\alpha \wedge d\phi_\alpha$, 取非零向量场 $Y$,使得 $Y \notin V \oplus \bar{V}$,且 $d\phi_\alpha(Y) = 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$, 令 $w^\alpha = d\phi_\alpha$, 则 $w^1, \cdots, w^m$ 是 $\mathscr{T}(V \oplus Y_c(M))$ 的生成元,且

$$d\tilde{\theta} = \sum_{\alpha=1}^{m} g_\alpha \wedge w^\alpha.$$

这说明定理 3.2 的条件在 $d = 1$ 的情况下要比 Jacobowitz 定理弱.

## 参　考　文　献


[1] Kuranishi, M., *Ann. of Math.*, 116(1982), 249—330.
[2] Akahori, T., *Comtempoprary Mathematics*, 49(1986), 1—10.
[3] Nirenberg, L., *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1973.
[4] Jacobowitz, H., *Pacific J. Math.*, 127(1987), 1: 91—101.
[5] Warner, F., *Graduate Texts in Math.*, Vol. 94, Springer-Verlag.
[6] Newlander, A., Nirenberg, L., *Ann. of Math.*, 65(1957), 2:391—404.