



脉冲星计时模型参数的测量精度分析与估计

童明雷^{1,2*}, 杨廷高^{1,2}, 赵成仕^{1,2}, 高玉平^{1,2}

1. 中国科学院国家授时中心, 西安 710600;

2. 中国科学院时间频率基准重点实验室, 西安 710600

* 联系人, E-mail: mlton@ntsc.ac.cn

收稿日期: 2016-10-30; 接受日期: 2017-01-03; 网络出版日期: 2017-06-14

国家自然科学基金(编号: U1531112, 11103024, 11373028, 11403030)、中国科学院“西部之光”青年学者A(XAB2015A06)项目和陕西省青年科技新星项目(编号: 2015KJXX-56)资助

摘要 脉冲星计时模型参数的精确测定是脉冲星计时应用的基础. 脉冲星计时模型包含几何的、物理的、轨道的等各种效应. 我们主要分析了一些位置、自行、视差等几何效应的误差以及双星轨道模型误差引起的计时残差. 本文将地球公转视为椭圆轨道, 在黄道坐标系里得到了一般性的结论. 基于此, 我们给出了估计这些模型参数理论测量精度的解析表达式, 得到了一些模型参数测量精度对黄纬的依赖关系. 尤其是对于视差测量精度的估计, 得到了与以前的工作显著不同的结果, 这对于实际观测中脉冲星的选择具有参考意义.

关键词 脉冲星, 计时模型, 椭圆轨道, 解析模型, 测量误差

PACS: 97.60.Gb, 95.75.Wx, 95.10.Jk

1 引言

自转稳定的脉冲星被誉为自然界的天然时钟, 如果人们要有效地利用这种时钟, 首先需要用地球上的望远镜来接收信号并由原子钟记录这些脉冲星信号的到达时间(TOA). 然而脉冲星距离地球非常遥远, 脉冲星的脉冲信号在传播到地球的过程中经历了各种物理过程和几何效应, 如星际介质的色散、引力场的影响、地球的运动等, 这需要建立精确的脉冲星计时模型, 将脉冲星时同地球时联系起来. 脉冲星计时模型参数主要包括脉冲星的自转频

率、自转频率一阶导数、位置、自行、视差、双星轨道参数以及星际介质模型参数等. 根据TOA的观测数据, 结合最小二乘算法, 可以精确测定脉冲星计时模型参数. 反过来, 这些参数的精确测量又可以在太阳系质心(SSB)处精确预报TOA, 这是脉冲星自主导航应用的基本前提. 脉冲星计时模型参数的精确测定也是脉冲星计时应用的基础. 脉冲星计时可用于探测低频引力波^[1,2], 可以建立脉冲星时间尺度^[3,4], 可以测量太阳系行星质量^[5], 未来还可用于深空自主导航^[6,7].

本文将从理论上分析脉冲星计时模型参数误差

引用格式: 童明雷, 杨廷高, 赵成仕, 等. 脉冲星计时模型参数的测量精度分析与估计. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 099503
Tong M L, Yang T G, Zhao C S, et al. Analyses and estimates on measurement precisions of model parameters in pulsar timing (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 099503, doi: [10.1360/SSPMA2016-00462](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00462)

产生的计时残差, 将地球轨道视为椭圆轨道, 在黄道坐标系里得到各计时模型参数误差产生的计时残差的解析表达式. 在此基础上估计各脉冲星计时模型参数的测量精度, 并给出一般性的解析表达式. 当然, 脉冲星计时过程中还会有各种各样的噪声, 例如观测白噪声, 自转不稳定和星际介质引起的红噪声, 引力波背景等, 但这些不在本文讨论的范围.

2 脉冲星计时模型

通过对毫秒脉冲星的周期及其一阶导数的高精度测量, 可以建立脉冲星钟模型, 来预报第 N 个脉冲的发射时间^[1]:

$$t_N = t_0 + NP_0 + \frac{1}{2}N^2\dot{P}_0P_0 + \frac{1}{6}N^3\ddot{P}_0P_0^2, \quad (1)$$

其中, t_N 和 t_0 均为脉冲星时, t_0 为参考历元, P_0 是脉冲星在 t_0 时刻的自转周期, \dot{P}_0 和 \ddot{P}_0 分别是 t_0 时刻周期的一阶和二阶导数. 基于此, 可以在任何位置预报第 N 个脉冲的到达时间(TOA), 只要再考虑相应的修正项即可. 例如, 预报脉冲达到太阳系质心(SSB)的时间, 则需要考虑星际介质的色散(DM)及其变化(DM(t))引起的修正项, Shklovskii效应, 狭义相对论时间膨胀效应等. 如果是脉冲星位于双星系统中, 则还要考虑双星轨道模型修正. 脉冲星计时过程中通常用相位来预报, 其相位可泰勒展开为

$$\phi(t) = \phi_0 + \nu(t - t_0) + \frac{1}{2}\dot{\nu}(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\ddot{\nu}(t - t_0)^3, \quad (2)$$

其中 ϕ_0 , ν , $\dot{\nu}$ 和 $\ddot{\nu}$ 分别是 t_0 时刻脉冲星的自转相位、频率、频率一阶导数和频率二阶导数. 而计时残差可表示为^[8]

$$R(t) = \frac{\phi(t) - N(t)}{\nu}, \quad (3)$$

其中 $N(t)$ 是距离 $\phi(t)$ 最近的整数. 如果脉冲星自转变慢是由磁偶极辐射导致的, 那么制动指数

$$n = \frac{\nu\dot{\nu}}{\nu^2} \quad (4)$$

应该等于3. 然而对大多数脉冲星, 将根据实测数据得到的 ν , $\dot{\nu}$ 和 $\ddot{\nu}$ 代入上式, 结果往往偏离3很大. 另一方面, $\dot{\nu}$ 的测量相对误差也比 ν 和 $\ddot{\nu}$ 的大得多^[9]. 因而,

对大多数毫秒脉冲星而言, 通常将 ν 或 P_0 的二阶导数及以上都当作噪声来处理.

脉冲星的脉冲从发射到被地面上的射电望远镜接收到, 经历了一系列的物理过程和几何效应的影响, 包括引力场的影响、星际介质的影响、视差效应、地球的公转和自转、双星的相互绕转(对于双星系统而言)、原时与坐标时的转换等. 针对上述这些效应的影响, 目前已经建立了比较好的数学模型来描述脉冲发射时刻 t_p (由式(3)给出)与望远镜接收时刻 t_{obs} (测站原子钟记录的时间)之间的关系^[8]:

$$\begin{aligned} t_p = t_{\text{obs}} + \Delta t_c + \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2cR_0} \left[r^2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})^2 \right] \\ - \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\Delta t + \frac{1}{cR_0} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})]\Delta t \\ - \frac{1}{2cR_0} \left[v^2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^2 \right] \Delta t^2 \\ - \frac{1}{2cR_0^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}) \left[v^2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})^2 \right] \Delta t^2 \\ - \frac{1}{cR_0^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})] \Delta t^2 \\ + \sum_{k=1}^l \frac{2GM_k}{c^3} \ln |\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_k + r_k| \\ - \frac{4G^2M_\odot^2}{c^5 r_\odot \tan \psi \sin \psi} - \frac{D}{f^2} - \Delta_B, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, Δt_c 包括计时观测参考原子钟到地球时TT的改正和TT到质心坐标时TCB的改正, 即包括参考原子钟的钟差改正和爱因斯坦时间延迟. c 是光速, $\hat{\mathbf{n}}$ 是脉冲星在(太阳系)质心坐标系的单位矢量, \mathbf{r} 是观测时刻望远镜相对于太阳系质心的位置矢量, \mathbf{v} 是脉冲星相对于太阳系质心速度矢量, $\Delta t = t - t_0$, 即观测时刻与参考历元差值. R_0 是参考历元脉冲星相对于太阳系质心的距离. G 是牛顿引力常数, M_k 是第 k 个太阳系天体的质量, \mathbf{r}_k 是在观测时刻望远镜相对于第 k 个太阳系天体的位置矢量, r_k 是 \mathbf{r}_k 的模, l 是计算Shapiro延迟采用的太阳系主要天体数量. r_\odot 是观测时刻望远镜到太阳的距离, M_\odot 是太阳质量, ψ 是太阳和脉冲星在观测时刻相对望远镜的张角. D 是色散常数, f 是观测的电磁脉冲的频率. Δ_B 是脉冲双星轨道运动延迟改正, 包括Roemer延迟、Shapiro延迟、Einstein延迟和光行差延迟改正

等^[10,11]. 式(5)中第3项是零阶Roemer延迟, 第4项是视差引起的延迟, 第5项脉冲星的径向速度引起的延迟, 第6项是一阶Roemer延迟, 第7项是Shklovski效应, 第8项和第9项是二阶Roemer延迟, 第10项和第11项分别代表一阶Shapiro延迟和二阶Shapiro延迟, 第12项代表星际介质的色散延迟. 公式(5)中, 各距离参数由太阳系行星历表和地球质心历表得到. 脉冲星在参考历元 t_0 的自转参数(自转相位 ϕ_0 、自转频率 ν 及其导数 $\dot{\nu}$)、天体测量参数(赤经、赤纬、自行、视差)和双星轨道参数等是待拟合参数. 本文比文献^[12]多出来的两项(第8项和第9项)实际是对第7项的高阶修正, 该两项与第7项之比约为 r/R_0 . 将脉冲星的特征距离 $R_0 \sim \text{kpc}$ 代入可得, $r/R_0 \sim 10^{-9}$. 因而这两项的贡献基本可忽略或者用迭代算法计算.

式(5)是脉冲星计时观测方程的一般数学模型, 对于更加精确的模型, 还应当包括地球大气的影响、太阳系质心坐标时到双星质心坐标时的转换等引起的时间延迟项^[8]. 由于后面我们讨论模型参数误差的影响时不涉及这些项, 因此本文中暂不考虑这些项的贡献. 由于地球的公转, 在地球上观测脉冲星会受到多普勒效应的影响, 因此通常将地球上观测到的TOA序列转换到一个较好准惯性系SSB, 而由式(5)可以给出在SSB处理论预报的TOA序列, 二者之差称为计时残差. 存在计时残差的原因有很多, 例如模型误差、观测白噪声、计时红噪声、引力波、历表误差、原子钟钟差等. 下面我们主要讨论脉冲星天体测量参数误差与双星轨道参数误差与计时残差的关系, 分析其特征并评估其大小.

3 脉冲星天体测量参数误差引起的计时残差

我们知道脉冲星的自转频率误差会使得计时残差呈线性变化, 而自转频率一阶导数的误差将使脉冲星计时残差呈抛物线变化. 这一点数学上很好解释, 由式(2)和(3)容易得到: ν 的测量误差将引起 $\frac{\partial \nu}{\nu}(t - t_0)$ 的额外计时残差; 而 $\dot{\nu}$ 的测量误差将引起 $\frac{\partial \dot{\nu}}{2\nu}(t - t_0)^2$ 的额外计时残差. 而其他参数误差引起的计时残差也各有不同的、可识别的特征. 下

面我们分析一下天体测量参数误差的影响, 包括位置误差、自行误差和视差误差. 与文献^[12]中的圆轨道近似不同, 我们将地球绕SSB的周年运动轨道视为更符合实际的椭圆轨道, 而轨道偏心率 $e = 0.0167$.

3.1 位置误差的影响

脉冲星某时刻的位置矢量 \hat{n} 的测量精度是非常重要的. 式(5)中, 很多项都含有 \hat{n} , 但零阶Roemer延迟项 $(\hat{n} \cdot \mathbf{r})/c$ 要远远大于其他项, 该项与脉冲星的方向矢量以及测站相对于SSB的位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{r}_E$ 有关, 其中 \mathbf{s} 是测站到地心的位置矢量, 而 \mathbf{r}_E 是地心相对于SSB的位置矢量. 显然 $(\hat{n} \cdot \mathbf{s})/c$ 是周日变化的, 且其大小要比 $(\hat{n} \cdot \mathbf{r}_E)/c$ 小5个量级, 因此我们主要考虑TOA从地心到SSB的转换, 即Roemer延迟项近似写为

$$\Delta_R = -\frac{\hat{n} \cdot \mathbf{r}_E}{c}. \quad (6)$$

在某一参考历元 t_0 , 脉冲星的方向矢量在黄道坐标系可表示为

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 \cos \beta_0 \\ \sin \lambda_0 \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

一般形式的椭圆轨道方程为

$$r_E = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi}, \quad (8)$$

其中 ψ 为真近点角. 上式也可由偏近点角表示为

$$r_E = a(1 - e \cos u), \quad (9)$$

其中 a 为轨道半长轴, 即日地平均距离1 AU. e 为轨道偏心率, u 为偏近点角且满足如下关系:

$$u - e \sin u = \omega_0 t, \quad (10)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{GM/a^3}$ 为平均角速度. 严格来说, M 为太阳系总质量, 可以用太阳质量来近似代替. 容易得到地心在黄道坐标系的位置矢量

$$\mathbf{r}_E = \begin{pmatrix} a(\cos u - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

将式(7)和(11)代入式(6), 并考虑到轨道偏心率 $e = 0.0167$ 为小量, 可得

$$\Delta_R = -\frac{a}{c} \cos \beta_0 \cos(u - \lambda_0) + \frac{ae}{c} \cos \lambda_0 \cos \beta_0 + \frac{ae^2}{2c} \sin u \sin \lambda_0 \cos \beta_0. \quad (12)$$

若 $e = 0$, 上式化为圆轨道的情况, 即只有第一项 [12]. 相对于圆轨道, 上式中多出来的后两项分别是基于偏心率的一阶(常数项)和二阶修正(周期项). 按量级估计, 后两项比第一项分别小2个和4个量级. 下面的讨论中, 我们只保留 e 的线性项.

下面我们看一下黄经和黄纬的采用值误差导致的计时残差. 以 λ_0 和 β_0 为变量, 对(12)式作变分, 得

$$\delta \Delta_R = -\frac{a}{c} [\cos \beta_0 \sin(u - \lambda_0) + e \cos \beta_0 \sin \lambda_0] \delta \lambda_0 + \frac{a}{c} [\sin \beta_0 \cos(u - \lambda_0) - e \sin \beta_0 \cos \lambda_0] \delta \beta_0. \quad (13)$$

可见, 黄经或黄纬误差会导致的计时残差具有周期性, 周期为1年. 相对于圆轨道的情况, 无论是黄经误差还是黄纬误差都多了一个正比于 e 的常数修正项. 若不考虑脉冲星自行的影响, 对于地球公转圆轨道而言, 在一个周期里的平均计时残差为零; 而对于椭圆轨道, 在一个周期里的平均计时残差为一正比于 e 的常数项, 不为零. 但从测量的角度来讲, 常数项没有意义, 会被吸收到脉冲星自转初相位中. 因此, 椭圆轨道的情况与圆轨道的情况就脉冲星的位置测量而言, 除了周期振荡方式稍有不同, 其他并无差别.

3.2 自行误差的影响

脉冲星相对于太阳系并不是静止不动的, 它有其本征运动, 垂直于视线方向的运动就会产生自行. 于是, 某一时刻的脉冲星方向矢量可以写为

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_0 + \mu_\lambda \Delta t) \cos(\beta_0 + \mu_\beta \Delta t) \\ \sin(\lambda_0 + \mu_\lambda \Delta t) \cos(\beta_0 + \mu_\beta \Delta t) \\ \sin(\beta_0 + \mu_\beta \Delta t) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中 $\Delta t = t - t_0$. 这里需要指出的是, 文献[12]里的式(10)给出的脉冲星方向矢量有误. 将式(14)代替

式(7), 然后重复上一小节的计算, 并以 μ_λ 和 μ_β 为变量作变分得

$$\delta \Delta_R = -\frac{a}{c} [\cos \beta_0 \sin(u - \lambda_0) + e \cos \beta_0 \sin \lambda_0] \Delta t \delta \mu_\lambda + \frac{a}{c} [\sin \beta_0 \cos(u - \lambda_0) - e \sin \beta_0 \cos \lambda_0] \Delta t \delta \mu_\beta. \quad (15)$$

类似于位置误差的情况, 自行误差也多出来一项, 但这次是正比于 e 的线性项, 随着时间的累积线性增加. 从测量的角度来讲, 线性项同样无意义, 因为会被吸收到脉冲星自转频率的拟合中. 因此, 对于脉冲星自行的测量, 椭圆轨道的情况和圆轨道的情况也是相同的.

3.3 视差误差的影响

下面我们讨论一下脉冲星的视差误差对计时残差的影响. 由式(5), 视差延迟项为

$$\Delta_p = \frac{1}{2cR_0} \left[r_E^2 - (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_E)^2 \right]. \quad (16)$$

上式由脉冲星的视差 $\pi = a/R_0$ 可重新写为

$$\Delta_p = \frac{\pi}{2ca} \left[r_E^2 - (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_E)^2 \right]. \quad (17)$$

上式对 π 作变分可最终简化为

$$\delta \Delta_p = \frac{a}{4c} (2 - \cos^2 \beta_0) \delta \pi - \frac{a}{4c} \cos^2 \beta_0 \cos(2u - 2\lambda_0) \delta \pi - \frac{ae}{c} \cos u \delta \pi + \frac{ae}{c} \cos^2 \beta_0 \cos \lambda_0 \cos(u - \lambda_0) \delta \pi, \quad (18)$$

其中, 第1项是常数项, 第2项为半周年项, 而第3项和第4项是为正比于 e 的周年项. 对于圆轨道的情况是没有周年项的. 注意, 式(18)中的半周年项是视差误差的主要特征, 而周年项会被吸收到位置参数的拟合中, 这一点从式(13)不难看出. 这会影响位置参数和视差参数的拟合结果, 造成脉冲星位置与视差参数的偏离. 因此对于这种存在相关性的两个参数, 不能单独分析. 后面, 还将进一步讨论相关性参数的拟合问题. 在实际的数据处理中, 地球质心相对于SSB的位置是采用DE系列历表的值, 地球的公转轨道是椭圆的. 因此在做模型分析时不宜采用圆轨道, 而应该采用更符合实际的椭圆轨道. 图1是利用

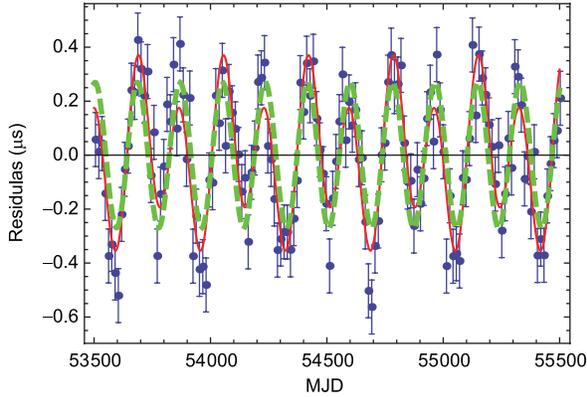


图 1 (网络版彩图)脉冲星J0437-4715的视差误差引起的计时残差模拟数据与解析模型比较. 纵坐标是计时残差, 以微秒为单位, 横坐标是简约儒略日(MJD). 圆点和误差棒是脉冲星J0437-4715的模拟计时残差及100 ns观测误差. 绿色虚线代表圆轨道情况的解析模型, 而红色实线代表椭圆轨道情况的解析模型

Figure 1 (Color online) The comparison of timing residuals of pulsar J0437-4715 induced by the parallax error for the simulated data and the analytic model. The vertical axis stands for the timing residuals with unit of microsecond, and the horizontal axis presents the Modified Julian Day (MJD). The points and the error bars mean the simulated timing residuals of pulsar J0437-4715 and the observational errors with amplitudes of 100 ns, respectively. The green dashed line stands for the analytic model of the case of the circular orbit, and the red solid line stands for the analytic model of the case of the elliptical orbit.

Tempo2模拟脉冲星J0437-4715视差误差引起的计时残差和根据圆轨道模型、椭圆轨道模型计算结果的比较. 模拟数据中的计时残差含有均方根为100 ns的白噪声. 显然椭圆轨道模型的结果与模拟数据符合得更好一些.

通过比较式(18)中的第2项和第3项的振幅可知, 当 $\beta_0 < 75^\circ$ 时, 半周年项起主导作用; 而当 $|\beta_0| > 75^\circ$ 时, 周年项起主导作用. 因此这里直接得到与圆轨道情况不同的一个结论: 当 $|\beta_0| \sim 90^\circ$ 时, 视差误差引起的计时残差不为0, 而是以 $ae\delta\pi/c$ 为振幅的周年项. 图2比较了圆轨道情况视差误差产生的计时残差和椭圆轨道情况视差误差产生的计时残差, 其中黄纬取为 $\beta_0 = 84^\circ$, 黄经取为 $\lambda_0 = 30^\circ$. 注意, 黄经的取值比较任意, 因为它只影响相位, 并不影响幅值. 从图2可以看出, 椭圆轨道的情况比圆轨道情况的残差幅值大了约8倍. 而且如果黄纬更高, 那么这两者之间的差别会更大. 另外, 由图2所示, 椭圆轨道情况的

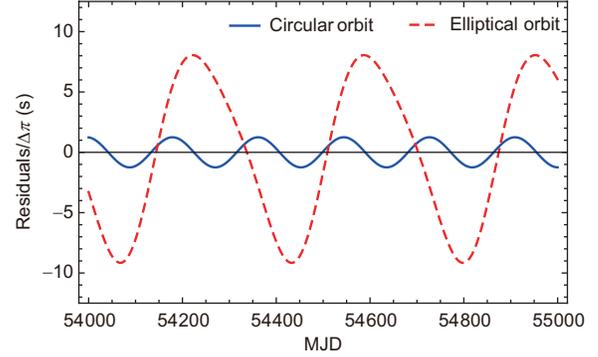


图 2 (网络版彩图)解析模型中单位视差误差引起的计时残差. 蓝色实线代表圆轨道的情况, 而红色虚线代表椭圆轨道的情况. 其中, 黄纬均取为 $\beta_0 = 84^\circ$, 黄经均取为 $\lambda_0 = 30^\circ$

Figure 2 (Color online) The timing residuals per unit parallax errors induced by in the analytic models. The blue solid line stands for the case of circular orbit, and the red dashed line stands for the case of elliptical orbit. The ecliptic latitude was chosen to be $\beta_0 = 84^\circ$ and the ecliptic longitude was chosen to be $\lambda_0 = 30^\circ$ for both cases.

残差主要呈现周年项, 而圆轨道情况的残差为半周年项.

4 双星轨道模型误差的影响

由于大多数毫秒脉冲星都处于双星系统中, 其伴星一般为致密星. 对于脉冲双星系统, 需要将脉冲星固有时转换到脉冲双星质心时, 这需要精确的双星轨道模型. 为避免公式过于冗长, 我们在式(5)中没有具体写出双星轨道延迟 Δ_B 的具体形式, 这里简单说明一下. 双星轨道延迟改正包括以下4部分 [8]:

$$\Delta_B = \Delta_{RB} + \Delta_{EB} + \Delta_{SB} + \Delta_{AB}. \quad (19)$$

式中前3项分别表示双星系统中的几何Roemer延迟、爱因斯坦延迟和Shapiro延迟. 而相对于太阳系, 多出来的一项 Δ_{AB} 表示光行差效应引起的延迟. Δ_B 主要由Roemer延迟引起 [13], 是脉冲星轨道参数的函数. 而Roemer延迟的主项又可表示为 [8]

$$\Delta_{RB} \approx \frac{x}{c} \left[\sin \omega (\cos E - e_p) + \sqrt{1 - e_p^2} \cos \omega \sin E \right], \quad (20)$$

其中 x 是轨道半长轴在垂直于视线方向平面的投影, ω 为近星点的辐角(以轨道升交点为起点). 为避免混淆, 我们用 e_p 表示双星轨道偏心率, 用 E 表示偏近点角. 在一阶近似下, Δ_{RB} 的误差主要来源于5个开普

勒参数的误差^[13]:

$$\delta\Delta_{\text{RB}} = \sum_p \frac{\partial\Delta_{\text{RB}}}{\partial p} dp. \quad (21)$$

上式是对所有开普勒轨道参数求和, $p = \{x, \omega, e_p, P_b, T_0\}$. 这里 P_b 和 T_0 分别表示轨道周期和近星点的时间. 类似式(10), 一般的双星椭圆轨道满足

$$E - e_p \sin E = \frac{2\pi}{P_b}(t_p - T_0). \quad (22)$$

下面将逐一分析各轨道参数误差产生的计时残差, 并假设各参数的测量是相互独立的, 即不存在相关性.

4.1 x 误差的影响

根据式(21), 将式(20)对 x 作变分得

$$\delta\Delta_{\text{RB}} = \frac{1}{c} \left[\sin \omega (\cos E - e_p) + \sqrt{1 - e_p^2} \cos \omega \sin E \right] \delta x. \quad (23)$$

上式表示只有 x 有误差时产生额外的计时残差. 很显然, δx 引起的计时残差具有周期性, 由式(22)知其周期为 P_b . 而其中的常数项对于实际测量则可忽略. 于是, 式(23)可合并成一个正弦或余弦函数, 其振幅为

$$\sqrt{1 - e_p^2} \cos^2 \omega / c.$$

4.2 近星点辐角误差的影响

类似地, 将式(20)对 ω 作变分可得近星点辐角误差 $\delta\omega$ 产生的计时残差:

$$\delta\Delta_{\text{RB}} = \frac{x}{c} \left[\cos \omega (\cos E - e_p) - \sqrt{1 - e_p^2} \sin \omega \sin E \right] \delta\omega. \quad (24)$$

同式(23)一样, $\delta\omega$ 引起的计时残差也有周期性, 周期同为 P_b , 振幅为

$$(x/c) \sqrt{1 - e_p^2} \sin^2 \omega.$$

4.3 偏心率误差影响

结合式(22), 将式(20)对 e_p 作变分得

$$\begin{aligned} \delta\Delta_{\text{RB}} = & -\frac{x}{2c} \left[\sin \omega \left(2 + \frac{1 - \cos(2E)}{1 - e_p \cos E} \right) \right. \\ & + \frac{2e_p}{\sqrt{1 - e_p^2}} \cos \omega \sin E \\ & \left. - \sqrt{1 - e_p^2} \cos \omega \frac{\sin(2E)}{1 - e_p \cos E} \right] \delta e_p, \end{aligned} \quad (25)$$

上式不同于式(23)和(24), 其中含有 $P_b/2$ 的周期项. 脉冲双星轨道的偏心率通常比较小. Parkes脉冲星计时阵(PPTA)发布的20颗毫秒脉冲星中, 双星系统的偏心率最大的量级为 10^{-4} . 因此我们可以看一下上式在 $e_p \ll 1$ 时的渐近行为, 我们只保留 e_p 的线性项, 并去掉对于测量无实际意义的常数项. 于是上式可简化为

$$\begin{aligned} \delta\Delta_{\text{RB}} = & \frac{x}{2c} \left[\sin(2E + \omega) + \frac{e_p}{2} \sin(3E + \omega) \right. \\ & \left. - \frac{e_p}{2} \sin(E + \omega) - e_p \cos \omega \sin E \right] \delta e_p. \end{aligned} \quad (26)$$

通过上式可以看出, $P_b/2$ 的周期项是主项, 另外还包括3个正比于 e_p 的修正项. 修正项中有两个周期成分, 分别为 P_b 和 $P_b/3$.

4.4 轨道周期误差影响

将式(20)对 P_b 作变分, 并利用式(22)可得轨道周期误差的影响:

$$\begin{aligned} \delta\Delta_{\text{RB}} = & \frac{x}{cP_b} \left[\sin \omega \frac{(E - e_p \sin E) \sin E}{1 - e_p \cos E} \right. \\ & \left. - \sqrt{1 - e_p^2} \cos \omega \frac{(E - e_p \sin E) \cos E}{1 - e_p \cos E} \right] \delta P_b, \end{aligned} \quad (27)$$

上式中除了周期项外, 还含有线性项. 这说明 P_b 的误差引起的额外计时残差会随着时间的累积而增大. 当 $e_p \ll 1$ 时, 上式可化为

$$\begin{aligned} \delta\Delta_{\text{RB}} = & -\frac{x}{cP_b} \left[E \cos(E + \omega) + \frac{e_p}{2} E \cos(2E + \omega) \right. \\ & \left. - \frac{e_p}{2} \sin(2E + \omega) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

图3利用Tempo2模拟脉冲星J1643-1224 双星轨道误差引起的计时残差和根据式(28)得到的解析模型计算结果的比较. 模拟数据中的计时残差含有均方根为1 μs 的白噪声, 轨道偏心率取为 $e_p = 5 \times 10^{-4}$.

4.5 近星点时间误差

将式(20)对 T_0 作变分, 并利用式(22)得

$$\delta\Delta_{\text{RB}} = \frac{2\pi x}{cP_b} \left[\frac{\sin \omega \sin E}{1 - e_p \cos E} - \sqrt{1 - e_p^2} \frac{\cos \omega \cos E}{1 - e_p \cos E} \right] \delta T_0. \quad (29)$$

当 $e_p \ll 1$ 时, 上式舍去常数项后可简化为

$$\delta\Delta_{\text{RB}} = -\frac{2\pi x}{cP_b} \left[\cos(E + \omega) + \frac{e_p}{2} \cos(2E + \omega) \right] \delta T_0. \quad (30)$$

上式说明近星点时间误差引起的计时残差主要是一个周期为 P_b 的振荡项, 另外还有一个正比于 e_p , 周期为 $P_b/2$ 的修正项.

5 脉冲星模型参数精度估计

前面我们分析了脉冲星计时模型参数误差如何

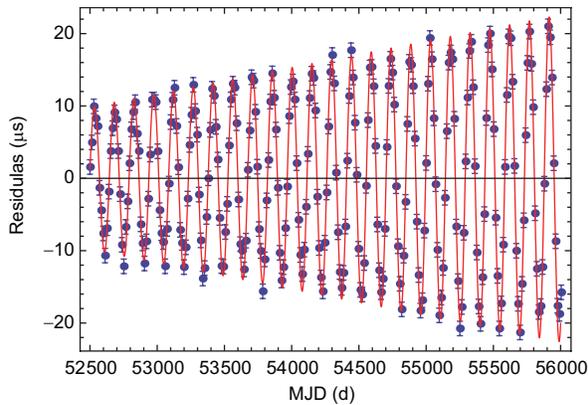


图3 (网络版彩图)脉冲星J1643-1224的双星轨道周期误差引起的计时残差模拟数据与解析模型的比较. 圆点和误差棒是脉冲星J1643-1224的模拟计时残差及1 μs 观测误差. 红色实线代表解析模型

Figure 3 (Color online) The comparison of timing residuals of pulsar J1643-1224 induced by the binary orbital error for the simulated data and the analytic model. The points and the error bars mean the simulated timing residuals of pulsar J1643-1224 and the observational errors with amplitudes of 1 μs , respectively.

影响脉冲星计时残差, 下面我们基于此估计一下各模型参数的理论测量精度, 并假设TOA单次测量误差为 σ_{TOA} , TOA的观测数量为 N_{TOA} . 作为从理论上的简单估计, 下面分析某个参数的测量误差时, 总是假设TOA测量误差只由该参数的测量误差贡献. 但实际测量中, 不同参数误差之间可能会存在相关性, 而本节意在通过理论分析更加直观地揭示参数测量精度随某些量的变化趋势. 关于相关参数的测量精度问题, 将在本节末展开具体的讨论.

5.1 脉冲星天体测量参数精度估计

根据式(13)可以分别估算出黄经和黄纬的测量误差

$$\sigma_{\lambda} = \frac{c\sigma_{\text{TOA}}}{a \cos \beta_0 \sqrt{N_{\text{TOA}}}}, \quad (31)$$

$$\sigma_{\beta} = \frac{c\sigma_{\text{TOA}}}{a |\sin \beta_0| \sqrt{N_{\text{TOA}}}}. \quad (32)$$

确切地说, 上面两式分别表示黄经和黄纬测量精度的上限. 一方面是因为略去了时间正弦或余弦因子, 另一方面是假定了脉冲星计时残差均由TOA测量误差贡献. 由于计时残差为TOA单次观测误差的方均根, 且观测误差与观测次数的开方成反比, 故上式中包含一个 $1/\sqrt{N_{\text{TOA}}}$ 的因子. 很显然, 对于低黄纬的脉冲星其黄经的测量精度较高, 但其黄纬的测量误差很大; 而高黄纬的脉冲星其黄纬测量精度较高, 但其黄经测量误差很大.

同样地, 由式(15)可得黄经自行和黄纬自行的测量误差

$$\sigma_{\mu_{\lambda}} = \frac{c\sigma_{\text{TOA}}}{a \cos \beta_0 \sqrt{N_{\text{TOA}}} \Delta t}, \quad (33)$$

$$\sigma_{\mu_{\beta}} = \frac{c\sigma_{\text{TOA}}}{a |\sin \beta_0| \sqrt{N_{\text{TOA}}} \Delta t}. \quad (34)$$

值得指出的是, 黄经自行和黄纬自行的测量误差会随着时间的累积而减小, 若假设 N_{TOA} 随着时间匀速增加, 那么 $\sigma_{\mu_{\lambda}}, \sigma_{\mu_{\beta}} \propto 1/(\Delta t)^{3/2}$. 因此, 黄经自行和黄纬自行的测量精度会随着时间的累积而显著提高.

通过以上的分析, 不难得出结论: 考虑地球公转的椭圆轨道与假设其为圆轨道对于位置和自行的测量精度并无实际区别. 那么对于视差的测量是

否也是如此呢? 下面我们分析一下视差的测量. 由式(18), 容易将视差的测量误差估计为

$$\sigma_{\pi} = \frac{4c\sigma_{\text{TOA}}}{a\sqrt{N_{\text{TOA}}}(\cos^2\beta_0 + 4e)}. \quad (35)$$

文献[12]的分析中指出, 对于圆轨道的情况, 当脉冲星的黄纬趋近于 90° 时, 视差的测量误差会趋于无穷大. 而对于椭圆轨道的情况, 由上式可知当黄纬趋近于 90° 时, 视差的测量误差不会趋于无穷大, 而是收敛于一个有限值: $\sigma_{\pi} = c\sigma_{\text{TOA}}/(ae\sqrt{N_{\text{TOA}}})$. 图4清楚地展示了这一特征. 另外, 由图4还可以看出, 这两种情况对于低纬度脉冲星的视差测量精度几乎无差别, 而对于高纬度的脉冲星, 椭圆轨道情况比圆轨道情况的视差测量精度要高得多. 需要指出, 式(35)只是一个估计值, 严格来说还应考虑与时间有关的周期振荡项, 这会导致在有些时刻或者某一时刻的某个黄纬的脉冲星视差的测量误差发散. 这些情况会出现在满足以下条件时: $\cos^2\beta_0 \cos(2u - 2\lambda_0) + 4e \cos u = 0$.

5.2 脉冲双星轨道参数精度估计

我们在第4节讨论了各双星轨道参数的误差引起的计时残差. 基于此, 可以逐一分析各双星轨道参数的测量误差. 首先, 轨道半长轴在视线切平面的投影 x 的测量精度可根据式(23)估计为

$$\sigma_x = \frac{c\sigma_{\text{TOA}}}{\sqrt{N_{\text{TOA}}(1 - e_p^2 \cos^2 \omega)}}. \quad (36)$$

同样地, 根据式(24)容易得到近星点经度的测量精度:

$$\sigma_{\omega} = \frac{c\sigma_{\text{TOA}}}{x\sqrt{N_{\text{TOA}}(1 - e_p^2 \sin^2 \omega)}}. \quad (37)$$

由4.3–4.5小节可知, 偏心率误差、双星轨道周期误差和近星点时间误差引起的计时残差形式比较复杂. 考虑到通常有 $e_p \ll 1$, 以下只讨论偏心率的零级近似. 于是, 偏心率的测量精度可估计为

$$\sigma_e = \frac{2c\sigma_{\text{TOA}}}{x\sqrt{N_{\text{TOA}}}}. \quad (38)$$

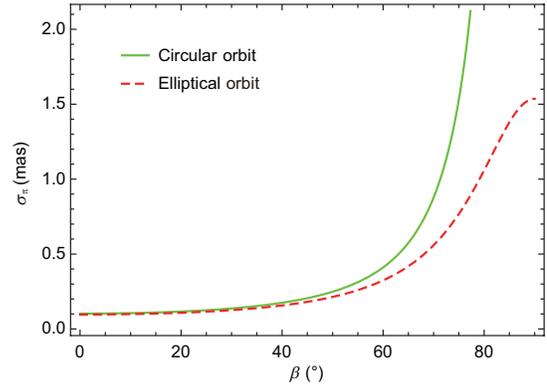


图4 (网络版彩图)视差的测量精度随黄纬的变化. 绿色实线表示地球公转为圆轨道的情况, 而红色虚线为椭圆轨道的情况. 该图中参数的具体取值如下: TOA的测量误差 $\sigma_{\text{TOA}} = 1 \mu\text{s}$, TOA的数据点数为260(对应于两周观测一次, 共观测10年), 地球椭圆轨道偏心率 $e = 0.0167$

Figure 4 (Color online) The measurable precision of parallax along with ecliptic latitude. The green solid line represents the case of the circular orbit of the Earth, and the red dashed line represents the case of elliptical orbit of the Earth. In this figure, the values of all the parameters are chosen as follows: the measurable uncertainty of TOA is $\sigma_{\text{TOA}} = 1 \mu\text{s}$, the number of data is 260 (corresponding to the observational frequency is once every two weeks and the data span is 10 years), and the eccentricity of the elliptical orbit of the Earth is chosen to be $e = 0.0167$.

轨道周期的测量误差可估计为

$$\sigma_{P_b} = \frac{cP_b\sigma_{\text{TOA}}}{x(E - E_0)\sqrt{N_{\text{TOA}}}}, \quad (39)$$

其中 E_0 为轨道偏近点角起算点. 而近星点时间测量误差可估计为

$$\sigma_{T_0} = \frac{cP_b\sigma_{\text{TOA}}}{2\pi x\sqrt{N_{\text{TOA}}}}. \quad (40)$$

通过以上的分析, 双星轨道参数的测量误差均正比于TOA的测量误差、反比于TOA数据点数的开方. 除 x 外, 其余参数的测量误差均反比于 x .

本节的精度估计表达式没有考虑脉冲星各参数误差之间的相关性, 意在通过计时残差与脉冲星参数误差之间的数学关系, 从误差传递角度近似给出脉冲星各个参数测量精度的解析表达式. 文献[14]给出了各参数误差之间的相关性特征, 但选取的参数为脉冲星自转和双星轨道参数, 并没有包括本文中主要分析的位置、自行和视差等参数. 需要指出的是, 在实际测量中, 式(5)包含的所有待测

参数的误差是通过拟合计时残差得到的. 假设向量 \mathbf{R} 是拟合前的计时残差, 脉冲星参数采用值的误差向量为 \mathbf{P} , \mathbf{E} 是拟合后的残差向量, 脉冲星参数的系数矩阵为 \mathbf{M} . \mathbf{M} 中各元素是利用式(5)分别对各个待测参数求偏导数(对各个参数求偏导数得到的表达式参见文中各个相关公式), 再将各个参数的近似值作为采用值, 根据观测时刻(参考地球时TT)与参考的地球历表数值计算得到的. 如果观测TOA数量为 n , 待拟合的脉冲星参数总数量为 m ($n > m$), 则 \mathbf{M} 是 $n \times m$ 的矩阵. 用矩阵表示的最小二乘拟合的线性方程为

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{P} + \mathbf{E}. \quad (41)$$

于是脉冲星参数误差估计值的协方差矩阵为 $(\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\sigma_{\text{TOA}}^2$. 考虑到TOA的测量误差不一定能反映拟合后计时残差的均方根误差, 实际给出的参数误差的协方差矩阵为 $(\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{E}/(n-m)$. 协方差矩阵给出了各个参数精度的精确估计, 同时由协方差矩阵可看出某些参数之间的相关性. 其对角线元素是各个参数的方差, 对角线右上与左下对称的元素是两两参数之间的互协方差. 互协方差绝对值较大的两个参数之间具有较强相关性. 因为脉冲星参数与计时残差的关系不是线性关系, 这种采用线性最小二乘拟合的方法是一种逐步逼近的方法. 在得到脉冲星参数误差拟合值后, 需要将改正后的各个参数作为新的采用值, 重新拟合脉冲星参数, 直到得到一个收敛的结果. 显然, 对于具有相关性的两个参数的拟合需要格外小心. 在参数拟合时最好仔细分析计时残差的变化趋势, 根据计时残差变化规律判断主要是两个参数中那个参数的误差所致. 以脉冲星位置与视差参数拟合为例, 如式(18)所示, 该二参数具有相关性, 如果认为已经拟合得到正确的脉

冲星位置, 残差变化趋势可能主要来自于视差误差, 在重新拟合时, 可以固定位置参数, 仅拟合脉冲星视差参数, 反之亦然. 当然, 这种人为的判断需要经验, 有时还需要利用多方面信息才能做出正确判断. 对于具有相关性参数的拟合是个较复杂的问题, 必须具体问题具体分析, 这里不再专门讨论.

6 结论

将地球绕太阳系质心的运动当作圆轨道处理在有些情况下是合理的, 例如在分析位置和自行的测量误差时. 但对于视差测量精度的理论分析, 圆轨道近似显然是不合理的, 应当用更符合实际的椭圆轨道. 本文将地球轨道为椭圆轨道作为出发点, 在黄道坐标系里导出了位置误差、自行误差、视差误差引起的脉冲星计时残差. 我们发现, 视差误差产生的计时残差与地球圆轨道的情形有显著不同, 而且对于黄纬越高的脉冲星, 这种差别越明显. 另外, 我们依次分析了各双星轨道模型参数误差产生的计时残差, 并给出了解析表达式. 在此基础上, 我们讨论了脉冲星位置参数、自行参数、视差等天体测量参数和各个脉冲双星轨道参数的理论测量精度. 我们发现, 对于高纬度脉冲星的视差测量精度, 地球椭圆轨道和圆轨道有着本质区别. 圆轨道的情况, 视差的测量误差在黄纬趋近于 90° 时会趋于无穷大; 而椭圆轨道的情况, 视差的测量误差在黄纬趋近于 90° 时会趋于一个有限值. 对脉冲星计时模型参数误差产生的计时残差的特征分析有利于鉴别计时残差中的噪声来源, 而脉冲星计时模型参数的理论测量精度估计对于望远镜观测脉冲星的方案选择具有一定的参考意义.

参考文献

- 1 Hellings R W, Downs G S. Upper limits on the isotropic gravitational radiation background from pulsar timing analysis. *Astrophys J*, 1983, 265: L39-L42
- 2 Jenet F A, Hobbs G B, Lee K J, et al. Detecting the stochastic gravitational wave background using pulsar timing. *Astrophys J*, 2005, 625: L123-L126
- 3 Petit G, Tavella P. Pulsars and time scales. *Astron Astrophys*, 1996, 308: 290-298

- 4 Hobbs G, Coles W, Manchester R N, et al. Development of a pulsar-based time-scale. *Mon Not R Astron Soc*, 2012, 427: 2780–2787
- 5 Champion D J, Hobbs G B, Manchester R N, et al. Measuring the mass of solar system planets using pulsar timing. *Astrophys J*, 2010, 720: L201–L205
- 6 Sheikh S I, Pines D J, Ray P S, et al. Spacecraft navigation using x-ray pulsars. *J Guidance Control Dyn*, 2006, 29: 49–63
- 7 Deng X P, Hobbs G, You X P, et al. Interplanetary spacecraft navigation using pulsars. *Adv Space Res*, 2013, 52: 1602–1621
- 8 Edwards R T, Hobbs G B, Manchester R N. Tempo2, a new pulsar timing package - II. The timing model and precision estimates. *Mon Not R Astron Soc*, 2006, 372: 1549–1574
- 9 Manchester R N, Hobbs G, Bailes M, et al. The parkes pulsar timing array project. *Publ Astron Soc Aust*, 2013, 30: e017
- 10 Damour T. General relativistic celestial mechanics of binary systems. II. The post-Newtonian timing formula. *Ann Inst Henri Poincaré Phys Théor*, 1986, 44: 263–292
- 11 Taylor J H, Weisberg J M. Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913 + 16. *Astrophys J*, 1989, 345: 434–450
- 12 Yang T G, Gao Y P, Tong M L, et al. Mathematical model for measuring pulsar parameters and precision estimation with pulsar timing observations (in Chinese). *Acta Astron Sin*, 2015, 56: 370–377 [杨廷高, 高玉平, 童明雷, 等. 计时观测测量脉冲星参数的数学模型与精度估计. *天文学报*, 2015, 56: 370–377]
- 13 Caliendo G A, Torres D F, Rea N. Impact of the orbital uncertainties on the timing of pulsars in binary systems. *Mon Not R Astron Soc*, 2012, 427: 2251–2274
- 14 Blandford R, Teukolsky S A. Arrival-time analysis for a pulsar in a binary system. *Astrophys J*, 1976, 205: 580–591

Analyses and estimates on measurement precisions of model parameters in pulsar timing

TONG MingLei^{1,2*}, YANG TingGao^{1,2}, ZHAO ChengShi^{1,2} & GAO YuPing^{1,2}

¹National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;

²Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China

The precise measurements of the model parameters in pulsar timing are the basis of the applications of pulsar timing. Pulsar timing model contains geometrical, physical, orbital effects, and so on. In this paper, we regarded the Earth's revolution as the elliptical orbit and obtained general conclusions in the ecliptic system of coordinates. Based on that, we gave the analytic expressions of estimating the measurement precision of these model parameters, and obtained the measurement precision of some model parameters depending on ecliptic latitude. In particular, for the estimation of the measurement precision of the parallax, a quite different result from the previous work was obtained. This is meaningful for the choices of pulsars in the practical observations.

pulsars, timing model, elliptical orbit, analytic model, measurement uncertainty

PACS: 97.60.Gb, 95.75.Wx, 95.10.Jk

doi: [10.1360/SSPMA2016-00462](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00462)