中国科学: 数学　2015 年　第 45 卷　第 11 期: 1741～1758
www.scichina.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

综　述

多复变 Hartogs 域上的度量与刚性

献给史济怀教授 80 华诞

冯志明[1], 涂振汉[2]*, 王磊[2]

① 乐山师范学院数学与信息科学学院, 乐山 614000;
② 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072
E-mail: fengzm2008@163.com, zhhtu.math@whu.edu.cn, wanglei2012@whu.edu.cn

收稿日期: 2015-03-16; 接受日期: 2015-06-04; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11271291) 和四川省教育厅科学研究基金 (批准号: 15ZA0284) 资助项目

摘要　本文主要涉及几类多复变 Hartogs 域上的度量与刚性. 首先讨论有界对称域上的 Hartogs 域与其典则度量相关的加权 Bergman 核的展开式以及该典则度量为平衡度量的充要条件. 其次给出几类多复变 Hartogs 域 (如华罗庚域、Fock-Bargmann-Hartogs 域和五面块 (pentablock)) 上逆紧全纯映射的刚性结果.

关键词　Bergman 核　Cartan-Hartogs 域　Kähler 度量　有界对称域　逆紧全纯映射　刚性　平衡度量

MSC (2010) 主题分类　32A25, 32M15, 32Q15

1　引言

本文主要讨论有界对称域上的 Hartogs 域的平衡度量和逆紧全纯映射的刚性问题, 为此先回顾不可约有界对称域的相关知识.

根据 Harish-Chandra 嵌入定理, 每一非紧 Hermite 对称流形能实现为 $\mathbb{C}^d$ 中的有界对称域. 每一有界对称域可分解为不可约有界对称域的乘积. 早在 1935 年, Cartan 已证明了不可约有界对称域可分为六类, 其中四类域, Hua [1] 称为典型域, 另两类为两个例外域.

记 $\mathcal{M}_{m,n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵构成的集合, $\overline{z}$ 和 z^{T} 分别表示矩阵 z 的复共轭和转置, I 表示单位矩阵, $z>0$ 表示矩阵 z 为正定矩阵. 第一、第二、第三、第四类典型域分别定义如下:

$$\Omega_{\mathrm{I}}(m,n):=\{z\in\mathcal{M}_{m,n}:I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}>0\},\quad 1\leqslant m\leqslant n,$$
$$\Omega_{\mathrm{II}}(n):=\{z\in\mathcal{M}_{n,n}:z^{\mathrm{T}}=-z, I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}>0\},\quad n\geqslant 5,$$
$$\Omega_{\mathrm{III}}(n):=\{z\in\mathcal{M}_{n,n}:z^{\mathrm{T}}=z, I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}>0\},\quad n\geqslant 2,$$
$$\Omega_{\mathrm{IV}}(n):=\{z\in\mathbb{C}^n:1-2z\overline{z}^{\mathrm{T}}+|zz^{\mathrm{T}}|^2>0, z\overline{z}^{\mathrm{T}}<1\},\quad n\geqslant 5,$$

这里 m 和 n 为正整数. 当 $m=1$ 时, $\Omega_{\mathrm{I}}(1,n)$ 即为单位球 $\mathbb{B}^n:=\{z\in\mathbb{C}^n:\|z\|^2<1\}$. 另外, 还有两个例外域 $\Omega_{\mathrm{V}}(16)$ 和 $\Omega_{\mathrm{VI}}(27)$.

英文引用格式: Feng Z M, Tu Z H, Wang L. Metrics and rigidity on Hartogs-type domains (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1741–1758, doi: 10.1360/N012015-00129

注 1.1 $\Omega_{\mathrm{II}}(2), \Omega_{\mathrm{III}}(1)$ 和 $\Omega_{\mathrm{IV}}(1)$ 双全纯等价于 $\Omega_{\mathrm{I}}(1,1)$; $\Omega_{\mathrm{II}}(4)$ 双全纯等价于 $\Omega_{\mathrm{IV}}(6)$; $\Omega_{\mathrm{IV}}(3)$ 双全纯等价于 $\Omega_{\mathrm{III}}(2)$; $\Omega_{\mathrm{IV}}(4)$ 双全纯等价于 $\Omega_{\mathrm{I}}(2,2)$. 由于 $\Omega_{\mathrm{IV}}(2)$ 双全纯等价于双圆盘 $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$, 因此, $\Omega_{\mathrm{IV}}(2)$ 不是不可约对称域. 这些典型域的等价证明, 参见文献 [2].

设 Ω 为 $\mathbb{C}^d$ 中的不可约有界对称域, 其亏格为 p. Ω 的一般范 $N_\Omega(z,\bar{\xi})$ 定义为

$$N_\Omega(z,\bar{\xi}) := (V(\Omega)K(z,\bar{\xi}))^{-1/p},$$

其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的 Euclid 体积, $K(z,\bar{\xi})$ 为其 Bergman 核函数. 注意到, 对 $z\in\Omega$ 有 $0<N_\Omega(z,\bar{z})\leqslant 1$, 而在 Ω 的边界 $b\Omega$ 上有 $N_\Omega(z,\bar{z})=0$.

事实上, 对不可约对称域 Ω, 其数字特征 a,b、秩 r、亏格 p、维数 d 和一般范 $N_\Omega(z,\bar{z})$ 见表 1 (参见文献 [1]).

由于两个例外域 $\Omega_{\mathrm{V}}(16)$ 和 $\Omega_{\mathrm{VI}}(27)$ 的一般范较复杂, 这里没有列出. 注意到, 不可约有界对称域 Ω 的数字特征、秩、维数和亏格满足如下关系式 (参见文献 [3]):

$$d=\frac{r(r-1)}{2}a+rb+r,\quad p=(r-1)a+b+2. \tag{1.1}$$

Cartan-Hartogs 域是有界对称域上的一类 Hartogs 域, 它是本文讨论的主要对象. 现在, 我们给出 Cartan-Hartogs 域的定义. 对给定正整数 k,d_0 和正实数 $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k$, 设 $\Omega_i\subset\mathbb{C}^{d_i}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 是不可约有界对称域, Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 定义为

$$\left(\prod_{j=1}^k\Omega_j\right)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu) := \left\{(z,w)\in\prod_{j=1}^k\Omega_j\times\mathbb{B}^{d_0} : \|w\|^2<\prod_{j=1}^k N_{\Omega_j}(z_j,\overline{z_j})^{\mu_j}\right\}, \tag{1.2}$$

这里 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k)$, $z=(z_1,\dots,z_k)\in\mathbb{C}^{d_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{d_k}$, $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{d_0}$ 的 Hermite 标准范数, $N_{\Omega_j}(z_j,\overline{z_j})$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ 是 Ω_j 的一般范, $\mathbb{B}^{d_0}:=\{w\in\mathbb{C}^{d_0}:\|w\|^2<1\}$ 表示 $\mathbb{C}^{d_0}$ 的单位球. 通常文献在 $k=1$ 时称 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}$ 为 Cartan-Hartogs 域, 在 $k>1$ 时称 $(\prod_{j=1}^k\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 为广义 Cartan-Hartogs 域. 为方便起见, 对任意正整数 k, 本文都统称 $(\prod_{j=1}^k\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 为 Cartan-Hartogs 域.

当 $k\geqslant 2$ 时, 任何 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 都是 $\mathbb{C}^{d_0+\cdots+d_k}$ 中非齐次域. 关于 Cartan-Hartogs 域的研究已有许多文献, 可参见文献 [4–7] 和综述 [8–10] 以及所引参考文献. Bergman-Hartogs 域是 Cartan-Hartogs 域的一种推广, 近年的进展参见文献 [11–14]. 本文主要涉及作者及其合作者近几年在这方面的一些新研究 (参见文献 [15–22]).

表 1 不可约对称域的数字特征

不可约对称域	a	b	r	p	d	$N_\Omega(z,\bar{z})$
$\Omega_{\mathrm{I}}(m,n)$	2	$n-m$	m	$m+n$	mm	$\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}})$
$\Omega_{\mathrm{II}}(2n)$ $(n\geqslant 3)$	4	0	n	$2(2n-1)$	$n(2n-1)$	$\sqrt{\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}})}$
$\Omega_{\mathrm{II}}(2n+1)$ $(n\geqslant 2)$	4	2	n	$4n$	$n(2n+1)$	$\sqrt{\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}})}$
$\Omega_{\mathrm{III}}(n)$ $(n\geqslant 2)$	1	0	n	$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}})$
$\Omega_{\mathrm{IV}}(n)$ $(n\geqslant 5)$	$n-2$	0	2	n	n	$1-2z\overline{z}^{\mathrm{T}}+\lvert zz^{\mathrm{T}}\rvert^2$
$\Omega_{\mathrm{V}}(16)$	6	4	2	12	16	
$\Omega_{\mathrm{VI}}(27)$	8	0	3	18	27	

2　Bergman 核展开与平衡度量

2.1　Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核展开

设 $h=(\exp\{-\Phi_\alpha\})_{\alpha\in I}$ 是复 n 维 Kähler 流形 (M,g) 上的全纯线丛 L 的一个 Hermite 度量, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 L 的一个平凡化邻域系. 假如 M 的 Kähler 度量 g 对应的 Kähler 形式 ω 满足

$$\omega=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\Phi_\alpha\right)_{\alpha\in I},$$

即 $[\omega]$ 等于 L 的第一陈类 $c_1(L)$, 称 L 是 M 的预量子化线丛. 对任意正整数 m, 记 L 的 m 次张量积 $L^{\otimes m}$ 的 Hermite 度量为 $h_m=(\exp\{-m\Phi_\alpha\})_{\alpha\in I}$, 令 $H^0(M,L^{\otimes m})$ 表示 $L^{\otimes m}$ 的整体全纯截面构成的线性空间. 定义

$$\mathcal{H}_m:=\left\{s\in H^0(M,L^{\otimes m}):\|s\|^2:=\int_M h_m(s(z),s(z))\frac{\omega^n}{n!}<+\infty\right\}. \tag{2.1}$$

如果 $\mathcal{H}_m\neq\{0\}$, 称

$$\varepsilon_m(z):=\sum_{j=1}^{\dim\mathcal{H}_m}h_m(s_j(z),s_j(z)),\quad z\in M \tag{2.2}$$

为 Kähler 流形 (M,g) 的 Rawnsley ε 函数, 这里 $\{s_j:1\leqslant j\leqslant\dim\mathcal{H}_m\}$ 是完备可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_m$ 的标准正交基. 当 $\varepsilon_m(z)$ 不依赖 z 时, 则称 mg 是 M 的平衡度量 (balanced metric).

设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一区域, Φ 是其上的 Kähler 位势, $L=D\times\mathbb{C}$ 是 D 上平凡线丛, 定义 $h=\exp\{-\Phi\}$ 是 L 的 Hermite 度量, 则 (2.1) 和 (2.2) 可分别表示为

$$\mathcal{H}_m:=\left\{f\ \text{是 } D \text{ 上全纯函数}:\|f\|^2:=\int_D|f(z)|^2\exp\{-m\Phi\}\frac{\omega^n}{n!}<+\infty\right\} \tag{2.3}$$

和

$$\varepsilon_m(z):=K_m(z,\bar z)\exp\{-m\Phi(z)\},\quad z\in D, \tag{2.4}$$

其中 K_m 是 $\mathcal{H}_m$ 的再生核, 或称为带权 Bergman 核. 注意在 (2.3) 和 (2.4) 中, m 可为正实数, 以下在讨论域上的全纯函数空间 $\mathcal{H}_m$ 和函数 $\varepsilon_m(z)$ 时, 把 m 换成 α, 并假设 $\alpha>0$.

Rawnsley ε 函数仅依赖于度量 g, 而不依赖于 Kähler 位势 Φ 的选择. 函数 $\varepsilon_\alpha(z)$ 在不同的文献中有不同的名字. 最早在文献 [23] 中称作 η 函数, 后来在文献 [24] 中称作 ε 函数, 在文献 [25–27] 中称作扭曲 (distortion) 函数. 当流形 M 紧致且 ε_m 为常数时, 与此对应的度量 mg, 在文献 [27] 中称为临界度量 (critical metric), 在文献 [28] 中称为平衡度量 (balanced metric). 文献 [29,30] 把平衡度量的定义推广到非紧情形.

当 M 紧致时, 文献 [31–33] 给出了 Rawnsley ε 函数的渐近展开式

$$\varepsilon_m(z)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}a_j(z)m^{n-j}, \tag{2.5}$$

其含义为对任意非负正整数 k 和 l, 存在依赖于 k,l 和流形 M 相关的常数 C 使得

$$\left\|\varepsilon_m(z)-\sum_{j=0}^{k}a_j(z)m^{n-j}\right\|_{C^l}\leqslant Cm^{n-k-1}, \tag{2.6}$$

这里 $a_j(z)$ 是定义在 M 上的光滑函数. 文献 [34] 给出了系数 a_1, a_2 和 a_3 的明显表达式如下:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = \dfrac{1}{2}k_g, \\ a_2 = \dfrac{1}{3}\triangle k_g + \dfrac{1}{24}|R|^2 - \dfrac{1}{6}|\mathrm{Ric}|^2 + \dfrac{1}{8}k_g^2, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 k_g, $\triangle$, R 和 Ric 分别表示度量 g 的数量曲率、Laplace、曲率张量和 Ricci 曲率. 在紧复流形情形, 展开式 (2.5) 有许多推广, 如文献 [35,36]; 当 M 非紧时, 文献 [36–39] 给出了 $\varepsilon_m(z)$ 的形如 (2.5) 的渐近表达式. 对系数 a_j 的一般表达式, 可参见文献 [40]. 展开式 (2.5) 在 Kähler 几何中最初与 Kähler 度量的逼近有关, 即任意紧复流形上极化 Kähler 度量能被 Bergman 度量任意逼近, 参见文献 [41].

渐近展开式 (2.5) 称为 Bergman 核展开. 对 ε_m 的明显表达式的计算可参见文献 [15,16,42,43]. 文献 [15,16] 求出了以对称有界域为底空间的 Hartogs 域关于典则度量的 Bergman 核的明显展开式, 并且根据展开式找出了这类度量是平衡度量的充要条件. 这样在一类非齐次域上找到了完备平衡度量.

对 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$, 定义位势

$$\Phi(z,w) := -\ln\left(\prod_{j=1}^k N_{\Omega_j}(z_j,\overline{z_j})^{\mu_j} - \|w\|^2\right). \tag{2.8}$$

于是, Kähler 形式 $\omega(\mu)$ 表示为

$$\omega(\mu) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\Phi. \tag{2.9}$$

在 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上与之联系的度量 $g(\mu)$ 称为典则度量, 可表示为

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial Z_i \partial \overline{Z_j}} dZ_i \otimes d\overline{Z_j},$$

这里 $n = \sum_{j=0}^k d_j$, $Z = (Z_1, \dots, Z_n) := (z, w)$.

注 2.1 (2.8) 定义的函数 $\Phi(z,w)$ 是实解析强多重次调和的穷竭函数. 因此, Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 是 $\mathbb{C}^{d_0+\cdots+d_k}$ 中有界拟凸域.

现在叙述 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 关于度量 $g(\mu)$ 的 Bergman 核展开. 2014 年, Feng 和 Tu [15,16] 得到了如下结果:

定理 2.1 [15,16] 给定正整数 k 和 d_0, 以及 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}_+^k$, 设 $a_i, b_i, r_i, N_{\Omega_i}, p_i, d_i$ 和 χ_i 分别表示不可约有界对称域 Ω_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的数字特征、秩、一般范、亏格、维数和华多项式 (其定义见 (2.14)). 在 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上赋予典则度量 $g(\mu)$ (见 (2.9)). 当 $\alpha > \max\{n, \frac{p_1-1}{\mu_1}, \dots, \frac{p_k-1}{\mu_k}\}$ 时, 全纯函数的 Hilbert 空间

$$\mathcal{H}_\alpha := \left\{ f \text{ 在 } \left(\prod_{j=1}^k \Omega_j\right)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu) \text{ 上解析} : \int_{(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)} |f|^2 \exp\{-\alpha\Phi\} \frac{\omega(\mu)^n}{n!} < +\infty \right\}$$

的 Bergman 核 (再生核) 可明显表示为

$$K_\alpha(z_1, \dots, z_k, w; \overline{z_1}, \dots, \overline{z_k}, \overline{w})$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{k}\mu_i^{d_i}}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{N_{\Omega_i}(z_i,\overline{z_i})}\right)^{\mu_i\alpha}\sum_{j=0}^{d}\frac{D^j\widetilde{\chi}(d)}{j!}\frac{(\alpha-n)_{j+d_0}}{(1-\frac{\|w\|^2}{\prod_{i=1}^{k}N_{\Omega_i}(z_i,\overline{z_i})^{\mu_i}})^{\alpha-d+j}}, \tag{2.10}$$

这里 $d=\sum_{j=1}^{k}d_j$ 和 $n=\sum_{j=0}^{k}d_j$ 分别是对称域 $\prod_{j=1}^{k}\Omega_j$ 和 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^{k}\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 的维数, 其中对非负整数 m, 符号 $(s)_m$ 表示为

$$(s)_m := \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s)} = s(s+1)\cdots(s+m-1),$$

而多项式 $\widetilde{\chi}(x)$ 定义为

$$\widetilde{\chi}(x) := \prod_{i=1}^{k}\chi_i(\mu_i x-p_i) \equiv \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{r_i}\left(\mu_i x-p_i+1+(j-1)\frac{a_i}{2}\right)_{1+b_i+(r_i-j)a_i}, \tag{2.11}$$

上面符号 $D^j\widetilde{\chi}(x)$ 表示函数 $\widetilde{\chi}$ 在 x 的 j 阶差分, 即

$$D^j\widetilde{\chi}(x) := \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(-1)^l\widetilde{\chi}(x-l). \tag{2.12}$$

证明　对任意 $s>-1$, 华积分 $\int_\Omega N_\Omega(z,\overline{z})^s dm(z)$ 有一般表达式 (参见文献 [1,6])

$$\int_\Omega N_\Omega(z,\overline{z})^s dm(z) = \frac{\pi^d}{C_\Omega\chi(s)}, \tag{2.13}$$

这里 $dm(z)$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 的 Lebesgue 测度, $\chi(s)$ 称为华多项式, 其定义为

$$\chi(s) := \prod_{j=1}^{r}\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}, \tag{2.14}$$

常数 C_Ω 等于

$$C_\Omega = \det\left(-\frac{\partial^2\ln N_\Omega(z,\overline{z})}{\partial z^{\mathrm{T}}\partial\overline{z}}\right)\bigg|_{z=0}. \tag{2.15}$$

令 $\mathcal{G}$ 表示 Ω 的全纯自同构群的单位连通分支, $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{G}$ 关于原点的稳定子群 (注意这里 $\mathcal{K}$ 必为线性子群). 定义群 $\mathcal{K}$ 在 $\mathbb{C}^d$ 上函数的作用为 $f\mapsto f\circ k(k\in\mathcal{K})$, 则在 $\mathcal{K}$ 作用下 $\mathbb{C}^d$ 上全纯多项式构成的空间 $\mathcal{P}$ 有不可约分解 (Peter-Weyl 分解)

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{\lambda}\mathcal{P}_\lambda,$$

其求和范围为长度不超过秩 r 的所有划分, 即 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 0$, λ_i 是非负整数, 且对每个 λ, $\mathcal{P}_\lambda$ 是 $|\lambda|$ 次齐次全纯多项式空间的不可约子空间, 这里符号 $|\lambda|:=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$ 表示划分 λ 的权. 对 $\mathbb{C}^d$ 上全纯多项式空间 $\mathcal{P}$ 定义 Fock-Fischer 内积

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{F}} := \int_{\mathbb{C}^d} f(z)\overline{g(z)}d\rho_{\mathcal{F}}(z), \tag{2.16}$$

其中

$$d\rho_{\mathcal{F}}(z) := \exp\{-m(z,\overline{z})\}\frac{(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}m(z,\overline{z}))^d}{d!}, \tag{2.17}$$

$$m(z,\overline{z}) := -\frac{\partial \ln N_\Omega(tz,\overline{z})}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\frac{\partial N_\Omega(tz,\overline{z})}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

设 λ 是长度不超过 r 的划分, 令 $K_\lambda(z_1,\overline{z_2})$ 表示 $\mathcal{K}$ 的不可约空间 $\mathcal{P}_\lambda$ 关于 Fock-Fischer 内积的再生核, 则核 $K_\lambda(z_1,\overline{z_2})$ 与一般范 $N_\Omega(z_1,\overline{z_2})$ 成立以下华 -Faraut-Korányi [1,44] 公式

$$N_\Omega(z_1,\overline{z_2})^{-s} = \sum_\lambda (s)_\lambda K_\lambda(z_1,\overline{z_2}), \tag{2.18}$$

上式在 Ω 的任一紧集上都一致收敛, 广义 Pochhammer 符号 $(s)_\lambda$ 定义为

$$(s)_\lambda := \prod_{j=1}^{r}\left(s-\frac{j-1}{2}a\right)_{\lambda_j}. \tag{2.19}$$

令 $\Omega_0 := \mathbb{B}^{d_0}$. 设 $\mathcal{K}_i$ 是不可约有界对称域 Ω_i $(0\leqslant i\leqslant k)$ 的全纯自同构群的单位连通分支 $\mathcal{G}_i$ 关于原点的稳定子群, K_{λ_i} 表示 $\mathbb{C}^{d_i}$ 上全纯多项式空间在 $\mathcal{K}_i$ 作用下的不可约子空间 $\mathcal{P}^{(i)}_{\lambda_i}$ 关于 Fock-Fischer 内积的再生核. 因 $\exp\{-\alpha\Phi\}\frac{\omega(\mu)^n}{n!}$ 在群 $\mathcal{K}_0\times\mathcal{K}_1\times\cdots\times\mathcal{K}_k$ 作用下不变, 因此, Hilbert 空间 $\mathcal{H}_\alpha$ 有正交直和分解 [45]

$$\mathcal{H}_\alpha = \widehat{\bigoplus_{\substack{\ell(\lambda_i)\leqslant r_i\\ 0\leqslant i\leqslant k}}} \mathcal{P}^{(0)}_{\lambda_0}\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}^{(k)}_{\lambda_k},$$

这里 r_i 表示 Ω_i 的秩, 注意 Ω_0 的秩是 1, 因此, 上面 λ_0 是非负整数. 因此, $\mathcal{H}_\alpha$ 的再生核有级数表示,

$$K_\alpha(Z;\overline{Z}) = \sum_{\substack{\ell(\lambda_i)\leqslant r_i\\ 0\leqslant i\leqslant k}} \frac{\prod_{i=0}^k \dim\mathcal{P}^{(i)}_{\lambda_i}}{\langle\prod_{j=0}^k K^{(j)}_{\lambda_j}(z_j;\overline{z_j})\rangle}\prod_{j=0}^k K^{(j)}_{\lambda_j}(z_j;\overline{z_j}), \tag{2.20}$$

这里 $\ell(\lambda_i)$ 表示划分 λ_i 的长度, $Z:=(z_1,\dots,z_k,w)$, $z_0:=w$, 符号 $\langle f\rangle$ 表示积分,

$$\langle f\rangle := \int_{(\prod_{j=1}^k\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)} f\exp\{-\alpha\Phi\}\frac{\omega(\mu)^n}{n!}.$$

当 $\alpha>\max\{n,\frac{p_1-1}{\mu_1},\dots,\frac{p_k-1}{\mu_k}\}$ 时, 运用不可约有界对称域上的积分公式

$$\int_\Omega K_\lambda(z,\overline{z})N_\Omega(z,\overline{z})^s dm(z) = \frac{\dim\mathcal{P}_\lambda}{(p+s)_\lambda}\int_\Omega N_\Omega(z,\overline{z})^s dm(z)\quad (s>-1)$$

和 (2.13) 得积分

$$\left\langle\prod_{j=0}^k K^{(j)}_{\lambda_j}(z_j;\overline{z_j})\right\rangle = \frac{\prod_{i=1}^k(\mu_i^{d_i}C_{\Omega_i}\chi_i(0)V(\Omega_i))\cdot V(\mathbb{B}^{d_0})\chi_0(0)}{\pi^n\chi_0(\alpha-n-1)\prod_{i=1}^k\chi_i(\mu_i(\alpha+|\lambda_0|)-p_i)}\frac{\prod_{i=0}^k\dim\mathcal{P}^{(i)}_{\lambda_i}}{(\alpha-d)^{(0)}_{\lambda_0}\prod_{i=1}^k(\mu_i(\alpha+|\lambda_0|))^{(i)}_{\lambda_i}}.$$

把这个积分代入 (2.20), 再用华 -Faraut-Korányi 公式 (2.18) 求和化简便得 (2.10). 证毕. □

其次根据 Rawnsley ε 函数的定义得下面的推论:

推论 2.2 [15,16] 符号和条件同定理 2.1, 则 Cartan-Hartogs 域 $((\prod_{j=1}^k\Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu),g(\mu))$ 的 Rawnsley ε 函数可表示为

$$\varepsilon_\alpha(z_1,\dots,z_k,w) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k\mu_i^{d_i}}\sum_{j=0}^d\frac{D^j\widetilde{\chi}(d)}{j!}\left(1-\frac{\|w\|^2}{\prod_{i=1}^k N_{\Omega_i}(z_i,\overline{z_i})^{\mu_i}}\right)^{d-j}(\alpha-n)_{j+d_0}. \tag{2.21}$$

最后得 Bergman 核展开的系数:

推论 2.3 [15,16]　在典则度量 $g(\mu)$ 下, Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 的 Bergman 核展开的系数 a_1 和 a_2, 即 Rawnsley ε 函数 ε_α (见 (2.21)) 中 α^{n-1} 和 α^{n-2} 的系数, 分别是

$$a_1(z_1,\ldots,z_k,w)=\frac{1}{\prod_{i=1}^k \mu_i^{d_i}}\frac{D^{d-1}\widetilde{\chi}(d)}{(d-1)!}\left(1-\frac{\|w\|^2}{\prod_{i=1}^k N_{\Omega_i}(z_i,\overline{z_i})^{\mu_i}}\right)-\frac{n(n+1)}{2}, \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}a_2(z_1,\ldots,z_k,w)=&\frac{1}{\prod_{i=1}^k \mu_i^{d_i}}\frac{D^{d-2}\widetilde{\chi}(d)}{(d-2)!}\left(1-\frac{\|w\|^2}{\prod_{i=1}^k N_{\Omega_i}(z_i,\overline{z_i})^{\mu_i}}\right)^2\\&-\frac{1}{\prod_{i=1}^k \mu_i^{d_i}}\frac{D^{d-1}\widetilde{\chi}(d)}{(d-1)!}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\left(1-\frac{\|w\|^2}{\prod_{i=1}^k N_{\Omega_i}(z_i,\overline{z_i})^{\mu_i}}\right)\\&+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2),\quad d\geqslant 2.\end{aligned} \tag{2.23}$$

当 $d=1$ 时, $\Omega_1=\mathbb{B}$, $\mu=\mu_1$, 有

$$\begin{aligned}a_2(z,w)=&-\frac{\mu-1}{\mu}\left(\frac{(1+d_0)(2+d_0)}{2}-1\right)\left(1-\frac{\|w\|^2}{N(z,\overline{z})^\mu}\right)\\&+\frac{1}{24}d_0(d_0+1)(d_0+2)(3d_0+5),\quad d=1.\end{aligned} \tag{2.24}$$

由于 (2.21) 关于参数 α 的展开只有有限项, 根据文献 [40] 可知, (2.7) 中的 a_1 和 a_2 与推论 2.3 中的系数 a_1 和 a_2 相等.

利用 (2.21), 最近, Zedda [46] 证明了 Cartan-Hartogs 域 $(\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu),g(\mu))$ 上可实现 Berezin 量子化.

2.2　Cartan-Hartogs 域上的平衡度量

设 φ 是域 D 上的 Kähler 位势, g 是与 Kähler 形式 $\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ 相联系的 Kähler 度量. 对正数 α, 令 $\mathcal{H}_\alpha$ 是 (D,g) 上关于权 $\exp\{-\alpha\varphi\}$ 的平方可积全纯函数空间. 如果 $\mathcal{H}_\alpha\neq\{0\}$, 记 $K_\alpha(z,\bar{z})$ 为 $\mathcal{H}_\alpha$ 的再生核. 用 h 表示 D 上与 Kähler 形式 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln K_\alpha(z,\bar{z})$ 对应的 Kähler 度量, 易见 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln K_\alpha(z,\bar{z})$ 独立于位势 φ 的选取, 仅与度量 g 有关. 于是, 由定义得

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln\varepsilon_\alpha(z)+\alpha\cdot\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi(z)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln K_\alpha(z,\overline{z}),\quad z\in D.$$

这表明, 如果 g 是 D 上平衡度量 (即 $\varepsilon_\alpha(z)$ 于 D 上为常值), 则在 D 上成立 $\alpha g=h$.

熟知 N 维复射影空间 $P^N(\mathbb{C})$ $(1\leqslant N\leqslant+\infty)$ 上的 Fubini-Study 度量 $ds_{\rm FS}$ 对应的 Kähler 形式用齐次坐标 $Z_0,Z_1,Z_2,\ldots$ 可表示为 $\omega_{\rm FS}=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln(\sum_{j=0}^N|Z_j|^2)$. 当 $\mathcal{H}_\alpha\neq\{0\}$ 时, 设 $\{f_j: 0\leqslant j\leqslant N=\dim\mathcal{H}_\alpha-1\}$ 是 $\mathcal{H}_\alpha$ 的标准正交基, 则 D 上平衡度量 αg 可视为由 Kähler 浸入

$$f: D\to P^N(\mathbb{C}),\quad z\mapsto[f_0(z),f_1(z),\ldots,f_j(z),\ldots]$$

在 N 维复射影空间 $P^N(\mathbb{C})$ 中所诱导的一个 Kähler 度量. 事实上, 当 ε_α 为正常数时, 对任意 $z\in D$, 必存在 f_j 使得 $f_j(z)\neq0$, 因此, 映射 $f: D\to P^N(\mathbb{C})$ 是有意义的, 并且

$$\begin{aligned}f^*\omega_{\rm FS}&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln\sum_{j=0}^N|f_j(z)|^2=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln K_\alpha(z,\bar{z})\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln\varepsilon_\alpha(z)+\alpha\cdot\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi(z).\end{aligned}$$

这表明, 如果度量 αg 是 D 上平衡度量, 那么, f 是 $(D,\alpha g)$ 到 $(P^N(\mathbb{C}), ds_{\mathrm{FS}})$ 的全纯等距映射 (注意复射影空间 $P^N(\mathbb{C})$ 中所诱导的度量并不一定都是平衡度量, 参见文献 [47, 例 1]). 映射 f 在文献 [24] 中称为相干态映射 (coherent states map).

在文献 [24,48,49] 中, 平衡度量在 Kähler 流形的 Berezin-Toeplitz 量子化和形变量子化起着基本的作用. 特别强调的是, 在文献 [28] 讨论极化代数流形上常数量曲率的 Kähler 度量的存在性中, 平衡度量起着中心的作用.

对平衡度量的存在性和唯一性的研究, 在紧致情形已有很多讨论. 对非紧流形上的平衡度量的研究可参见文献 [47,49–55]. 然而, 事实上, 对一般非紧流形或 $\mathbb{C}^n$ 中的开区域, 平衡度量的存在性似乎很少知道 (参见文献 [30,56]). 目前, 我们所知道的具有平衡度量的复流形是齐次域和我们下面要讨论的特殊的 Hartogs 域. 在非齐次流形情形, 平衡度量的存在性问题显得十分困难. 这样对 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上平衡度量的存在性研究便很有意义.

2012 年, Loi 和 Zedda [47] 描述了不可约有界对称域上的平衡度量: 设不可约有界对称域 Ω 的亏格为 p, 其 Bergman 度量为 g_B, 则度量为 αg_B $(\alpha>0)$ 是平衡度量当且仅当 $\alpha > \frac{p-1}{p}$. 特别地, 设 $\mathbb{B}^d$ 为 $\mathbb{C}^d$ 中的单位球, 其度量 g_{hyp} 定义为

$$ds^2 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 \ln(1-\|z\|^2)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} dz_i \otimes d\overline{z_j},$$

我们称 $(\mathbb{B}^d, g_{hyp})$ 为复双曲空间, 此时有 $g_{hyp} = \frac{1}{d+1} g_B$ 和 $p = d+1$. 这样有 αg_{hyp} $(\alpha > 0)$ 是 $\mathbb{B}^d$ 上的平衡度量当且仅当 $\alpha > d$.

当 $\Omega = \mathbb{B}^d$, $\mu = 1$ 时, 我们有 Cartan-Hartogs 域 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu) = \mathbb{B}^{d+d_0}$. 2012 年, Loi 和 Zedda [47] 用平衡度量对 Cartan-Hartogs 域 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 给出如下刻画:

定理 2.4 [47] 度量 $\alpha g(\mu)$ $(\alpha > 0)$ 在 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上是平衡度量当且仅当 $\alpha > d+d_0$, 且 $(\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu), g(\mu))$ 双全纯等距于复双曲空间 $(\mathbb{B}^{d+d_0}, g_{hyp})$, 即 $\Omega = \mathbb{B}^d$, $\mu = 1$.

对一般情形, 根据 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 关于度量 $g(\mu)$ 的 Bergman 核展开式 (2.21) (即推论 2.2), 2014 年, Feng 和 Tu [15,16] 得到了 ε_α 关于 $z_1,\dots,z_k,w$ 为常数的充要条件, 即度量 $\alpha g(\mu)$ 为平衡度量的充要条件.

定理 2.5 [16] 假设符号和条件同定理 2.1, Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上的度量 $\alpha g(\mu)$ 为平衡度量的充要条件是

$$\alpha > \max\left\{\sum_{j=0}^{k} d_j, \frac{p_1-1}{\mu_1}, \dots, \frac{p_k-1}{\mu_k}\right\}$$

和

$$\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{r_i}\left(\mu_i x - p_i + 1 + (j-1)\frac{a_i}{2}\right)_{1+b_i+(r_i-j)a_i} = \prod_{j=1}^{k}\mu_j^{d_j} \cdot \prod_{j=1}^{d}(x-j). \tag{2.25}$$

根据定理 2.5, 可以推出以下结论:

推论 2.6 [16] (i) 如果度量 $\alpha g(\mu)$ 是 Cartan-Hartogs 域 $(\prod_{j=1}^k \Omega_j)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上的平衡度量, 则每个 Ω_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 必双全纯于

$$\Omega_{\mathrm{I}}(1,n) \equiv \mathbb{B}^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|^2 < 1\},$$

或

$$\Omega_{\mathrm{III}}(2) := \{z \in \mathcal{M}_{2,2} : z^{\mathrm{T}} = z, I - z\overline{z}^{\mathrm{T}} > 0\},$$

或

$$\Omega_{\mathrm{IV}}(m) := \{z \in \mathbb{C}^m : 1 - 2z\overline{z}^{\mathrm{T}} + |zz^{\mathrm{T}}|^2 > 0, \|z\|^2 < 1\}, \quad m \text{ 是大于 4 的奇数}.$$

(ii) 如果 $\alpha > \max\{d_0+d_1+d_2, \frac{p_1-1}{\mu_1}, \frac{p_2-1}{\mu_2}\}$, 那么, 度量 $\alpha g(\mu)$ 在 Cartan-Hartogs 域 $(\Omega_1\times\Omega_2)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上是平衡度量当且仅当 $((\Omega_1\times\Omega_2)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu), g(\mu))$ 双全纯等距于

$$\left((\mathbb{B}^d\times\mathbb{B})^{\mathbb{B}^{d_0}}\left(1, \frac{1}{d+1}\right), g\left(1, \frac{1}{d+1}\right)\right) \quad \text{或} \quad \left((\mathbb{B}\times\Omega_{\mathrm{III}}(2))^{\mathbb{B}^{d_0}}\left(1, \frac{1}{2}\right), g\left(1, \frac{1}{2}\right)\right).$$

注 2.2 (i) 由定理 2.5 和推论 2.6 可推出定理 2.4. (ii) 因 Cartan-Hartogs 域 $(\Omega_1\times\Omega_2)^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 是非齐次域, 因此, 推论 2.6 给出了存在平衡度量的非齐次域例子.

利用 Cartan-Hartogs 域 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上关于典则度量 $g(\mu)$ 的 Bergman 核展开式, 即 (2.23) 和 (2.24), Feng 和 Tu [15,16] 给出了典则度量是平衡度量的如下刻画:

定理 2.7 [15] 设 a_2 是 n 维 Cartan-Hartogs 域 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 上关于典则度量 $g(\mu)$ 的 Bergman 核展开式中 α^{n-2} 的系数. 对充分大的 α, 度量 $\alpha g(\mu)$ 是平衡度量的充要条件是 a_2 等于常数, 即 a_2 为常数当且仅当 $(\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu), g(\mu))$ 双全纯等距于复双曲空间 $(\mathbb{B}^{d+d_0}, g_{hyp})$.

最近, Zedda [57] 利用 (2.21) 证明了, 如果 n 维 Cartan-Hartogs 域 $\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu)$ 的 Bergman 核展开的任一系数 a_j ($2 \leqslant j \leqslant n$) 是常数, 那么, $(\Omega^{\mathbb{B}^{d_0}}(\mu), g(\mu))$ 双全纯等距于复双曲空间 $(\mathbb{B}^{d+d_0}, g_{hyp})$. 此外, Wang 和 Hao [58] 给出了 Cartan-Hartogs 域上 Kähler-Einstein 度量的存在性定理.

3 Hartogs 域上逆紧全纯映射的刚性

本节主要讨论几类 Hartogs 域上逆紧全纯映射的刚性. 主要涉及下面的几类 Hartogs 域: 华罗庚域 (有界对称域上的一类 Hartogs 域及其推广)、Fock-Bargmann-Hartogs 域 (复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一类 Hartogs 域) 和五面块 (对称双圆盘上的一类 Hartogs 域).

3.1 逆紧全纯映射及其刚性

我们先回顾逆紧全纯映射的相关知识和经典结果. 两个拓扑空间 X 和 Y 之间的映射 $f: X \to Y$ 称为是逆紧 (proper) 的, 如果对 Y 中的任意紧集 K, $f^{-1}(K)$ 都是 X 中的紧子集. 对多复变函数的逆紧映射的研究, 起源于 20 世纪五六十年代 Stein 和 Remmert 对一般的复空间之间的逆紧映射的研究. 从 20 世纪 70 年代开始, 人们把注意力转向 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域之间的逆紧全纯映射. 由此易知, $f: \Omega \to D$ 是有界域之间的逆紧映射当且仅当对 Ω 中不收敛的点列 $\{q_i\}$, $\{f(q_i)\}$ 在 D 中也不收敛. 所以, 如果 f 可以连续延拓到 $\partial\Omega$, 那么 $f(\partial\Omega) \subset \partial D$.

$\mathbb{C}^n$ 中的有界域之间的逆紧全纯映射的刚性是指这两个区域之间的所有的逆紧全纯映射一定是双全纯同胚. 在逆紧全纯映射的刚性方面最早的结果是 Alexander 的如下经典结果:

定理 3.1 [59] 设 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ 为 $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$) 中的单位球 $\mathbb{B}^n$ 的逆紧全纯自映射, 则 f 为 $\mathbb{B}^n$ 的自同构.

关于两个具有光滑边界的等维有界拟凸域之间的逆紧全纯映射 $f: D_1 \to D_2$ 已有很多重要的结果. 当逆紧全纯映射 f 能光滑延拓到 D_1 的闭包时, 延拓后的映射将边界 bD_1 映到 bD_2 并且在 bD_1 上满足 Cauchy-Riemann 方程. 因此, 逆紧全纯映射 $f: D_1 \to D_2$ 的研究自然地导致了对从 bD_1 到 bD_2 的映射的几何性质研究. 这些研究严重地依赖于研究边界之间的映射的分析技巧 (参见文献 [60,61]). 在这个方面, 有如下结果:

定理 3.2 [62]　设 $\Omega, D \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ 为光滑有界拟凸域并且 Ω 是强拟凸的, 则任何逆紧全纯映射 $f: \Omega \to D$ 是局部双全纯的. 因此, 如果 D 是单连通的, 则 $f: \Omega \to D$ 为双全纯同胚.

例 3.1　$f(z_1, z_2) = (z_1, z_2^2) : \{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\} \to \{(w_1, w_2) : |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中两个具有光滑实解析边界的有界拟凸域之间的逆紧全纯映射, 但是, 它是分支覆盖映射而不是双全纯的.

这个例子启示我们研究下面有趣的问题: 寻找 $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ 中的一些有趣的有界弱拟凸区域 D_1 和 D_2 使得从 D_1 到 D_2 的任何逆紧全纯映射都是双全纯同胚.

所有秩 $\geqslant 2$ 的有界对称域都是没有光滑边界的拟凸域. 1984 年, Henkin 和 Novikov [63] 证明了如下结果:

定理 3.3 [63]　秩 $\geqslant 2$ 的不可约有界对称域的任何逆紧全纯自映射都是其自同构.

利用文献 [64, 65] 的想法, Tu [66] 得到了如下两个等维有界对称域之间的逆紧全纯映射的刚性定理:

定理 3.4 [66]　设 Ω_1 和 Ω_2 为两个等维有界对称域. 设 Ω_1 不可约并且秩 $\mathrm{rank}(\Omega_1) \geqslant 2$, 则从 Ω_1 到 Ω_2 的任何逆紧全纯映射都是双全纯同胚.

另外, 作为文献 [18] 的特殊情形, 我们有下面的定理:

定理 3.5 [18]　设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 的不可约有界对称域并且不与第四类典型域 D_{IV}^N $(N \geqslant 3)$ 同构. 设 $F: \Omega \to D$ 为从 Ω 到有界凸区域 D 的逆紧全纯映射, 则 $F: \Omega \to D$ 为双全纯同胚并且在相差一个仿射线性变换下为 Ω 的 Harish-Chandra 实现.

不等维有界域之间的逆紧全纯映射的刚性也有很多研究, 如文献 [61, 65, 67–72].

3.2　华罗庚域上逆紧全纯映射的刚性

对于不可约有界对称域的 Harish-Chandra 实现 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, 正整数 r 及 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_r) \in (\mathbb{R}_+)^r$, 华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p})$ 定义为

$$\begin{aligned} H_\Omega(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p}) &= H_\Omega(n_1, \ldots, n_r; p_1, \ldots, p_r) \\ &:= \left\{ (z, w_{(1)}, \ldots, w_{(r)}) \in \Omega \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_r} : \sum_{j=1}^r \|w_{(j)}\|^{2p_j} < N_\Omega(z, \bar{z}) \right\}, \end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为标准的 Hermite 范数, $N_\Omega(z, \bar{\xi})$ 为 Ω 的一般范. 注意到 $\Omega \times \{0\} \subset H_\Omega(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p})$ 和 $b\Omega \times \{0\} \subset bH_\Omega(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p})$, 我们有 $H_\Omega(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p})$ 是 $\mathbb{C}^{d+n_1+\cdots+n_r}$ 中的有界拟凸域. 但是, 一般地, 华罗庚域既不是齐性域也没有光滑边界.

对应于第 1 节中所罗列的典型域 (参见文献 [1]) 的定义以及它的数字特征、秩、亏格、维数和一般范, 我们在这里列出其相应的华罗庚域. 设 $\mathcal{M}_{m,n}$ 为所有复系数 $m \times n$ 矩阵 $z = (z_{ij})$ 的集合. 设 $\overline{z}$ 为矩阵 z 的复共轭, 而 z^{T} 为矩阵 z 转置. I 为单位矩阵. 若方阵 z 是正定的, 则记为 $z > 0$. 第一、第二、第三、第四类典型域上的华罗庚域分别定义如下:

(1) 若 $\Omega = \Omega_{\mathrm{I}}(m, n) := \{z \in \mathcal{M}_{m,n} : I - z\overline{z}^{\mathrm{T}} > 0\} \subset \mathbb{C}^d$ $(1 \leqslant m \leqslant n,\ d = mn)$ (第一类典型域), 则 $p(\Omega) = m + n$, $N_\Omega(z, \overline{z}) = \det(I - z\overline{z}^{\mathrm{T}})$, 而

$$H_\Omega(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{p}) = \left\{ (z, w_{(1)}, \ldots, w_{(r)}) \in \Omega_{\mathrm{I}}(m, n) \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_r} : \sum_{j=1}^r \|w_{(j)}\|^{2p_j} < \det(I - z\overline{z}^{\mathrm{T}}) \right\}.$$

特别地, 当 $\Omega=\mathbb{B}^d$ 为 $\mathbb{C}^d$ 的单位球, 则 $N_\Omega(z,\overline{z})=1-\|z\|^2$, 而

$$H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})=\left\{(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in\mathbb{B}^d\times\mathbb{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{n_r}:\|z\|^2+\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<1\right\}.$$

从而, 华罗庚域 $H_{\mathbb{B}^d}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 就是广义复椭球.

(2) 若 $\Omega=\Omega_{\mathrm{II}}(n):=\{z\in\mathcal{M}_{n,n}:z^{\mathrm{T}}=-z,I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}>0\}\subset\mathbb{C}^d$ ($n\geqslant 2$, $d=n(n-1)/2$) (第二类典型域), 则 $p(\Omega)=2(n-1)$, $N_\Omega(z,\overline{z})=(\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}))^{1/2}$, 而

$$H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})=\left\{(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in\Omega_{\mathrm{II}}(n)\times\mathbb{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{n_r}:\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<(\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}))^{1/2}\right\}.$$

(3) 若 $\Omega=\Omega_{\mathrm{III}}(n):=\{z\in\mathcal{M}_{n,n}:z^{\mathrm{T}}=z,I-z\overline{z}^{\mathrm{T}}>0\}\subset\mathbb{C}^d$ ($n\geqslant 2$, $d=n(n+1)/2$) (第三类典型域), 则 $p(\Omega)=n+1$, $N_\Omega(z,\overline{z})=\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}})$, 而

$$H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})=\left\{(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in\Omega_{\mathrm{III}}(n)\times\mathbb{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{n_r}:\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<\det(I-z\overline{z}^{\mathrm{T}})\right\}.$$

(4) 若 $\Omega=\Omega_{\mathrm{IV}}(n):=\{z\in\mathbb{C}^n:1-2z\overline{z}^{\mathrm{T}}+|zz^{\mathrm{T}}|^2>0,z\overline{z}^{\mathrm{T}}<1\}$ ($n\geqslant 3$) (第四类典型域), 则 $p(\Omega)=n$, $N_\Omega(z,\overline{z})=1-2z\overline{z}^{\mathrm{T}}+|zz^{\mathrm{T}}|^2$, 而

$$H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})=\left\{(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in\Omega_{\mathrm{IV}}(n)\times\mathbb{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{n_r}:\sum_{j=1}^r\|w_{(j)}\|^{2p_j}<1-2z\overline{z}^{\mathrm{T}}+|zz^{\mathrm{T}}|^2\right\}.$$

设 Ω 为不可约有界对称域在 $\mathbb{C}^d$ 中的 Harish-Chandra 实现. 我们总是可以要求华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$ 为其标准形式, 即

(1) 若 Ω 为单位球, 则 $p_1\neq 1,\dots,p_r\neq 1$ (若 $r=0$, 则该华罗庚域就是 $\mathbb{C}^d$ 中的单位球);

(2) 若 $\mathrm{rank}(\Omega)\geqslant 2$, 则 $p_1=1$, $p_2\neq 1,\dots,p_r\neq 1$ (若 $n_1=0$, 则 $p_1=1$ 不出现).

通过重新编号坐标, 我们可以将每个华罗庚域写成其标准形式. 从而, 对每个华罗庚域存在一个有界对称域的 Harish-Chandra 实现使得该华罗庚域可以写成其标准形式 $H_\Omega(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$.

设 $\Omega\subset\mathbb{C}^d$ 为不可约有界对称域, $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{p}\in(\mathbb{R}_+)^r$. 设 $\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 为具有如下形式的映照 Φ 组成的集合:

$$\Phi(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})=\left(\varphi(z),U_1(w_{(1)})\frac{(N_\Omega(z_0,\overline{z_0}))^{\frac{1}{2p_1}}}{(N_\Omega(z,\overline{z_0}))^{\frac{1}{p_1}}},\dots,U_r(w_{(r)})\frac{(N_\Omega(z_0,\overline{z_0}))^{\frac{1}{2p_r}}}{(N_\Omega(z,\overline{z_0}))^{\frac{1}{p_r}}}\right),\qquad(3.1)$$

其中 $(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$. 而 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)$, U_j $(1\leqslant j\leqslant r)$ 为 $\mathbb{C}^{n_j}$ 的酉变换并且 $z_0=\varphi^{-1}(0)$, 则 $\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 为 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 的子群 (参见文献 [73]). 易见, $\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 的每个元素都保持集合 $\Omega\times\{0\}(\subset H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 不变, 并且 $\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 可迁地作用于 $\Omega\times\{0\}(\subset H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$. 关于华罗庚域的更多知识, 请参见文献 [73] 及其参考文献.

当 $r=1$ 时, 华罗庚域 $H_\Omega(n_1;p_1)$ 也就是 Cartan-Hartogs 域并且记为 $\Omega^{\mathbb{B}^{n_1}}(p_1)$. 关于 Cartan-Hartogs 域的更多知识, 请参见文献 [4, 7, 15, 47, 74].

2012 年, 文献 [74] 找到了四类典型域 Ω 上的 Cartan-Hartogs 域 $H_\Omega(n_1;p_1)$ 的自同构群. 利用与文献 [74] 完全不同的方法, 2014 年, 文献 [21] 给出了两个等维华罗庚域之间的双全纯同胚的如下具体表达式.

定理 3.6 [21] 设 $H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 和 $H_{\Omega_2}(\boldsymbol{m};\boldsymbol{q})$ 为两个等维的华罗庚域且它们都是其标准形式, 其中 $\Omega_1\subset\mathbb{C}^{d_1}$ 和 $\Omega_2\subset\mathbb{C}^{d_2}$ 为两个不可约有界对称域的 Harish-Chandra 实现, 而 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in(\mathbb{R}_+)^r$. 假设

$$f: H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})\to H_{\Omega_2}(\boldsymbol{m};\boldsymbol{q})$$

为双全纯同胚, 则存在自同构 $\Phi\in\Gamma(H_{\Omega_2}(\boldsymbol{m};\boldsymbol{q}))$ (见 (3.1)) 和一个置换 $\sigma\in S_r$ 满足 $n_{\sigma(i)}=m_i$, $p_{\sigma(i)}=q_i$, $1\leqslant i\leqslant r$, 使得

$$\Phi\circ f(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})=(z,w_{(\sigma(1))},\dots,w_{(\sigma(r))})\begin{pmatrix}A&&&\\&U_1&&\\&&\ddots&\\&&&U_r\end{pmatrix},$$

其中 A 为 $\mathbb{C}^d$ $(d:=d_1=d_2)$ 的复线性同构并且满足 $A(\Omega_1)=\Omega_2$, U_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 为 $\mathbb{C}^{m_i}$ $(m_i=n_{\sigma(i)})$ 的酉变换, S_r 为集合 $\{1,\dots,r\}$ 的置换群.

证明 首先, 由华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 为包含原点的有界圆型域知, 其 Bergman 核函数 $K(z,\bar{\xi})$ 可以表示为

$$K_\Omega(z,\bar{\xi})=\frac{1}{V(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))}+h_1(z)\overline{h_1(\xi)}+h_2(z)\overline{h_2(\xi)}+\cdots,$$

其中 $V(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 为华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的 Euclid 体积, 而 $h_j(z)$ $(j=1,2,\dots)$ 为华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 上的齐次全纯多项式. 由此可知其 Bergman 核函数 $K(z,\bar{\xi})$ 具有某种半正则性 (即如果 ξ 限制在华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的某个紧子集上, 则 $K(z,\bar{\xi})$ 作为 z 的函数可以全纯延拓到华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的闭包的某邻域). 再由 Bergman 核函数在双全纯变换下的变换公式知, 双全纯同胚 f 可以全纯延拓到华罗庚域 $H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的闭包的某邻域. 从而, 我们有

$$f(bH_{\Omega_1}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))\subset bH_{\Omega_2}(\boldsymbol{m};\boldsymbol{q}).\tag{3.2}$$

然后, 为了充分利用 (3.2), 我们分析了华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的边界 $bH_{\Omega_1}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的结构

$$bH_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})=b_0H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})\cup b_1H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})\cup(b\Omega\times\{0\}),$$

其中

$$\begin{aligned}b_0H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}):=\Big\{&(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in\Omega\times\mathbb{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{n_r}:\\&\sum_{i=1}^r\|w_{(i)}\|^{2p_i}=N_\Omega(z,z),\|w_{(j)}\|^2\neq0,1+\delta\leqslant j\leqslant r\Big\},\\b_1H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}):=\bigcup_{j=1+\delta}^r\Big\{&(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})\in\Omega\times\mathbb{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}^{n_r}:\\&\sum_{i=1}^r\|w_{(i)}\|^{2p_i}=N_\Omega(z,z),\|w_{(j)}\|^2=0\Big\},\end{aligned}$$

这里

$$\delta=\begin{cases}1, & 若\ p_1=1,\\0, & 若\ p_1\neq1,\end{cases}$$

则 $b_0H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 为边界的强拟凸部分, 而 $b_1H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})\cup(b\Omega\times\{0\})$ 不含任何强拟凸边界点. 从而, 由 f 双全纯知, $f(b_1H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})\cup(b\Omega_1\times\{0\}))\subset b_1H_{\Omega_2}(\boldsymbol{m};\boldsymbol{q})\cup(b\Omega_2\times\{0\})$. 由此可知, f 保持零截面 (即 $f(\Omega_1\times\{0\})\subset\Omega_2\times\{0\}$). 最后, 利用 (3.1) 定义的自同构和 Cartan 定理就可以得到 f 的显示表达式. □

作为定理 3.6 的特殊情形, 我们得到所有的不可约有界对称域 Ω 上的华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 的自同构群如下:

推论 3.7 [21] 设 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 为华罗庚域的标准形式, 而 $\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 为形如 (3.1) 的映射生成的群, 其中 $\Omega\subset\mathbb{C}^d$ 为不可约有界对称域的 Harish-Chandra 实现, 而 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{p}\in(\mathbb{R}_+)^r$, 则对任意 $f\in\mathrm{Aut}(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$, 存在 $\Phi\in\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))$ 和置换 $\sigma\in S_r$ 满足 $n_{\sigma(i)}=n_i$, $p_{\sigma(i)}=p_i$, $1\leqslant i\leqslant r$, 使得

$$f(z,w_{(1)},\dots,w_{(r)})=\Phi(z,w_{(\sigma(1))},\dots,w_{(\sigma(r))}).$$

注 3.1 当 $r=1$ 时, Ahn 等人[74] 于 2012 年对四类典型域 Ω 得到了推论 3.7. 在推论 3.7 中将华罗庚域写成其标准形式这一点很重要. (i) 例如, 令

$$H_{\mathbb{B}^2}((2,2);(1,2))=\{(z,w_{(1)},w_{(2)})\in\mathbb{B}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2:\|z\|^2+\|w_{(1)}\|^2+\|w_{(2)}\|^4<1\},$$

则此时只有恒等置换 $\sigma=1\in S_2$ 满足 $n_{\sigma(i)}=n_i$, $p_{\sigma(i)}=p_i$, $1\leqslant i\leqslant 2$, 但是易知 $\Gamma(H_{\mathbb{B}^2}((2,2);(1,2)))\subsetneqq\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{B}^2}((2,2);(1,2)))$. 这说明, 当推论 3.7 中的华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 不是其标准形式时, 推论 3.7 不再成立. (ii) 当华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 为单位球时, 我们有 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})=\Omega$ 和 $r=0$ (由于 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 为其标准形式). 从而, 我们有

$$\Gamma(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))=\mathrm{Aut}(\Omega)\ (=\mathrm{Aut}(H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p}))).$$

这说明, 当标准形式的华罗庚域 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ 为单位球时, 推论 3.7 依然成立 (参见文献 [74, 定理 1.1]).

对两个等维的华罗庚域之间的逆紧全纯映射的刚性问题, 我们有下面的定理:

定理 3.8 [21] 设 $H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n}_1;\boldsymbol{p}_1)$ 和 $H_{\Omega_2}(\boldsymbol{n}_2;\boldsymbol{p}_2)$ 为两个等维的华罗庚域且它们都是其标准形式, 其中 $\Omega_1\subset\mathbb{C}^{d_1}$ 和 $\Omega_2\subset\mathbb{C}^{d_2}$ 为两个不可约有界对称域的 Harish-Chandra 实现, 而 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\in\mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\in(\mathbb{R}_+)^r$. 设

$$f:H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n}_1;\boldsymbol{p}_1)\to H_{\Omega_2}(\boldsymbol{n}_2;\boldsymbol{p}_2)$$

为逆紧全纯映射. 设 $b_1H_{\Omega_i}(\boldsymbol{n}_i;\boldsymbol{p}_i)\cup(b\Omega_i\times\{0\})$ $(i=1,2)$ 被包含在一个复余维数不小于 2 的复解析集之中, 则 $f:H_{\Omega_1}(\boldsymbol{n}_1;\boldsymbol{p}_1)\to H_{\Omega_2}(\boldsymbol{n}_2;\boldsymbol{p}_2)$ 为双全纯同胚.

注 3.2 (i) 在定理 3.8 中, 我们没有要求 $\dim\Omega_1=\dim\Omega_2$.

(ii) 在定理 3.8 中, 假设条件 "$b_1H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})\cup(b\Omega\times\{0\})$ 被包含在一个复余维数不小于 2 的复解析集之中" 等价于 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ (为其标准形式) 满足 $\min\{n_{1+\delta},\dots,n_r,n_1+\cdots+n_r\}\geqslant 2$, 即 $H_\Omega(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ (为其标准形式) 满足下列条件:

(a) 当 $\Omega=\mathbb{B}^d$ 为单位球时, $\min\{n_1,\dots,n_r\}\geqslant 2$;

(b) 当 $\mathrm{rank}(\Omega)\geqslant 2$ 且 $p_1\neq 1$ 时, $\min\{n_1,\dots,n_r\}\geqslant 2$;

(c) 当 $\mathrm{rank}(\Omega)\geqslant 2$ 且 $p_1=1$ 时, $\min\{n_2,\dots,n_r,n_1+n_2+\cdots+n_r\}\geqslant 2$.

(iii) 在定理 3.8 中, 假设条件 "$b_1H_{\Omega_i}(\boldsymbol{n}_i;\boldsymbol{p}_i)\cup(b\Omega_i\times\{0\})$ $(i=1,2)$ 包含在一个复余维数不小于 2 的复解析集之中" 不能去掉. 例如, 设 Ω 为不可约有界对称域满足 $\mathrm{rank}(\Omega)\geqslant 2$, $n_1:=1$ (即 $w_{(1)}\in\mathbb{C}$), 然而,

$$\Phi(z,w_{(1)},w_{(2)},\dots,w_{(r)}):=(z,w_{(1)}^2,w_{(2)},\dots,w_{(r)}),$$

其中 $(z,w_{(1)},w_{(2)},\dots,w_{(r)})\in H_\Omega(1,n_2,\dots,n_r;p_1,p_2,\dots,p_r)$, 则 Φ 是从 $H_\Omega(1,n_2,\dots,n_r;p_1,p_2,\dots,p_r)$ 到 $H_\Omega(1,n_2,\dots,n_r;p_1/2,p_2,\dots,p_r)$ 的逆紧全纯映射, 但是 Φ 不是双全纯同胚.

3.3 Fock-Bargmann-Hartogs 域上逆紧全纯映射的刚性

Fock-Bargmann-Hartogs 域 $D_{n,m}(\mu)$ 定义为

$$D_{n,m}(\mu) := \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \|w\|^2 < \mathrm{e}^{-\mu\|z\|^2}\}, \quad \mu > 0.$$

Fock-Bargmann-Hartogs 域 $D_{n,m}(\mu)$ 为 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的无界强拟凸区域. 注意到 $D_{n,m}(\mu)$ 包含 $\{(z,0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m\} \cong \mathbb{C}^n$. 因此, $D_{n,m}(\mu)$ 不是 Kobayashi 意义下的双曲空间, 并且 $D_{n,m}(\mu)$ 不双全纯同胚于 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的任何有界区域. 所以, Fock-Bargmann-Hartogs 域 $D_{n,m}(\mu)$ 是 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的无界非双曲区域.

2013 年, Yamamori [75] 利用多对数 (polylogarithm) 函数给出了 Fock-Bargmann-Hartogs 域的 Bergman 核的显示表达式. 2014 年, 通过验证其 Bergman 核函数满足修订版的 Cartan 定理的条件, Kim 等人[76] 给出了 Fock-Bargmann-Hartogs 域的全纯自同构群如下:

定理 3.9 [76] $D_{n,m}(\mu)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D_{n,m}(\mu))$ 由 $D_{n,m}(\mu)$ 的如下自同构生成,

$$\begin{aligned}
&\varphi_U : (z,w) \mapsto (Uz, w), \quad U \in \mathcal{U}(n),\\
&\varphi_{U'} : (z,w) \mapsto (z, U'w), \quad U' \in \mathcal{U}(m),\\
&\varphi_v : (z,w) \mapsto (z+v, \mathrm{e}^{-\mu\langle z,v\rangle - \frac{\mu}{2}\|v\|^2} w), \quad v \in \mathbb{C}^n,
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{U}(k)$ 为 k 阶酉矩阵群, 而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准 Hermite 内积.

2014 年, Tu 和 Wang [20] 证明了两个等维 Fock-Bargmann-Hartogs 域之间的逆紧全纯映射的如下刚性定理:

定理 3.10 [20] 设 $D_{n,m}(\mu)$ 和 $D_{n',m'}(\mu')$ 为两个等维 Fock-Bargmann-Hartogs 域满足 $m \geqslant 2$, 而 f 为从 $D_{n,m}(\mu)$ 到 $D_{n',m'}(\mu')$ 的逆紧全纯映射, 则 f 为 $D_{n,m}(\mu)$ 与 $D_{n',m'}(\mu')$ 之间的双全纯同胚.

注 3.3 在定理 3.10 中假设条件 “$m \geqslant 2$” 不能去掉. 例如, 设

$$\Phi(z_1,\dots,z_n,w_1) := (\sqrt{2}z_1,\dots,\sqrt{2}z_n, w_1^2), \quad (z_1,\dots,z_n,w_1) \in D_{n,1}(\mu),$$

则 Φ 为 $D_{n,1}(\mu)$ 的逆紧全纯自映射, 但是, 它是分支覆盖映射而不是 $D_{n,1}(\mu)$ 的自同构.

然后, Tu 和 Wang [20] 还给出两个 Fock-Bargmann-Hartogs 域之间双全纯同胚的显示表达式如下:

定理 3.11 [20] 设 $D_{n,m}(\mu)$ 和 $D_{n',m'}(\mu')$ 为两个等维 Fock-Bargmann-Hartogs 域, 而 f 为 $D_{n,m}(\mu)$ 与 $D_{n',m'}(\mu')$ 之间的双全纯同胚, 则 $n = n'$, $m = m'$ 并且存在 $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_{n',m'}(\mu'))$ 使得

$$f(z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m) = \varphi\Bigg(\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}z_1,\dots,\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}z_n, w_1,\dots,w_m\Bigg).$$

3.4 五面块 (pentablock) 上逆紧全纯映射的刚性

设 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 为 2×2 复矩阵组成的空间, 其范数为通常的算子范数, 即对矩阵 $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$,

$$\|A\| := \sup\left\{\frac{\|zA\|}{\|z\|} : z \in \mathbb{C}^2, z \neq 0\right\}.$$

五面块 (pentablock) $\mathcal{P}$ 是由 Agler 等人[77] 引进的一个有界区域, 它定义为

$$\mathcal{P} := \{(a_{21}, \mathrm{trace}A, \det A) : A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \boldsymbol{B}\},$$

其中 $\boldsymbol{B} := \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \|A\| < 1\}$ 为空间 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 在通常的算子范数下的单位球. 所以, $\mathcal{P}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 在全纯映射 $A = [a_{ij}] \mapsto (a_{21}, \mathrm{trace} A, \det A)$ 下的像. 因为 $\mathcal{P} \cap \mathbb{R}^3$ 是由五个面围成的有界凸体, 其中三个是平坦的而另外两个是弯曲的, 所以, Agler 等人[77] 称之为五面块 (pentablock).

五面块 $\mathcal{P}$ 是多项式凸的并且是关于原点的星型域, 但是, 它既不是圆型域也不是凸的并且没有 $\mathcal{C}^1$ 边界 (参见文献 [77]). 五面块 $\mathcal{P}$ 是有界非齐性域 (参见文献 [78, 定理 15]). 关于五面块 $\mathcal{P}$ 的更多的复几何性质和函数论性质, 请参见文献 [77, 78].

五面块与对称双圆盘 (symmetrized bidisc) $\mathbb{G}_2$ 密切相关, 对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中由下式定义的有界域,

$$\mathbb{G}_2 := \{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{B}\}.$$

容易验证, 对 $(s,p) \in \mathbb{C}^2$, $(s,p) \in \mathbb{G}_2$ 当且仅当 $|s - \bar{s}p| + |p|^2 < 1$ (参见文献 [77]). 所以, 对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$ 也可以写成

$$\mathbb{G}_2 = \{(s,p) \in \mathbb{C}^2 : |s - \bar{s}p| + |p|^2 < 1\}.$$

对称双圆盘之所以重要是因为它是满足下面性质的有界拟凸域的第一个例子, 即其 Carathéodory 函数与 Lempert 函数重合, 但是它不能被双全纯等价于凸区域的区域穷竭 (参见文献 [79, 80]).

五面块是以对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$ 为底空间的一个 Hartogs 域. 事实上, 由于当 $A \in \boldsymbol{B} (\subset \mathbb{C}^{2\times 2})$ 时, A 的所有的特征值都在 $\mathbb{B}$ 中, 所以, $(\mathrm{trace} A, \det A) \in \mathbb{G}_2$, 因此, $\mathcal{P}$ 到其底空间 $\mathbb{G}_2$ 的投影映射为

$$(a, s, p) \mapsto (s, p).$$

更准确地讲, 我们有 (参见文献 [77])

$$\mathcal{P} = \{(a, s, p) \in \mathbb{B} \times \mathbb{G}_2 : |a|^2 < \mathrm{e}^{-u(s,p)}\},$$

其中 $u(s,p) = -2\log|1 - \frac{\frac{1}{2}s\bar{\beta}}{1+\sqrt{1-|\beta|^2}}|$, 而 $\beta = \frac{s-\bar{s}p}{1-|p|^2}$.

Agler 等人[77] 证明了

$$\mathrm{e}^{-u(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1\lambda_2)/2} = \frac{1}{2}|1 - \lambda_1\overline{\lambda_2}| + \frac{1}{2}(1 - |\lambda_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |\lambda_2|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{B}.$$

这给出了五面块的另外一个描述:

$$\mathcal{P} = \left\{(a, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2) : |a| < \frac{1}{2}|1 - \lambda_1\overline{\lambda_2}| + \frac{1}{2}(1 - |\lambda_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |\lambda_2|^2)^{\frac{1}{2}}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{B}\right\}.$$

2014 年, Agler 等人[77] 构造出了五面块的全纯自同构群的一个如下子群:

定理 3.12 [77]　所有的具有如下形式的映射:

$$f_{\omega,\nu}(a, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2) = \left(\frac{\omega(1 - |\alpha|^2)a}{1 - \bar{\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2) + \bar{\alpha}^2\lambda_1\lambda_2}, \nu(\lambda_1) + \nu(\lambda_2), \nu(\lambda_1)\nu(\lambda_2)\right), \tag{3.3}$$

其中 $(a, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2) \in \mathcal{P}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{B}$, 构成了五面块 $\mathcal{P}$ 的全纯自同构 $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ 的一个子群, 其中 ν 是一个具有如下形式的 Möbius 函数, $\nu(\lambda) = \eta\frac{\lambda - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\lambda}$, 其中 $\omega, \eta \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{B}$.

进一步, Kosiński[78] 完整地找出了五面块 $\mathcal{P}$ 的全纯自同构群:

定理 3.13 [78]　五面块 $\mathcal{P}$ 的形如 (3.3) 的自同构组成其整个全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$.

2014 年, Su 等人[19] 研究了五面块 $\mathcal{P}$ 的逆紧全纯自映射, 并且证明了五面块 $\mathcal{P}$ 的任何逆紧全纯自映射必定为形如 (3.3) 的映射:

定理 3.14 [19] 五面块 $\mathcal{P}$ 的任何逆紧全纯自映射必定是形如 (3.3) 的自同构.

本文主要局限在有界对称域上 Hartogs 域的 Bergman 核展开、平衡度量和逆紧全纯映射刚性. 关于这类域的其他论题, 可参见综述 (如文献 [9]).

参考文献

1 Hua L K. Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains. Providence: Amer Math Soc, 1963

2 Lu Q K. The Classical Manifolds and the Classical Domains (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2011

3 Faraut J, Kaneyuki S, Korányi A, et al. Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains. Progress in Mathematics, vol. 185. Boston: Birkhäuser, 2000

4 Yin W P. The Bergman kernels on Cartan-Hartogs domains. Chinese Sci Bull, 1999, 44: 1947–1951

5 Yin W P. The Bergman kernel on Super-Cartan domain of the first domains (in Chinese). Sci China Ser A, 1999, 29: 607–615

6 Yin W P, Lu K P, Roos G. New classes of domains with explicit Bergman kernel. Sci China Ser A, 2004, 47: 352–371

7 Wang A, Yin W P, Zhang L Y, et al. The Kähler-Einstein metric for some Hartogs domains over bounded symmetric domains. Sci China Ser A, 2006, 49: 1175–1210

8 Yin W P. New progress for the Bergman kernel function with explicit formula on bounded domain (in Chinese). Adv Math, 2002, 31: 295–312

9 Yin W P. The summarizations on research of Hua domain (in Chinese). Adv Math, 2007, 36: 129–152

10 Yin W P. Zeros of Bergman kernel function on bounded domains in $\mathbb{C}^n$ (in Chinese). Adv Math, 2008, 37: 1–14

11 Hao Y, Wang A. The Bergman kernels of generalized Bergman-Hartogs domains. J Math Anal Appl, 2015, 429: 326–336

12 Pan L S, Wang A. The holomorphic automorphism group of the domains of the Bergman-Hartogs type (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 31–42

13 Hao Y, Wang A, Zhang L. On holomorphic isometric immersions of nonhomogeneous Kähler-Einstein manifolds into the infinite dimensional complex projective space. J Math Anal Appl, 2015, 423: 547–560

14 Zhao J, Wang A, Hao Y H. On the holomorphic automorphism group of the Bergman-Hartogs domain. Int J Math, 2015, 26: 1550056

15 Feng Z M, Tu Z H. On canonical metrics on Cartan-Hartogs domains. Math Z, 2014, 278: 301–320

16 Feng Z M, Tu Z H. Balanced metrics on some Hartogs type domains over bounded symmetric domains. Ann Global Anal Geom, 2015, 47: 305–333

17 Feng Z M, Tu Z H. The weighted super-Bergman kernels of $\mathbb{B}^{m|n}$ and integral representations of invariant inner products on $H^2_\nu(\mathbb{B}^m)$. Complex Anal Oper Theory, 2015, 9: 1037–1063

18 Mok N, Ng S C, Tu Z H. Factorization of proper holomorphic maps on irreducible bounded symmetric domains of rank $\geqslant 2$. Sci China Math, 2010, 53: 813–826

19 Su G, Tu Z H, Wang L. Rigidity of proper holomorphic self-mappings of the pentablock. J Math Anal Appl, 2015, 424: 460–469

20 Tu Z H, Wang L. Rigidity of proper holomorphic mappings between certain unbounded non-hyperbolic domains. J Math Anal Appl, 2014, 419: 703–714

21 Tu Z H, Wang L. Rigidity of proper holomorphic mappings between equidimensional Hua domains. Math Ann, 2015, 363: 1–34

22 Feng Z M. The Weighted super Bergman kernels over the supermatrix spaces. Math Phys Anal Geom, doi: 10.1007/s11040-015-9174-9, 2015

23 Rawnsley J. Coherent states and Kähler manifolds. Q J Math, 1977, 28: 403–415

24 Cahen M, Gutt S, Rawnsley J. Quantization of Kähler manifolds I: Geometric interpretation of Berezin's quantization. J Geom Phys, 1990, 7: 45–62

25 Ji S. Inequality of distortion function for invertible sheaves on abelian varieties. Duke Math J, 1989, 58: 657–667

26 Kempf G R. Metrics on invertible sheaves on abelian varieties. Topics in algebraic geometry (Guanajuato, 1989). Aportaciones Mat, 1992, 5: 107–108

27 Zhang S. Heights and reductions of semi-stable varieties. Compos Math, 1996, 104: 77–105

28 Donaldson S. Scalar curvature and projective embeddings, I. J Differential Geom, 2001, 59: 479–522

29 Arezzo C, Loi A. Moment maps, scalar curvature and quantization of Kähler manifolds. Comm Math Phys, 2004, 243:

543–559
30 Engliš M. Weighted Bergman kernels and balanced metrics. RIMS Kôkyûroku, 2006, 1487: 40–54
31 Catlin D. The Bergman kernel and a theorem of Tian. In: Analysis and Geometry in Several Complex Variables (Katata, 1997). Boston: Birkhäuser, 1999, 1–23
32 Zelditch S. Szegö kernels and a theorem of Tian. Int Math Res Not, 1998, 6: 317–331
33 Berman R, Berndtsson B, Sjöstrand J. A direct approach to Bergman kernel asymptotics for positive line bundles. Ark Mat, 2008, 46: 197–217
34 Lu Z. On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch. Amer J Math, 2000, 122: 235–273
35 Dai X, Liu K, Ma X. On the asymptotic expansion of Bergman kernel. J Differential Geom, 2006, 72: 1–41
36 Ma X, Marinescu G. Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds. Adv Math, 2008, 217: 1756–1815
37 Engliš M. A Forelli-Rudin construction and asymptotics of weighted Bergman kernels. J Funct Anal, 2000, 177: 257–281
38 Engliš M. The asymptotics of a Laplace integral on a Kähler manifold. J Reine Angew Math, 2000, 528: 1–39
39 Ma X, Marinescu G. Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels. Progress in Mathematics, vol. 254. Boston: Birkhǎuser, 2007
40 Xu H. A closed formula for the asymptotic expansion of the Bergman kernel. Comm Math Phys, 2012, 314: 555–585
41 Tian G. On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds. J Differential Geom, 1990, 32: 99–130
42 Gramchev T, Loi A. TYZ expansion for the Kepler manifold. Comm Math Phys, 2009, 289: 825–840
43 Engliš M, Zhang G. Ramadanov conjecture and line bundles over compact Hermitian symmetric spaces. Math Z, 2010, 264: 901–912
44 Faraut J, Korányi A. Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains. J Funct Anal, 1990, 88: 64–89
45 Faraut J, Thomas E G F. Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions. J Lie Theory, 1999, 9: 383–402
46 Zedda M. Berezin-Engliš quantization of Cartan-Hartogs domains. ArXiv:1404.1749, 2014
47 Loi A, Zedda M. Balanced metrics on Cartan and Cartan-Hartogs domains. Math Z, 2012, 270: 1077–1087
48 Berezin F A. Quantization. Math USSR Izv, 1974, 8: 1109–1163
49 Engliš M. Berezin quantization and reproducing kernels on complex domains. Trans Amer Math Soc, 1996, 348: 411–479
50 Cuccu F, Loi A. Balanced metrics on $\mathbb{C}^n$. J Geom Phys, 2007, 57: 1115–1123
51 Greco A, Loi A. Radial balanced metrics on the unit disk. J Geom Phys, 2010, 60: 53–59
52 Loi A. Bergman and balanced metrics on complex manifolds. Int J Geom Methods Mod Phys, 2005, 2: 553–561
53 Loi A, Zedda M. Balanced metrics on Hartogs domains. Abh Math Sem Univ Hamburg, 2011, 81: 69–77
54 Loi A, Zedda M, Zuddas F. Some remarks on the Kähler geometry of the Taub-NUT metrics. Ann Global Anal Geom, 2012, 41: 515–533
55 Zedda M. Canonical metrics on Cartan-Hartogs domains. Int J Geom Methods Mod Phys, 2012, 9: 1250011
56 Loi A, Mossa R. Berezin quantization of homogeneous bounded domains. Geom Dedicata, 2012, 161: 119–128
57 Zedda M. A note on the coefficients of Rawnsley's epsilon function of Cartan-Hartogs domains. Abh Math Sem Univ Hamburg, 2015, 85: 73–77
58 Wang A, Hao Y. The explicit solutions for a class of complex Monge-Ampère equations. Nonlinear Anal, 2014, 95: 639–649
59 Alexander H. Proper holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. Indiana Univ Math J, 1977, 26: 137–146
60 Forstneric F. Proper holomorphic mappings: A survey. In: Several Complex Variables, Mathematics Notes, vol. 38. Princeton: Princeton University Press, 1993, 297–363
61 Huang X J. On a linearity problem for proper holomorphic maps between balls in complex spaces of different dimansions. J Differential Geom, 1999, 51: 13–33
62 Diederich K, Fornaess J E. Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains. Math Ann, 1982, 259: 279–286
63 Henkin G M, Novikov R. Proper mappings of classical domains. In: Linear and Complex Analysis Problem Book, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1043. Berlin: Springer, 1984, 625–627
64 Mok N, Tsai I H. Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank $\geqslant 2$. J Reine Angew Math, 1992, 431: 91–122
65 Tsai I H. Rigidity of proper holomorphic maps between symmetric domains. J Differential Geom, 1993, 37: 123–160
66 Tu Z H. Rigidity of proper holomorphic maps between equidimensional bounded symmetric domains. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 1035–1042

67 Chen Z, Liu Y. The classification of proper holomorphic mappings between special Hartogs triangles of different dimensions. Chin Ann Math Ser B, 2008, 29: 557–566
68 Huang X J, Ji S, Yin W. On the third gap for proper holomorphic maps between balls. Math Ann, 2014, 358: 115–142
69 Ng S C. Holomorphic double fibration and its applications on the mapping problems of classical domains. Int Math Res Not, 2015, 2015: 291–324
70 Ng S C. On proper holomorphic mappings among irreducible bounded symmetric domains of rank at least 2. Proc Amer Math Soc, 2015, 143: 219–225
71 Tu Z H. Rigidity of proper holomorphic mappings between nonequidimensional bounded symmetric domains. Math Z, 2002, 240: 13–35
72 Kim S Y, Zaitsev D. Rigidity of CR maps between Shilov boundaries of bounded symmetric domains. Invent Math, 2013, 193: 409–437
73 Yin W P, Wang A, Zhao Z, et al. The Bergman kernel functions on Hua domains. Sci China Ser A, 2001, 44: 727–741
74 Ahn H, Byun J, Park J. Automorphisms of the Hartogs type domains over classical symmetric domains. Internat J Math, 2012, 23: 1250098
75 Yamamori A. The Bergman kernel of the Fock-Bargmann-Hartog and the polylogarithm function. Complex Var Elliptic Equ, 2013, 58: 783–793
76 Kim H, Ninh V T, Yamamori A. The automorphism group a certain unbounded non-hyperbolic domain. J Math Anal Appl, 2014, 409: 637–642
77 Agler J, Lykova N J, Young N J. The complex geomety of a domain related to μ-synthesis. J Math Anal Appl, 2015, 422: 508–543
78 Kosiński L. The group of automorphisms of the pentablock. Complex Anal Oper Theory, 2015, 9: 1349–1359
79 Costara C. The symmetrized bidisc and Lempert's theorem. Bull Lond Math Soc, 2004, 36: 656–662
80 Edigarian A. A note on Costara's paper. Ann Polon Math, 2004, 83: 189–191

Metrics and rigidity on Hartogs-type domains

FENG ZhiMing, TU ZhenHan & WANG Lei

Abstract This paper mainly deals with the metrics and rigidity on some Hartogs-type domains in several complex variables. Firstly, we describe the Bergman kernel expansions of canonical metrics for the Hartogs domains over bounded symmetric domains, and we also obtain necessary and sufficient conditions for the canonical metrics to be balanced metrics. Secondly, we give the rigidity of proper holomorphic mappings on several Hartogs domains (i.e., Hua domains, Fock-Bargmann-Hartogs domains and pentablock).

Keywords Bergman kernels, Cartan-Hartogs domains, Kähler metrics, bounded symmetric domains, proper holomorphic mappings, rigidity, balanced metrics

MSC(2010) 32A25, 32M15, 32Q15

doi: 10.1360/N012015-00129