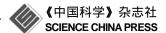
SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica

phys.scichina.com



论文

无限周期声子晶体全反射隧穿效应的机理研究

刘启能 ①②*

- ① 重庆工商大学废油资源化技术与装备教育部工程研究中心, 重庆 400067;
- ② 重庆工商大学, 计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067
- *联系人, E-mail: liuqineng@yahoo.com.cn

收稿日期: 2011-08-18;接受日期: 2011-09-22;网络出版日期: 2012-01-13 重庆市教委科技基金资助项目(编号: KJ100717)

摘要 建立了一维无限周期声子晶体的谐振腔模型,利用谐振腔的共振条件推导出全反射隧穿导带频率满足的解析公式,从理论上解释了一维无限周期声子晶体全反射隧穿效应产生的物理机理.利用频率的解析公式对全反射隧穿导带的频率随导带级数、腔厚度以及入射角的变化规律进行了研究,圆满地解释了一维无限周期声子晶体的全反射隧穿效应的变化规律.并且将共振理论的结果与色散法的结果进行比较,其结果完全吻合.

关键词 声子晶体,全反射,隧穿效应,机理

PACS: 42.70.Qs, 43.35.+d, 46.40.-f

doi: 10.1360/132011-914

声子晶体的概念是 Kushwsha 等人于 1993 年提出的,所谓声子晶体就是其密度和弹性常数呈周期性变化的人造带隙材料. 弹性波在声子晶体中传播时会与声子晶体的周期结构发生相互作用,从而产生带隙. 由于利用声子晶体的带隙可以十分方便地控制声波的传播,因此声子晶体在现代科学技术上有着十分广泛的应用前景. 这使得对声子晶体的研究成为目前声学的前沿领域内一个活跃的课题.

目前对一维声子晶体的研究在带隙特性、缺陷模特性以及滤波理论等方面都取得了丰富成果^[1-10].由于声子晶体与光子晶体有着相似的结构特征,人们对声子晶体的研究常常受到来自光子晶体研究的启示,最近文献[11]中利用传输矩阵法研究了光以大于

全反射角入射一维光子晶体时出现的全反射隧穿现象,得出了一维光子晶体的全反射隧穿现象随光子晶体的结构参数的变化特征. 随后文献[12]利用传输矩阵法进一步研究了一维光子晶体的全反射隧穿效应的滤波特性,发现一维光子晶体的全反射隧穿效应比一维掺杂光子晶体具有更好的梳状滤波特性. 但是,在文献[11,12]中有两个重要问题没有给予解决: (1) 对光子晶体全反射隧穿效应的产生物理机理没有给出解释; (2) 没有得出光子晶体的全反射隧穿效应中各参量满足的解析表达式,从而不能对全反射隧穿效应中各参量间的内在联系进行解析分析. 这样使得对光子晶体的全反射隧穿效应这一新现象产生的物理机理以及变化规律的认识和理解不够深

引用格式: 刘启能. 无限周期声子晶体全反射隧穿效应的机理研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42: 116–121 Liu Q N. The mechanism of the total reflection tunnel effect of infinite period phononic crystal (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2012, 42: 116–121, doi: 10.1360/132011-914 刻,有待作进一步的研究.

弹性波以大于全反射角入射一维无限周期声子 晶体是否会出现全反射隧穿现象呢? 如果能出现其 产生的物理机理是什么呢? 能否导出全反射隧穿现 象中各参量间满足的解析公式呢? 这些都是具有重 要理论价值的问题. 本文将根据一维无限周期声子 晶体的机构特征建立其谐振腔模型,利用波在势井 中的共振隧穿理论解释全反射隧穿效应产生的物理 机理,推导出一维无限周期声子晶体全反射隧穿导 带的频率满足的解析公式,分析全反射隧穿导带的 频率与声子晶体结构参量之间的依赖关系, 并将共 振理论的结果与色散法的结果进行比较研究.

1 模型与现象

设计这样一种一维无限周期声子晶体, 它是由 有机玻璃(其密度为 ρ_1 、厚度为 d_1)和水(其密度为 ρ_2 、 厚度为d,)两种介质周期性地交替构成,其周期为无 限多个, 如图 1. 设入射空间的介质也为水, 即 ρ_2 = ρ_0 . 有机玻璃、水的密度、波速分别为: $\rho_1 = 1180$ $(kg m^{-3})^{-1}$, $\rho_2 = \rho_0 = 1000 (kg m^{-3})^{-1}$, $v_{1L} = 2670$ $(kg m^{-3})^{-1}, v_{1T} = 1120 (kg m^{-3})^{-1}, v_{2L} = v_{0L} = 1120$

$$M_{1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1L} + \frac{k_{1L}\sin\theta_{1T}\sin2\theta_{1L}}{k_{1T}\cos2\theta_{1T}} & -\left(\cos\theta_{1L} + \frac{k_{1L}\sin\theta_{1T}\sin2\theta_{1L}}{k_{1T}\cos2\theta_{1T}}\right) \\ ik_{1L}(\lambda_{1} + 2\mu_{1}\cos^{2}\theta_{1L}) + ik_{1T}\mu_{1}\sin2\theta_{1T}\frac{\sin\theta_{1L}}{\cos\theta_{1T}} & ik_{1L}(\lambda_{1} + 2\mu_{1}\cos^{2}\theta_{1L}) + ik_{1T}\mu_{1}\sin2\theta_{1T}\frac{\sin\theta_{1L}}{\cos\theta_{1T}} \end{bmatrix}$$

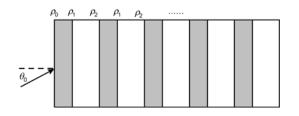
$$M_{2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{2L} & -\cos\theta_{2L} \\ ik_{2L}\lambda_{2} & ik_{2L}\lambda_{2} \end{bmatrix}, \quad G_{1} = \begin{bmatrix} e^{-ik_{1L}d_{1}\cos\theta_{1L}} & 0 \\ 0 & e^{ik_{1L}d_{1}\cos\theta_{1L}} \end{bmatrix}, \quad G_{2} = \begin{bmatrix} e^{-ik_{2L}d_{2}\cos\theta_{2L}} & 0 \\ 0 & e^{ik_{2L}d_{2}\cos\theta_{2L}} \end{bmatrix}.$$

矩阵中 λ 和 μ 为拉梅常数, θ 为传播角.该一维无限 周期声子晶体的色散关系为

$$\cos(Kd) = (m_{11} + m_{22})/2, \tag{3}$$

当(3)式的绝对值 $|\cos(Kd)| \le 1$ 时, K 为实数, 布洛赫 波为非衰减波, 对应弹性波的导带. 当 |cos(Kd)|>1 时, K 为复数, 布洛赫波为衰减波, 对应弹性波的禁带. 为了便于绘出导带的图像, 引入色散函数为

$$F = 1 - \left| \cos(Kd) \right| = 1 - \left| (M_{11} + M_{22}) / 2 \right|$$
. (4) 利用(4)式绘出色散函数 F 的图像,在 F 的图像中 $F \ge 0$ 对应弹性波的导带, $F < 0$ 对应弹性波的禁带,这种方法称色散法. 利用(1)-(4)式可以研究弹性波在大



一维无限周期声子晶体 Figure 1 1D infinite period phononic crystal.

 $(kg m^{-3})^{-1}$,下标中L表示纵波、T表示横波. 由波的 折射定律可知, 当弹性波(纵波)从波速小(vo,)的介 质入射到波速大(火山)的介质的分界面时会发生全反 射现象, 其全反射角为 $\theta_m = \arcsin v_{0L} / v_{1L}$. 弹性波从 水中射入到该声子晶体其全反射角为 $\theta_m = 0.6$ rad. 取中心频率 $f_0 = 10000$ Hz. 设归一化频率 $g = f / f_0$, f 为入射波的频率.

为了对一维无限周期声子晶体全的反射隧穿效 应的特征有一个初步的认识,首先利用色散方法[13] 进行研究, 该声子晶体的一个周期的传输矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = M_2^{-1} M_1 G_1 M_1^{-1} M_2 G_2, \qquad (1)$$

其中

$$-\left(\cos\theta_{1L} + \frac{k_{1L}\sin\theta_{1T}\sin2\theta_{1L}}{k_{1T}\cos2\theta_{1T}}\right) + ik_{1L}(\lambda_1 + 2\mu_1\cos^2\theta_{1L}) + ik_{1T}\mu_1\sin2\theta_{1T}\frac{\sin\theta_{1L}}{\cos\theta_{1T}}\right),$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} e^{-ik_{2L}d_2\cos\theta_{2L}} & 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

取 $d_1 = v_{1L}/4f_0$, $d_2 = v_{2L}/4f_0$,利用(1)-(4)式计 算出弹性波以入射角 $\theta_0 = 0.62$ rad 入射该声子晶体 其色散函数 F 随归一化频率 g 的响应曲线, 如图 2. 由图 2 可知, 当弹性波以入射角 $\theta_0 = 0.62$ rad 入射一 维无限周期声子晶体时出现了3个导带, 这表明产生 了全反射隧穿效应. 其全反射隧穿效应具有以下特 征:全反射隧穿效应是由多级导带组成,频率最低的 隧穿导带称为一级隧穿导带, 随着频率的增大分别 称为二级隧穿导带、三级隧穿导带、……图 2

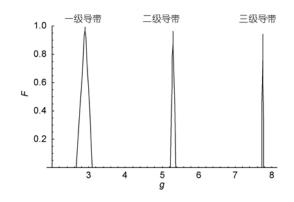


图 2 色散函数随归一化频率响应曲线(θ_0 =0.6 rad)

Figure 2 Response curves of dispersion function versus frequency.

中一级全反射隧穿导带的归一化频率中心在 g=2.8 附近,二级全反射隧穿导带的归一化频率中心在 g=5.3 附近,三级全反射隧穿导带的归一化频率中心在 g=7.7 附近.

2 共振理论

为什么会产生一维无限周期声子晶体的全反射 隧穿效应呢?这应该从一维无限周期声子晶体的结构特征以及波的全反射特征入手进行分析:当弹性 波以大于全反射角入射该声子晶体时,由于 $\nu_{0L} < \nu_{1L}$, 弹性波会在从 ρ_0 入射到 ρ_1 的界面上发生全反射,但 弹性波并不是完全不能进入 ρ_1 中,弹性波能够以倏 逝波的形式进入 ρ_1 约一个波长的深度 [14].而该声子晶体中 ρ_1 的厚度 d_1 约为 0.25 个波长,因此弹性波能够穿过 ρ_1 进入 ρ_2 中。当弹性波进入 ρ_2 层后,会在 ρ_2 层的前后两个平行界面间往复地全反射,这时 ρ_2 层层就成为一个势垒很高的势井,也就形成一个谐振腔,如图 3.该一维无限周期声子晶体就由无限多个这样的谐振腔连续排列组成。由谐振腔的理论可知,满足下列驻波条件的弹性波才能在 ρ_2 层发生共振而存在:

 $2d_2\cos\theta_0 = j\lambda_2 = jv_{2L}/f$, $j=1,2,3,\cdots$, (5) 其中 λ_2 为弹性波在 ρ_2 中的波长. 由量子力学的隧穿理论可知,满足(5)式频率的弹性波会在 ρ_2 层中由于共振而积蓄足够的能量,并且满足(5)式的弹性波在谐振腔内相邻两次往复反射所产生的透射波会发生

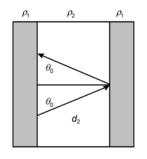


图 3 谐振腔模型 Figure 3 resonant cavity model.

相长干涉. 因此, 这些频率的弹性波就能够穿过高势垒产生一维无限周期声子晶体的全反射隧穿效应. 这就是一维无限周期声子晶体的全反射隧穿效应产生的物理机理. 由于波的共振理论是波在空间受限区域内传播的重要理论, 它不仅能够从本质上解释波在空间受限区域内产生的一系列现象, 如共振现象、隧穿现象、模式现象等, 而且能够得出共振频率与各参量间的解析关系. 因此, 共振理论对于研究声子晶体和光子晶体这类空间受限系统是一种十分重要的理论方法, 特别是在研究声子晶体和光子晶体中一些现象的形成机理方面共振理论能够给出清晰的物理图像, 这是其他数值计算方法所不及的. 例如本文作者还利用共振理论成功地解释了一维声子晶体的缺陷模[10]和一维光子晶体的缺陷模[15]的形成机理.

由(5)式可得全反射隧穿导带的归一化频率满足的解析公式:

 $g_j = jv_{2L}/(2d_2f_0\cos\theta_0), \quad j=1,2,3,\cdots$ (6) 由(6)式可以看出隧穿导带的归一化频率 g_j 与自然数变量 j 有关,这个 j 正是用来确定全反射隧穿导带的级数的变量, j=1 对应一级隧穿导带, j=2 对应二级隧穿导带、……因此把 j 称为隧穿导带级数. 由(6)式看出归一化频率 g_j 随着级数 j 成正比变化. 这个结论正好对图2由色散法得出的全反射隧穿效应的特征给出了圆满解释. 固定 $d_2 = v_{2L}/4f_0$, $\theta_0 = 0.62$ rad,由(6)式计算出一级、二级、三级隧穿导带的归一化频率分别为 $g_1 = 2.5, \quad g_2 = 4.9, \quad g_3 = 7.4$,这些数值与图 2 中的数值吻合较好.

由(6)式可看出当介质材料一定时(v_{2L} 一定),全 反射隧穿导带的归一化频率由 d_2 , θ_0 和 i 三个参量完

全确定. d_2 , θ_0 和 j 三个参量各自的物理含义以及对全 反射隧穿导带的归一化频率影响作用是什么呢? 谐 振腔厚度 d₂ 是谐振腔的结构参数, 它描述波在谐振 腔传播的空间距离. 入射角 60 是描述波入射声子晶 体的初始条件, 波在谐振腔中往返一次的波程为 $2d_2\cos\theta_0$, 即往返一次的波程由 d_2 和 θ_0 共同决定. 往 返一次的波程为波长的整数倍(i)的波在谐振腔内会 发生共振, 因此导带级数 j 就是谐振腔的共振模式 量子数, 它是描述谐振腔内共振频率高低级别的物 理量. 因此, d_2 , θ_0 和 i 三个参量对全反射隧穿导带的 归一化频率的影响弄清楚了,全反射隧穿效应的变 化规律就掌握了. 由于i的取值情况和它对全反射隧 穿导带结构特征的影响在前面已经作了讨论. 下面 进一步对 d_2 和 θ_0 两个参量对全反射隧穿导带归一化 频率的影响进行研究, 并将结果与色散法的计算结 果进行比较.

2.1 频率随腔厚度变化

谐振腔厚度就是(6)式中的 d_2 ,为了研究方便令 $d_2 = X(v_{2L}/f_0)$, X 为无量纲的参变量,腔厚度的变化通过 X 的变化实现.则(6)式化为

$$g_{j} = j/(2X\cos\theta_{0}), \quad j=1, 2, 3, \dots$$
 (7)

由(7)式计算出弹性波以 $\theta_0 = 0.62$ rad 入射时其一级、二级、三级隧穿导带的归一化频率为

$$g_1 = 1/(2X\cos 0.62),$$

$$g_2 = 2/(2X\cos 0.62),$$

$$g_3 = 3/(2X\cos 0.62).$$
(8)

由(8)式绘出归一化频率随腔厚度的响应曲线,如图 4. 由色散法计算出归一化频率随腔厚度的响应曲线,如图 5. 图 5 中的三条白色带分别为一级、二级、三级隧穿导带.由(8)式、图 4 和 5 可知:

- (i)(8)式给出一级、二级、三级隧穿导带的归一化频率都随腔厚度成反比变化,这个结论与色散法的结果(图 5 中的图像)完全吻合.
- (ii) 由(8)式计算出一级、二级、三级隧穿导带在 X=0.2 处其归一化频率分别为 $g_1=3.1$, $g_2=6.1$ 和 $g_3=9.2$. 而图 5 图像中在 X=0.2 处一级、二级、三级隧穿导带的归一化频率中心分别为 $g_1=3.5$, $g_2=6.5$, $g_3=9.5$. 这表明共振理论的结果与色散法的结果也吻合得很好.

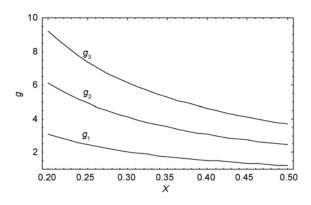


图 4 频率随腔厚度的响应曲线(共振理论)

Figure 4 Response curves of frequency versus thickness.

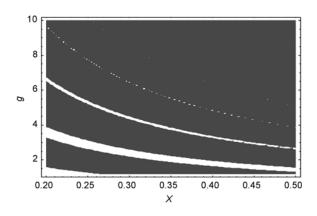


图 5 频率随腔厚度的响应曲线(色散法)

Figure 5 Response curves of frequency versus thickness.

2.2 频率随入射角变化

取 $d_2 = v_{2L} / 4f_0$,由(6)式得出一级、二级、三级 隧穿导带的归一化频率随入射角的变化关系为

 $g_1 = 2/\cos\theta_0$, $g_2 = 4/\cos\theta_0$, $g_3 = 6/\cos\theta_0$. (9) 由(9)式绘出 g_1 , g_2 , g_3 随入射角的响应曲线, 如图 6. 利用色散法绘出 g_1 , g_2 , g_3 随入射角的响应曲线, 如图 7. 由(9)式、图 6 和 7 可知:

- (i)(9)式给出一级、二级、三级隧穿导带的归一化频率都随入射角的余弦成反比变化,归一化频率随入射角的增加而增大,这一个结论与色散法的结果(图7中的图像)完全吻合.
- (ii) 由(9)式计算出一级、二级、三级隧穿导带在 θ_0 = 0.7 rad 处其归一化频率分别为 g_1 = 2.5, g_2 = 4.9, g_3 = 7.4. 而图 7 图像中在 θ_0 = 0.6 rad 处一级、二级、三级隧穿导带的归一化频率中心分别为 g_1 = 2.7,

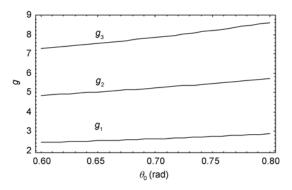


图 6 频率随入射角的响应曲线(共振理论)

Figure 6 Response curves of frequency versus incident angle.

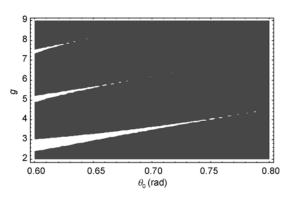


图 7 频率随入射角的响应曲线(色散法)

Figure 7 Response curves of frequency versus incident angle.

 $g_2 = 5.0$, $g_3 = 7.4$. 这表明共振理论的结果与色散法的结果也吻合得很好.

3 结论

前面通过建立一维无限周期声子晶体的谐振腔 模型,利用谐振腔的共振条件推导出一维无限周期 声子晶体全反射隧穿导带的频率满足的解析公式, 从理论上解释了一维无限周期声子晶体的全反射隧 穿效应产生的物理机理. 利用频率的解析公式对全 反射隧穿导带的频率随导带级数、腔厚度以及入射角 的变化规律进行了研究,圆满地解释了一维无限周 期声子晶体的全反射隧穿效应的变化规律. 并且与 色散法的计算结果进行了比较,结果发现两种方法 得出的结论是完全吻合的. 由于色散法和共振理论 建立在不同的理论基础上,这种吻合表明本文建立 的一维无限周期声子晶体的谐振腔模型以及全推导 出的全反射隧穿导带频率的解析公式都是正确的. 由共振理论导出的解析公式便于对各参量间的依赖 关系进行解析研究, 弥补了一维声子晶体研究中其 他数值计算方法的不足.

参考文献

- 1 Jesen J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. J Sound Vib, 2003, 266(5): 1053–1078
- 2 Wang G, Yu D L, Wen J H. One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures. Phys Lett A, 2004, 327(5-6): 512–521
- 3 Cao Y J, Dong C H, Zhou P Q. Transmission properties of one-dimensional qusi-periodical phononic crystal (in Chinese). Acta Phys Sin, 2006, 55(12): 6470–6473 [曹永军,董纯红,周培勤.一维准周期结构声子晶体透射性质的研究.物理学报, 2006, 55(12): 6470–6473]
- Wen J H, Wang G, Liu Y Z. Lumped-mass method on calculation of elastic band gaps of one-dimensional phononic crystals (in Chinese). Acta Phys Sin, 2004, 53(10): 3384–3387 [温激鸿, 王刚, 刘耀宗. 基于集中质量法的一维声子晶体弹性波带隙计算. 物理学报, 2004, 53(10): 3384–3387]
- 5 Wang W G, Liu Z Q, Zhao D G. Resonant tunneling of acoustic waves in 1D phononic crystal (in Chinese). Acta Phys Sin, 2006, 55(9): 4744–4747 [王文刚, 刘正猷, 赵德刚, 声波在一维声子晶体中共振隧穿的研究, 物理学报, 2006, 55(9): 4744–4747]
- 6 Yan Z Z, Wang Y S. Wavelet-based method for computing elastic band gaps of one-dimensional phononic crystals. Sci China Ser G-Phys Mech Astron, 2007, 50(5): 622-630 [闫志忠, 汪越胜. 一维声子晶体弹性波带隙计算小波方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2007, 37(4): 544-511]
- 7 Liu Q N. Transfer characteristic of one-dimensional phononic crystal (in Chinese). J Synth Cryst, 2008, 37(1): 179–182 [刘启能. 一维声子晶体的传输特性. 人工晶体学报, 2008, 37(1): 179–182]
- 8 Liu Q N. Transmission characteristics of elastic wave in 1D solid-solid cylindrical phononic crystal (in Chinese). Acta Phys Sin, 2011, 60(3): 0343011 [刘启能. 一维固-固结构圆柱声子晶体中弹性波的传输特性. 物理学报, 2011, 60(3): 0343011]
- 9 Liu Q N. The defect model of the elastic wave in the 1D doping phononic crystal of sol id2sol id constitute. Chin J Comput Mech, 2010, 27(1): 151–156 [刘启能. 固-固掺杂结构声子晶体中弹性波的缺陷模. 计算力学学报, 2010, 27(1): 151–156]

- 10 Liu Q N. Analytic method of studying defect mode of 1D doped phononic crystal (in Chinese). Acta Phys Sin, 2011, 60(4): 0443021 [刘启能. 研究一维掺杂声子晶体缺陷模的解析方法. 物理学报, 2011, 60(4): 0443021]
- 11 Liu Q N. Total reflection through effect of light in 1D photonic crystal. Acta Photon Sin, 2011, 40(2): 232-235 [刘启能. 光在一维光子晶体中的全反射贯穿效应. 光子学报, 2011, 40(2): 232-235]
- 12 Liu Q N. Theoretic study of total ref lection through effect polarization filter of photonic crystal (in Chinese). High Power Laser Particle Beams, 2011, 23(4): 1091–1094 [刘启能. 光子晶体全反射贯穿偏振滤波器的理论研究. 强激光与粒子束, 2011, 23(4): 1091–1094]
- 13 Liu Q N. Dispersive Study on the Photonic Bandgap of Solid and Fluid Phononic Crystal (in Chinese). J Synth Cryst, 2009, 38(1): 107–111 [刘启能. 固-流结构声子晶中弹性波能带的色散研究. 人工晶体学报, 2009, 38(1): 107–111]
- 14 季家镕. 高等光学教程. 北京: 科学出版社, 2007
- 15 Liu Q N. A new method of study the defect mode of one-dimensional photonic crystal (in Chinese). Laser Infrared, 2008, 38(8): 799–802 [刘启能. 一种研究一维光子晶体缺陷模的新方法—解析法. 激光与红外, 2008, 38(8): 799–802]

The mechanism of the total reflection tunnel effect of infinite period phononic crystal

LIU QiNeng^{1,2*}

Set up a resonant cavity model and the analytical formulas of the total reflection tunnel effect frequency of 1D infinite period phononic crystal is deduced by resonance conditions of the resonant cavity. The physical mechanism of the total reflection tunnel effect of 1D infinite period phononic crystal is explained. Using the analytical formulas the change rule of the total reflection tunnel effect that response curves of frequency versus order number of band and incident angle and thickness of resonant cavity are studied. Resonance theory results and dispersion method results are compared and their results are the same.

phononic crystal, total reflection, tunnel effect, mechanism

PACS: 42.70.Qs, 43.35.+d, 46.40.-f

doi: 10.1360/132011-914

¹ Engineering Research Center for Waste Oil Recovery Technology and Equipment, Ministry of Education, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

² Computer Science and Information Engineering College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China