论 文

Banach 空间中时变广义分布参数系统的可解性

葛照强^{①*}, 冯德兴^②^① 西安交通大学应用数学系, 西安 710049^② 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

* 通信作者. E-mail: gezqjd@mail.xjtu.edu.cn

收稿日期: 2012-08-07; 接受日期: 2012-10-13

国家自然科学基金 (批准号:61174081) 资助项目

摘要 广义分布参数系统是比较分布参数系统更常见的一类系统,二者有着本质的区别,如广义分布参数系统受到干扰时会引起脉冲行为等. 广义分布参数系统的可解性问题是广义分布参数系统研究的重要问题之一. 本文主要研究 Banach 空间中时变广义分布参数系统的可解性问题. 首先,讨论 Banach 空间中由有界线性算子所引导的广义发展算子及其性质,定义了广义发展算子的生成元,证明了广义发展算子的存在性;然后,应用广义发展算子研究时变广义分布参数系统的可解性问题,证明了强解的存在性和唯一性,并应用广义发展算子给出了时变广义分布参数系统强解的构造性表达式. 所得结果对于研究时变广义分布参数系统的稳定性问题、能控性问题及最优控制问题等都有重要的理论及应用价值.

关键词 可解性 强解 时变广义分布参数系统 广义发展算子 Banach 空间

1 引言

广义分布参数系统对研究许多不同自然现象的数学建模十分有用^[1~14]. 特别,在研究复合材料中温度分布问题,电磁耦合超导线路中的电压分布问题,电缆中的信号传播问题等时会出现这样的系统^[1~14]. 广义分布参数系统与一般的分布参数系统有本质的区别^[1~50],当受到干扰时,广义分布参数系统不仅会失稳,而且会使系统的结构发生很大变化,如引起脉冲行为等.

文献 [1] 全面总结了 1976 年以前关于广义分布参数系统的研究成果和应用背景. 随后,关于广义分布参数系统的研究引起了广泛的关注,取得了很多研究成果 (参见文献 [2~20, 22, 25~50]).

可解性问题是广义分布参数系统研究的重要问题之一. 研究广义分布参数系统的可解性不仅对于研究广义分布参数系统的稳定性十分重要,而且是研究能控性和最优控制等相关问题的基础.

文献 [1] 研究了时变广义分布参数系统解的存在和唯一性,并给出了广义分布参数系统的许多实例. 但是,遗憾的是没有给出解的构造性表达式. 文献 [2] 应用 Laplace 变换在 Banach 空间中研究了两类定常广义分布参数系统的求解问题,但这一方法不能用于解决非齐次时变广义分布参数系统的求解问题. 文献 [3~6] 在 Banach 空间中通过引进 B-evolution 和 Empathy 理论研究了一类齐次定常广义分布参数系统的可解性问题,文献 [8] 在 Banach 空间中通过算子分解的方法研究了一类齐次定常广义分布参数系统的可解性问题,文献 [12] 在 Euclidean 空间中应用分离变量法研究了两类齐次定常

引用格式: 葛照强, 冯德兴. Banach 空间中时变广义分布参数系统的可解性. 中国科学: 信息科学, 2013, 43: 386–406, doi: 10.1360/112012-501

广义分布参数系统的求解问题, 尽管以上 3 种方法分别解决了各自类型的广义分布参数系统的求解问题, 但它们不能用于解决齐次或非齐次时变广义分布参数系统的求解问题. 文献 [13,14] 在 Banach 空间中应用多值线性算子理论研究了时变广义分布参数系统的解的存在唯一性问题, 尽管给出了了解的构造性表达式, 但要求的条件太强以至于时变广义分布参数系统的求解问题与某个时变分布参数系统的求解问题等价, 从而失去了广义分布参数系统的很多性质. 文献 [15 ~ 20] 在 Banach 空间中通过引进退化半群理论研究了齐次定常广义分布参数系统的适定性问题; 文献 [22] 在 Hilbert 空间中研究了定常广义分布参数系统的可解性问题, 在一定的条件下给出了了解的构造性表达式; 文献 [32] 在局部凸空间通过引进 C-proagation family 研究了高阶齐次定常广义分布参数系统的 C-适定性问题; 文献 [33] 在 Hilbert 空间中通过 Laplace 变换研究了定常广义分布参数系统的求解问题; 文献 [44,45,47] 在 Hilbert 空间中通过引进广义算子半群理论研究了定常广义分布参数系统的求解问题; 文献 [50] 在 Hilbert 空间中通过引进广义软发展算子的方法在一定条件下研究了齐次时变广义分布参数系统的软解问题; 尽管以上方法在一定的条件下分别解决了各自所研究系统的求解问题, 但它们不能用于解决齐次或非齐次时变广义分布参数系统的求解问题.

从以上可以看出, 进一步研究时变广义分布参数系统的可解性问题及解的构造性表达式是十分必要的.

本文在以上论文的基础上通过在 Banach 空间中引进广义发展算子的方法研究时变广义分布参数系统

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Ex(t) = A(t)x(t) + f(t), & t > s \geq 0 \\ x(s) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

的可解性问题. 给出式 (1) 的强解的构造性表达式. 其中 $E, A(t) : X \rightarrow X$ 是 Banach 空间 X 中的线性算子, 且 E 是有界的.

首先, 在第 2 节中给出一些基本定义和基本结果. 然后, 在第 3 节中应用泛函分析和算子理论研究广义发展算子理论. 最后, 在第 4 节中应用广义发展算子理论研究时变广义分布参数系统 (1) 的可解性问题.

以下, X 表示实的 Banach 空间, $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数, $R = (-\infty, \infty)$, $R_+ = [0, \infty)$; $E, A(t) : X \rightarrow X$ 是线性算子且 E 有界, $D(A(t))$ 表示 $A(t)$ 的定义域, $\overline{D(A(t))}$ 表示 $D(A(t))$ 的闭包, $E(D(A(t))) = \{y : y = Ex, x \in D(A(t))\}$. 本文假定 $\|E\| = 1$.

2 预备知识

本节给出在以后各节要用到的基本定义和基本结果. 以下, A 表示与时间无关的线性算子.

定义 1 如果存在 $\omega \in R$, 使得对每个 $\lambda > 0$ 和 $\omega\lambda < 1$, 有 $\|(E - \lambda A)^{-1}x\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} \|x\|$ 对 $x \in X$, 则称 A 属于 $C_E(\omega)$ 类.

应用定义 1 可得如下引理 1:

引理 1 设 $A \in C_E(\omega)$, $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}E$, 则下列结论成立:

- (i) 对 $x \in X$, 有 $\|R_\lambda x\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} \|x\|$.
- (ii) 如果 $x \in D(A)$, 则 $\|R_\lambda x - x\| \leq \lambda(1 - \lambda\omega)^{-1} \|Ax\|$, 且对 $x \in D(A)$, 有 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} R_\lambda x = x$.
- (iii) 如果 $\omega \geq 0, n \geq 1$ 是一个整数, 则对 $x \in X$, 有 $\|R_\lambda^n x - x\| \leq n(1 - \lambda\omega)^{-n+1} \|R_\lambda x - x\|$.

(iv) 如果 $\mu > 0$ 且 $x \in X$, 则

$$(E - \lambda A)^{-1}x = \frac{\mu}{\lambda}(E - \mu A)^{-1}x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda}(E - \mu A)^{-1}E(E - \lambda A)^{-1}x. \quad (2)$$

称式 (2) 为广义豫解恒等式. 应用引理 1 可得引理 2.

引理 2 设 $A \in C_E(\omega)$, $A_\lambda = \lambda^{-1}(I - R_\lambda)$, 则下列结论成立:

(i) 如果 $0 < \mu \leq \lambda$, 则对 $x \in X$, 有 $(1 - \lambda\omega) \|A_\lambda x\| \leq (1 - \mu\omega) \|A_\mu x\|$.

(ii) 对 $x \in X$, 有 $\|A_\lambda x\| \leq \frac{1+(1-\lambda\omega)^{-1}}{\lambda} \|x\|$.

(iii) 如果 $x \in D(A)$, 则 $\|A_\lambda x\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} \|Ax\|$.

定义 2 设 $A \in C_E(\omega)$, 对 $x \in X$, 令

$$|Ax| = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|A_\lambda x\|, \quad (3)$$

$$\hat{D}(A) = \{x \in X : |Ax| < \infty\}. \quad (4)$$

在 (3) 式中, 允许 $|Ax| = \infty$, 对 $x \in X$ 引理 2 (i) 可保证 (3) 式中的极限存在. 由引理 2 (iii), 对 $x \in D(A)$, 有 $|Ax| \leq \|Ax\|$, 从而 $\hat{D}(A) \supseteq D(A)$. 由引理 2, 有引理 3.

引理 3 设 $A \in C_E(\omega)$, 则

(i) 对 $x \in X$, 有 $\|A_\lambda x\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} |Ax|$, 且 $\hat{D}(A) \subset \overline{D(A)}$;

(ii) 对 $x \in D(A)$, 有 $|Ax| \leq \|Ax_k\|$.

由引理 2 和 3 可得引理 4.

引理 4 对 $n = 1, 2, \dots$, 令 $x_n, x_0 \in X$, 且 $0 < \lambda < \lambda^0$. 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow x_0$, 则

$$|Ax_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{1 \leq k \leq n} |Ax_k|.$$

特别地, 如果 $|Ax_n|$ 有界, 则 $x_0 \in \hat{D}(A)$.

3 广义发展算子的概念和性质

为了研究时变广义分布参数系统 (1) 的可解性问题, 本节建立广义发展算子理论. 在本节中 T 是一个实数且 $T > 0$.

定义 3 X 上的一个有界线性算子族 $U(t, s) (0 \leq s \leq t \leq T)$ 被称为是由 E 引导的广义发展算子, 如果它满足如下条件 (i):

(i) $U(t, s) = U(t, \tau)EU(\tau, s)$, $T \geq t \geq \tau \geq s \geq 0$ 在 X 上成立; $U(t, t) = U_0$, $T \geq t \geq 0$, 其中 U_0 是 X 上的一个固定有界线性算子.

(ii) 如果广义发展算子 $U(t, s)$ 满足: 对每个 $x \in X$, $U(\cdot, s)x$ 在 $[s, T]$ 上强连续且 $U(t, \cdot)x$ 在 $[0, t]$ 上强连续, 则称 $U(t, s)$ 是强连续的广义发展算子.

(iii) 设 $U(t, s)$ 是一个广义发展算子, X_1 是 X 的一个子空间, $x, y \in X_1$, 如果存在 $\omega \in R$, $M_\omega > 0$ 及仅依赖于 $\|y\|, \omega$ 和 T 的常数 C 使

$$\|U(t+s, s)x - U(t+r, r)y\| \leq M_\omega e^{\omega t} \|x - y\| + C|s - r|, \quad 0 \leq t \leq T - s, \quad 0 \leq r \leq s \leq T, \quad (5)$$

则称 $U(t, s)$ 属于 $Q_m(X_1)$ 类型.

(iv) 设 $U(t, s)$ 是一个广义发展算子, 如果存在 $\omega \in \mathbb{R}, M_\omega > 0$ 使

$$\|U(t, s)x\| \leq M_\omega e^{\omega(t-s)}\|x\|, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad x \in X, \quad (6)$$

则称 $U(t, s)$ 是指数有界的.

定义 4 广义发展算子 $U(t, s)$ 的生成元 $A_0(t)$ 定义为

$$A_0(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{EU(t+h, t)Ex - EU(t, t)Ex}{h}, \quad x \in D(A_0(t)), \quad (7)$$

其中

$$D(A_0(t)) = \left\{ x \in X : U_0 Ex = x, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{EU(t+h, t)Ex - EU(t, t)Ex}{h} \text{ 存在} \right\}.$$

类似的可以定义广义发展算子 $U(t, s) (t \geq s \geq 0, t, s \in \mathbb{R}_+)$.

下面利用 $A(t) \in C_E(\omega)$ 构造一个由 E 引导的广义发展算子 $U(t, s)$, 并给出 $U(t, s)$ 的主要性质. 在本节中, 以下 ω 是一个实数, $A(t)$ 满足:

(P1) 对 $0 \leq t \leq T$, 有 $A(t) \in C_E(\omega)$.

(P2) $\overline{D(A(t))} = \overline{D}$ 与 t 无关 ($D(A(0)) = D$).

令 $R_\lambda(t) = (E - \lambda A(t))^{-1}E$. 与 t 有关的 $A(t)$ 满足下列条件之一:

(P3) 存在连续函数 $g: [0, T] \rightarrow X$ 和单调增函数 $J: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 使

$$\|[R_\lambda(t) - R_\lambda(\tau)]x\| \leq \lambda \|g(t) - g(\tau)\| J(\|x\|) \quad (8)$$

对 $0 < \lambda < \lambda_0, \lambda_0 \omega < 1, 0 \leq t, \tau \leq T$ 和 $x \in \overline{D}$ 成立.

(P4) 存在连续有界变差函数 $g: [0, T] \rightarrow X$ 和单调增函数 $J: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 使

$$\|[R_\lambda(t) - R_\lambda(\tau)]x\| \leq \lambda \|g(t) - g(\tau)\| J(\|x\|)(1 + |A(\tau)x|) \quad (9)$$

对 $0 < \lambda < \lambda_0, \lambda_0 \omega < 1, 0 \leq t, \tau \leq T$ 和 $x \in \overline{D}$ 成立. (如果存在常数 v , 只要 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$, 就有 $\sum_{i=1}^{n-1} \|g(t_{i+1}) - g(t_i)\| \leq v$, 则称 g 是 $[0, T]$ 上的有界变差函数).

注 1 令 $A(t) \in C_E(\omega), D(A(t)) = D$ 与 t 无关, $0 < \alpha \leq 1$. 如果 $\|[A(t) - A(\tau)]x\| \leq |t - \tau|^\alpha J(\|x\|)$ 对 $x \in D$ 及 $0 \leq \tau, t \leq T$ 成立, 则 $\|[R_\lambda(t) - R_\lambda(\tau)]x\| \leq \lambda |t - \tau|^\alpha J_1(\|x\|)$, 对 $x \in \overline{D}, 0 < \lambda < 1, \lambda \omega < 1/2$, 及 $0 \leq \tau, t \leq T$ 成立, 其中 $J_1(r) = 2J(C(r+1)), C$ 是某个适当的数. (这意味着 (P3) 成立).

注 2 令 $A(t) \in C_E(\omega), D(A(t)) = D$ 与 t 无关, $0 < \alpha \leq 1$. 如果

$$\|[A(t) - A(\tau)]x\| \leq |t - \tau|^\alpha J(\|x\|)(1 + \|A(\tau)x\|)$$

对 $x \in D$ 及 $0 \leq \tau, t \leq T$ 成立, 则 $\|[R_\lambda(t) - R_\lambda(\tau)]x\| \leq \lambda |t - \tau|^\alpha J_1(\|x\|)(1 + |A(\tau)x|)$, 对 $x \in \overline{D}, 0 < \lambda < 1, \lambda \omega < 1/2$ 及 $0 \leq \tau, t \leq T$ 成立, 其中 $J_1(r) = 4J(C(r+1)), C$ 是某个适当的数. (这意味着 (P4) 成立).

注 3 设 $g(t)$ 是条件 (P3) 或 (P4) 中引进的函数, 令

$$\rho(r) = \sup \{ \|g(t) - g(\tau)\| : 0 \leq t, \tau \leq T \text{ 且 } |t - \tau| \leq r \}. \quad (10)$$

则 $\rho: [0, \infty) \rightarrow [0, \rho(T)]$ 非减, $\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \rho(0) = 0$, 且 ρ 满足次可加性:

$$\rho(r+s) \leq \rho(r) + \rho(s), \quad \text{对 } r, s \geq 0.$$

由 (P3) 或 (P4) 立即可得 $\hat{D}(A(t))$ 与 t 无关. 式 (8) 两端同除以 λ 并令 $\lambda \rightarrow 0^+$, 有

$$|A(t)x| \leq |A(\tau)x| + \|g(t) - g(\tau)\|J(\|x\|), \quad (11)$$

类似的由式 (9) 可得

$$|A(t)x| \leq |A(\tau)x| + \|g(t) - g(\tau)\|J(\|x\|)(1 + |A(\tau)x|), \quad (12)$$

对 $0 \leq t, \tau \leq T$ 和 $x \in \bar{D}$ 成立. 对 $0 \leq t \leq T$, 令 $\hat{D} = \hat{D}(A(t))$.

本节的主要结论是如下的定理 1, 2 及推论 1.

定理 1 设 $A(t)$ 满足 (P1) 和 (P2), 如果 (P3) 或 (P4) 成立, 则有下列结论成立:

(i) 对 $x \in \bar{D}$ 及 $0 \leq s < t \leq T$,

$$V(t, s)Ex = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n R_{(t-s)/n} \left(s + i \left(\frac{t-s}{n} \right) \right) x \quad (13)$$

存在. 由 (13) 定义的 $V(t, s)$ 对 $0 \leq s = t \leq T$ 是一个确定的有界线性算子, 且在 $E(\bar{D})$ 上满足定义 3(i).

(ii) 对 $x \in \bar{D}$ 及 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有

$$\|V(t, s)Ex\| \leq e^{\omega(t-s)}\|Ex\|, \quad (14)$$

即 $V(t, s)$ 在 $E(\bar{D})$ 上是指数有界的.

(iii) 如果 $x \in \hat{D}$, 则对 $0 \leq s \leq t, \tau \leq T$, 存在常数 C , 使

$$\|V(t, s)Ex - V(\tau, s)Ex\| \leq C\rho(|t - \tau|), \quad (15)$$

其中 ρ 由式 (10) 给出.

(iv) $V(t, s)$ 是 $E(\bar{D})$ 上的强连续广义发展算子.

以下规定 $\prod_{i=j}^j A_i = A_j$; 如果 $k \geq j$, $\prod_{i=j}^{k+1} A_i = A_{k+1}(\prod_{i=j}^k A_i)$; 如果 $k < j$, $\prod_{i=j}^k A_i =$ 恒等算子, 其中 $\{A_i\}$ 是任一有界线性算子集.

在证明定理 1 之前, 先给出下面的定义和引理:

定义 5 对 $x \in \bar{D}$, 令 $M(x) = \sup_{0 \leq t \leq T} |A(t)x|$.

由式 (11) 和 (12) 直接可得, 如果 (P3) 或 (P4) 成立, 则对任一 $x \in \hat{D}$, 有 $M(x) < \infty$.

引理 5^[23] 设 $n \geq m > 0$ 都是整数, α, β 都是正数, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m C_n^k \alpha^k \beta^{n-k} (m-k) \leq [(n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta]^{\frac{1}{2}}, \\ \sum_{k=m}^n C_{m-1}^{k-1} \alpha^m \beta^{k-m} (n-k) \leq [m\beta/\alpha^2 + (m\beta/\alpha + m - n)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (16)$$

应用引理 1(i), 引理 3(i) 和 A_λ 的定义可得引理 6:

引理 6 存在仅依赖于 T, λ_0 和 ω 的常数 L_0 使得如果 $x \in \hat{D}, l \geq 0, 0 \leq s_i \leq T$, 其中 $i = 1, 2, \dots, l, 0 < \lambda \leq \lambda_0$ 且 $\lambda l < T$, 则

$$\left\| \prod_{i=1}^l R_\lambda(s_i)x - x \right\| \leq L_0 l \lambda M(x), \quad (17)$$

其中 $L_0 = \max\{1, \exp(\frac{T\omega}{1-\lambda_0\omega})\}$.

以下应用符号

$$Q_{\lambda,l}(s)x = \prod_{i=1}^l R_{\lambda}(s+i\lambda)x. \quad (18)$$

由引理 3(i), (ii), 式 (12) 和引理 6, 可得引理 7:

引理 7 设 (P4) 成立, $x \in \hat{D}$, 则存在仅依赖于 $\|x\|, M(x), \lambda_0, \omega$ 和 T 的常数 L , 当 $0 < \lambda \leq \lambda_0, l \geq 0, 0 \leq s \leq T - l\lambda$ 时, 有

$$M(Q_{\lambda,l}(s)x) \leq L, \quad (19)$$

其中

$$L = L_0[M(x) + vJ(\|x\| + L_0TM(x))] \exp[vJ(\|x\| + L_0TM(x))(1 + vJ(\|x\| + L_0TM(x))) + vJ(\|x\| + L_0TM(x))],$$

v 是 g 在 $[0, T]$ 上的变差.

定理 1 的证明 令 $x \in \hat{D}, \lambda_0 \geq \lambda \geq \mu > 0$, 记

$$a_{k,l} = \|[Q_{\lambda,k}(s) - Q_{\mu,l}(s)]x\|, k, l \geq 0, b_{k,l} = \|[R_{\mu}(s+k\lambda) - R_{\mu}(s+l\mu)]Q_{\mu,l-1}(s)x\|.$$

对 $k, l \geq 1$, 有

$$a_{k,l} = \|[Q_{\lambda,k}(s) - Q_{\mu,l}(s)]x\| \leq \|[R_{\lambda}(s+k\lambda)Q_{\lambda,k-1}(s) - R_{\mu}(s+k\lambda)Q_{\mu,l-1}(s)]x\| + b_{k,l}.$$

应用引理 1(i) 和 (iv) 可得

$$\begin{aligned} & \|[R_{\lambda}(s+k\lambda)Q_{\lambda,k-1}(s) - R_{\mu}(s+k\lambda)Q_{\mu,l-1}(s)]x\| \\ & \leq \left\| (E - \mu A(s+k\lambda))^{-1} \left[\frac{\mu}{\lambda} E Q_{\lambda,k-1}(s) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} E R_{\lambda}(s+k\lambda) Q_{\lambda,k-1}(s) - E Q_{\mu,l-1}(s) \right] x \right\| \\ & \leq (1 - \mu\omega)^{-1} \left\| \left[\frac{\mu}{\lambda} E Q_{\lambda,k-1}(s) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} E R_{\lambda}(s+k\lambda) Q_{\lambda,k-1}(s) - E Q_{\mu,l-1}(s) \right] x \right\| \\ & \leq (1 - \mu\omega)^{-1} \left\{ \frac{\mu}{\lambda} \|[Q_{\lambda,k-1}(s) - Q_{\mu,l-1}(s)]x\| + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \|[Q_{\lambda,k}(s) - Q_{\mu,l-1}(s)]x\| \right\} \\ & \leq (1 - \mu\omega)^{-1} \left[\frac{\mu}{\lambda} a_{k-1,l-1} + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} a_{k,l-1} \right]. \end{aligned}$$

从而对 $k, l \geq 1$, 有

$$a_{k,l} \leq \alpha_1 a_{k-1,l-1} + \beta_1 a_{k,l-1} + b_{k,l}, \quad (20)$$

其中 $\alpha_1 = \alpha(1 - \mu\omega)^{-1}, \beta_1 = \beta(1 - \mu\omega)^{-1}, \alpha = \frac{\mu}{\lambda}, \beta = \frac{\lambda-\mu}{\lambda}$. 应用引理 $A^{[51]}$, 由式 (20) 可得

$$\begin{aligned} a_{m,n} & \leq \sum_{i=0}^{\min\{m-1,n\}} \beta_1^{n-i} \alpha_1^i C_n^i a_{m-i,0} + \sum_{i=m}^n \beta_1^{i-m} \alpha_1^m C_{i-1}^{m-1} a_{0,n-i} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta_1^{j-i} \alpha_1^i C_j^i b_{m-i,n-j}. \end{aligned} \quad (21)$$

由引理 6 可得

$$a_{l,0} = \|Q_{\lambda,l}(s)x - x\| \leq L_0 l \lambda M(x), \quad (22)$$

$$a_{0,l} = \|x - Q_{\mu,l}(s)x\| \leq L_0 l \mu M(x), \quad (23)$$

应用式 (21) ~ (23) 及引理 5, 有

$$\begin{aligned} a_{m,n} \leq & CM(x) \left\{ [(n\mu - m\lambda)^2 + n\mu(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}} + [(n\mu - m\lambda)^2 + m\lambda(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta_1^{j-i} \alpha_1^i C_j^i b_{m-i,n-j}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 C 仅依赖于 T, ω 和 λ_0, m, n 满足 $m\lambda, n\mu \leq T - s$. 下面在假设 (P3) 或 (P4) 下, 估计 $b_{k,l}$. 如果 (P3) 成立, 则由式 (8) 可得

$$b_{k,l} \leq \mu \|g(s + l\mu) - g(s + k\lambda)\| J(\|Q_{\mu,l-1}(s)x\|).$$

由引理 6, $\|Q_{\mu,l-1}(s)x\|$ 有界. 因此, 存在 C (用 C 表示不同的常数) 使

$$b_{k,l} \leq \mu C \|g(s + l\mu) - g(s + k\lambda)\|. \quad (25)$$

类似于上面讨论, 并应用引理 6 和 7, 可得式 (25) 在条件 (P4) 下也成立. 因此, 在条件 (P3) 或 (P4) 下, 存在 C 使得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta_1^{j-i} \alpha_1^i C_j^i b_{m-i,n-j} \\ & \leq C\mu(1 - \mu\omega)^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \rho(|(n-j)\mu - (m-i)\lambda|) \\ & \leq C\mu(1 - \mu\omega)^{-n} [n\rho(|n\mu - m\lambda|) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \rho(|j\mu - i\lambda|)]. \end{aligned} \quad (26)$$

式 (26) 中的第一个不等式应用了式 (25), 及 α_1, β_1 和 ρ 的定义, 第二个不等式应用了 ρ 的次可加性及估计式:

$$\sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \leq 1.$$

下面对于给定的 $\delta > 0$, 令

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \rho(|j\mu - i\lambda|), |j\mu - i\lambda| < \delta, \\ I_2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \rho(|j\mu - i\lambda|), |j\mu - i\lambda| \geq \delta. \end{aligned}$$

则 $\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1,j\}} \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \rho(|j\mu - i\lambda|) = I_1 + I_2$. 显然 $I_1 \leq n\rho(\delta)$, 应用

$$\sum_{i=0}^j C_j^i \alpha^i \beta^{j-1} = (\alpha + \beta)^j, \sum_{i=0}^j i C_j^i \alpha^i \beta^{j-i} = \alpha j (\alpha + \beta)^j,$$

$$\sum_{i=0}^j i^2 C_j^i \alpha^i \beta^{j-i} = \alpha^2 j(j-1)(\alpha+\beta)^{j-2} + \alpha j(\alpha+\beta)^{j-1}$$

及 $\alpha + \beta = 1$, 可得

$$I_2 \leq \rho(T) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j \beta^{j-i} \alpha^i C_j^i \frac{(j\mu - i\lambda)^2}{\delta^2} \leq \frac{\rho(T)}{\delta^2} n(n-1)(\lambda\mu - \mu^2) \leq \frac{\rho(T)}{\delta^2} n^2 \mu(\lambda - \mu).$$

因此, 对所有 $\delta > 0$, 有

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\min\{m-1, j\}} \beta_1^{j-i} \alpha_1^i C_j^i b_{m-i, n-j} \leq C(1 - \mu\omega)^{-n} n\mu[\rho(n\mu - m\lambda) + \rho(\delta) + \frac{\rho(T)}{\delta^2} n\mu(\lambda - \mu)]. \quad (27)$$

由式 (24) 和 (27) 可得, 存在 C 使得

$$a_{m,n} \leq C\{[(n\mu - m\lambda)^2 + n\mu(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}} + [(n\mu - m\lambda)^2 + m\lambda(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}} + n\mu\rho(|n\mu - m\lambda|) + n\mu\rho(\delta) + \frac{\rho(T)}{\delta^2} n^2 \mu^2(\lambda - \mu)\}, \quad (28)$$

其中 C 仅依赖于 $\|x\|, M(x), \rho(T), \omega, \lambda_0$ 和 T . 选取 $\delta^2 = \sqrt{\lambda - \mu}$. 由式 (28), 对 $m, n \geq 1, 0 < n\mu, m\lambda \leq T - s$, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有 $a_{m,n} \rightarrow 0$, 且极限对 s 是一致的. 从而, 如果 $\{\lambda_n\}$ 满足 $0 \leq n\lambda_n \leq T - s, n\lambda_n \rightarrow \tau (n \rightarrow \infty)$, 则

$$V(t + \tau, s)Ex = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n R_{\lambda_n}(s + i\lambda_n)x, x \in \hat{D}$$

存在, 极限对 s 是一致的, 且与 $\{\lambda_n\}$ 无关. 因为

$$\left\| \prod_{i=2}^n R_{(t-s)/n} \left[s + \frac{i(t-s)}{n} \right] \left(E - \frac{t-s}{n} A \left(s + \frac{t-s}{n} \right) \right)^{-1} Ex \right\| \leq \left(1 - \omega \frac{t-s}{n} \right)^{-n} \|Ex\|, \quad x \in \bar{D},$$

由 $(1 - \omega \frac{t-s}{n})^{-n}$ 在 $\bar{D}$ 上作为 Lipschitz 常数且 $(1 - \omega \frac{t-s}{n})^{-n} \rightarrow e^{\omega(t-s)} (n \rightarrow \infty)$, 所以对每一 $x \in \bar{D}$ 由上面极限定义的 $V(t, s)E$ 存在, 对 $0 \leq s < t \leq T$ 一致收敛, 且对 $x \in \bar{D}$, 有 $\|V(t, s)Ex\| \leq e^{\omega(t-s)} \|Ex\|$. 这就证明了当 $0 \leq s < t \leq T$ 时 $V(t, s)$ 的存在性及估计式 (14) 成立. 还需要证明在 $E(\bar{D})$ 上广义发展算子的性质成立.

设 $0 \leq r \leq T, \tau, t > 0$ 及 $r + \tau + t \leq T$, 选取正整数列 $\{k(n)\}$ 满足 $\frac{k(n)t}{n} \leq \tau$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{k(n)t}{n} \rightarrow \tau$, 则

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{i=1}^{k(n)} R_{t/n} \left(r + t + \frac{it}{n} \right) \right] \left[\prod_{i=2}^n R_{t/n} \left(r + \frac{it}{n} \right) \right] \left(E - \frac{t}{n} A \left(r + \frac{t}{n} \right) \right)^{-1} Ex \\ &= \prod_{i=2}^{n+k(n)} R_{t/n} \left(r + \frac{it}{n} \right) \left(E - \frac{t}{n} A \left(r + \frac{t}{n} \right) \right)^{-1} Ex. \end{aligned}$$

由 $\frac{(k(n)+n)t}{n} \rightarrow t + \tau$, 一致 Lipschitz 连续及算子列的强收敛性, 对 $x \in \bar{D}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$V(r + t + \tau, r + t)EV(r + t, r)Ex = V(r + t + \tau, r)Ex,$$

其中 r, t, τ 如上, 从而证明了广义发展算子的等式在 $E(\overline{D})$ 上成立.

下面证明, 在 $E(\overline{D})$ 上, 有 $V(s, s) = V_0$. 事实上, 应用引理 6, 有

$$\left\| \prod_{i=1}^n R_{(t-s)/n} \left(s + \frac{i(t-s)}{n} \right) x - x \right\| \leq C(t-s)M(x), \quad t \geq s, \quad x \in D.$$

这表明, 对 $x \in \overline{D}, x = \lim_{t \rightarrow s} V(t, s)Ex$. 对 $x \in \overline{D}$, 令 $V(s, s)Ex = \lim_{t \rightarrow s} V(t, s)Ex = x$. 显然, 在 $E(\overline{D})$ 上, 对任一 $s \in [0, T]$, 有 $V(s, s) = V_0$, 且对 $x \in \overline{D}$, 有 $V_0Ex = x$. 因此, (i) 和 (ii) 成立.

下面证明 (iii) 和 (iv) 成立. 事实上, 在式 (28) 中, 令 $\lambda = \frac{\tau}{m}, \mu = \frac{t}{n}$, 并对 $n, m \rightarrow \infty$ 取极限, 可得

$$\|V(t, s)Ex - V(\tau, s)Ex\| \leq C(|t - \tau| + \rho(|t - \tau|) + \rho(\delta)), \quad x \in \hat{D},$$

对于适当的常数 C 及任意的 $\delta > 0$ 成立. 令 $\delta \rightarrow 0$, 有

$$\|V(t, s)Ex - V(\tau, s)Ex\| \leq C(|t - \tau| + \rho(|t - \tau|)), \quad x \in \hat{D}.$$

因为 ρ 连续, 次可加且 $\rho(0) = 0$, 所以存在常数 C 使 $r \leq C\rho(r)$. 从而

$$\|V(t, s)Ex - V(\tau, s)Ex\| \leq C\rho(|t - \tau|), \quad x \in \hat{D}. \quad (29)$$

即 (iii) 成立.

令 $a_k = \|[Q_{\lambda, k}(s) - Q_{\lambda, k}(r)]x\|, x \in \hat{D}$, 则

$$\begin{aligned} a_k &= \|(E - \lambda A(s + k\lambda))^{-1}EQ_{\lambda, k-1}(s)x - (E - \lambda A(r + k\lambda))^{-1}EQ_{\lambda, k-1}(s)x\| \\ &\quad + \|(E - \lambda A(r + k\lambda))^{-1}E[Q_{\lambda, k-1}(s) - Q_{\lambda, k-1}(r)]x\| \\ &\leq \lambda K\rho(|s - r|) + (1 - \lambda\omega)^{-1}a_{k-1}, \end{aligned}$$

其中 K 是一个适当的常数, 第一项利用 (P3) 和引理 6 或 (P4) 与引理 7 给出估计, 第二项由引理 1 (i) 给出估计. 因为 $a_0 = 0$, 所以有 $a_n \leq \lambda K\rho(|s - r|)(\sum_{i=0}^{n-1}(1 - \lambda\omega)^{-i}) \leq \lambda nC\rho(|s - r|)$, 其中, 对 $\omega \leq 0, C = K$; 对 $\omega > 0, C = K \exp(T\omega/(1 - \lambda_0\omega))$. 代入 $\lambda = \tau/n$ 并令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$\|V(s + \tau, s)Ex - V(r + \tau, r)Ex\| \leq C\rho(|r - s|), \quad x \in \hat{D}. \quad (30)$$

对 $x \in \hat{D}$, 令 $f(\tau, s) = V(s + \tau, s)Ex$, 由式 (29), $f(\tau, s)$ 在 τ 连续对 s 一致成立; 由式 (30), $f(\tau, s)$ 在 s 连续对 τ 一致成立. 从而 $V(t, s)$ 在 $E(\overline{D})$ 上满足定义 3 (ii), 即 (iv) 成立. 定理 1 证毕.

定理 2 设 (P1) 和 (P2) 成立, $x \in \hat{D}$, 则下面的结论成立:

(i) 如果 (P4) 成立, 则存在仅依赖于 $\|x\|, M(x), \lambda_0, \omega$ 和 T 的常数 C , 使

$$\|[V(t, s) - V(\tau, s)]Ex\| \leq C|t - \tau|, \quad 0 \leq s \leq \tau, \quad t \leq T.$$

(ii) 如果 (P4) 成立, 则对 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有 $V(t, s)E: \hat{D} \rightarrow \hat{D}$.

(iii) 如果 (P3) 或 (P4) 成立, 则

$$\left\| \left[V(t, s)E - \prod_{i=1}^m R_{(t-s)/m} \left(s + \frac{i(t-s)}{m} \right) \right] x \right\| \leq K(t-s) \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \rho((t-s)/m^{1/4}) \right),$$

其中 K 仅依赖于 $\|x\|, M(x), \lambda_0, \omega$ 和 T .

证明 (i) 假设 $t > \tau, n$ 和 m 分别是 $\frac{t}{\lambda}$ 和 $\frac{\tau}{\lambda}$ 的最大整数, 其中 $0 < \lambda < \lambda_0$. 由引理 6, 有

$$\| [Q_{\lambda,n}(s) - Q_{\lambda,m}(s)]x \| = \left\| \left[\prod_{i=m+1}^n R_{\lambda}(s + i\lambda) - I \right] Q_{\lambda,m}(s)x \right\| \leq \lambda(n-m)L_0M(Q_{\lambda,m}(s)x).$$

由引理 7 知, $M(Q_{\lambda,m}(s)x)$ 有界, 从而令 λ 趋于零便可得要证的结果.

(ii) $V(t, s)Ex = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{(t-s)/n, n}(s)x$, 且由引理 7 知, 对 $x \in \hat{D}$, $M(Q_{(t-s)/n, n}(s)x)$ 有界. 由引理 4 可得要证明的结果.

(iii) 在式 (28) 中, 令 $\mu = (t-s)/m, \lambda = (t-s)/n$, 且 $n \rightarrow \infty$, 取 $\delta^2 = (t-s)^2/\sqrt{m}$, 则可得要证明的结果.

定理 2 证毕.

由定理 1 的证明可知 $E(\bar{D}) = \overline{E(D)} = \overline{E(\hat{D})}$. 若 X 为实 Hilbert 空间, $P_{E(\bar{D})}$ 为 $E(\bar{D})$ 上的投影算子, 则由定理 1 和 2 可得如下的推论 1.

推论 1 设 $A(t)$ 满足 (P1), (P2) 及 (P3) 或 (P4), X 为实 Hilbert 空间, 对 $z \in X$, 令 $U(t, s)z = V(t, s)P_{E(\bar{D})}z$, 则下面的结论成立:

(i) $U(t, s)$ 是 E 引导的强连续的广义发展算子. 如果 $x \in \bar{D}$, 则

$$U(t, s)Ex = V(t, s)Ex, \quad U(s, s)Ex = V(s, s)Ex = x.$$

(ii) 对 $0 \leq s \leq t \leq T$ 及 $z \in X$, 有

$$\|U(t, s)z\| \leq e^{\omega(t-s)}\|z\|.$$

即 $U(t, s)$ 是指数有界的.

(iii) 如果 (P4) 成立, 则存在仅与 $\|x\|, M(x), \lambda_0, \omega$ 和 T 有关的常数 C , 对 $0 \leq s \leq \tau, t \leq T$ 及 $x \in \hat{D}$, 有

$$\| [U(t, s) - U(\tau, s)]Ex \| \leq C|t - \tau|.$$

(iv) 如果 (P4) 成立, 则存在仅与 $\|x\|, M(x), \lambda_0, \omega$ 和 T 有关的常数 C , 对 $0 \leq s \leq s+h \leq t \leq T$ 及 $x \in \hat{D}$, 有

$$\| [U(t, s+h) - U(t, s)]Ex \| \leq Ch.$$

(v) 如果 (P4) 成立, 则 $U(t, s) \in Q_{\omega}(E(\hat{D}))$, 即存在仅与 $\|y\|, M(y), \lambda_0, \omega$ 和 T 有关的常数 C , 对 $0 \leq t \leq T-s, 0 \leq r \leq s \leq T, x, y \in \hat{D}$, 有

$$\| [U(t+s, s)Ex - U(t+r, r)Ey] \| \leq e^{\omega t} \| Ex - Ey \| + C|s-r|.$$

(vi) 如果 (P4) 成立, 则对 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有 $U(t, s)E: \hat{D} \rightarrow \hat{D}$.

4 时变广义分布参数系统的可解性

本节应用广义发展算子讨论时变广义分布参数系统 (1) 的强解的存在和唯一性. 得到了一些充分条件.

设式 (1) 的齐次方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Ex(t) = A(t)x(t), & t > s \geq 0. \\ x(s) = x_0, \end{cases} \quad (31)$$

定义 6 $x(t) : [s, T] \rightarrow X$ 称为时变广义分布参数系统 (31) 在 $[s, T]$ 上的强解, 如果

(i) $x(s) = x_0$.

(ii) $x(t)$ 在 $[s, T]$ 上是 Lipschitz 连续的.

(iii) $Ex(t)$ 对 $t \in (s, T]$ 几乎处处可导, 且 $\frac{d}{dt}(Ex(t)) = Ax(t)$ 对 $t \in (s, T]$ 几乎处处成立.

$x(t) : [s, \infty) \rightarrow X$ 称为时变广义分布参数系统 (31) 在 $[s, \infty)$ 上的强解, 如果对任一 $T > s$, $x(t)$ 在 $[s, T]$ 上的限制 $x_T(t)$, 即 $x_T(t) = x(t) (s \leq t \leq T)$ 是时变广义分布参数系统 (31) 在 $[s, T]$ 上的强解.

定义 7 $x(t) : [s, T] \rightarrow X$ 称为时变广义分布参数系统 (1) 在 $[s, T]$ 上的强解, 如果

(i) $x(s) = x_0$.

(ii) $x(t)$ 在 $[s, T]$ 上是 Lipschitz 连续的.

(iii) $Ex(t)$ 对 $t \in (s, T]$ 几乎处处可导, 且 $\frac{d}{dt}(Ex(t)) = Ax(t) + f(t)$ 对 $t \in (s, T]$ 几乎处处成立.

$x(t) : [s, \infty) \rightarrow X$ 称为时变广义分布参数系统 (1) 在 $[s, \infty)$ 上的强解, 如果对任一 $T > s$, $x(t)$ 在 $[s, T]$ 上的限制 $x_T(t)$, 即 $x_T(t) = x(t) (s \leq t \leq T)$ 是时变广义分布参数系统 (1) 在 $[s, T]$ 上的强解.

定理 3 设 $A(t)$ 是 E 引导的强连续广义发展算子 $U(t, s)$ 的生成元, $U(t, s)$ 在 $E(D(A(t)))$ 上满足 (5) 且存在实常数 α 和 M_α 对于任意的 $h_1 \geq h_2 \geq 0$, 有

$$\|EU(t + h_1, t)x - EU(t + h_2, t)x\| \leq M_\alpha e^{\alpha h_2} \|EU(t + h_1 - h_2, t)x - EU(t, t)x\|,$$

其中 $D(A(t)) = D$ 与 t 无关, 如果 X 满足 Radon-Nikodym 性质 (特别的 X 是自反的 Banach 空间), 则对每个初值 $x_0 \in D$, $x(t) = U(t, s)Ex_0$ 是时变广义分布参数系统 (31) 在 $[s, T]$ 上的强解, 且对满足 $T \geq t > s \geq 0$ 的 s 几乎处处有 $\frac{\partial EU(t, s)Ex_0}{\partial s} = -EU(t, s)A(s)x_0$ 成立.

证明 首先证明对每一个 $x_0 \in D$, $U(t, s)Ex_0$ 关于 t 是 Lipschitz 连续的, 且

$$\| [U(t + h, s) - U(t, s)]Ex_0 \| \leq \left\{ M_\omega \left(\max_{0 \leq \theta \leq T} e^{\omega \theta} \right) \max [M_\alpha \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\alpha \tau} \right), 1] \|A(s)x_0\| + C \right\} h. \quad (32)$$

事实上, 因为 $x_0 \in D$, 从而 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{E[U(t + h, t) - U(t, t)]Ex_0}{h} = A(t)x_0$. 设 $\{t_k\}$ 为 $k \rightarrow \infty$ 时趋于零的单调减正数序列, 且 $\varepsilon > 0$ 满足 $\|E[U(t + t_k, t) - U(t, t)]Ex_0\| \leq (\varepsilon + \|A(t)x_0\|)t_k$. 令 $h > 0$ 且非负整数 n_k 满足 $0 \leq h - n_k t_k < t_k$, 则对任一 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} \|E[U(t + h, t) - U(t, t)]Ex_0\| &= \|E[U(t + h, t) - U(t + n_k t_k, t)]Ex_0\| + \|E[U(t + n_k t_k, t) - U(t, t)]Ex_0\| \\ &\leq \| [U(t + h, t) - U(t + n_k t_k, t)]Ex_0 \| \\ &\quad + \max [M_\alpha \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\alpha \tau} \right), 1] (\varepsilon + \|A(t)x_0\|) t_k n_k \\ &\leq \| [U(t + h, t) - U(t + n_k t_k, t)]Ex_0 \| \\ &\quad + \max [M_\alpha \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\alpha \tau} \right), 1] (\varepsilon + \|A(t)x_0\|) h. \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 有 $\|E[U(t + h, t) - U(t, t)]Ex_0\| \leq \max [M_\alpha \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\alpha \tau} \right), 1] (\varepsilon + \|A(t)x_0\|) h$. 由 ε 的任意性可得

$$\|E[U(t + h, t) - U(t, t)]Ex_0\| \leq \max [M_\alpha \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\alpha \tau} \right), 1] \|A(t)x_0\| h.$$

从而

$$\begin{aligned} ||[U(t+h, t) - U(t, s)]Ex_0|| &\leq ||[U(t+h, s+h)EU(s+h, s) - U(t, s)EU(s, s)]Ex_0|| \\ &\leq ||[U(\tau+s+h, s+h)EU(s+h, s) - U(\tau+s, s)EU(s, s)]Ex_0|| \\ &\leq M_\omega e^{\omega\tau} ||E[U(s+h, s) - U(s, s)]Ex_0|| + Ch \\ &\leq \left\{ M_\omega \left(\max_{0 \leq \theta \leq T} e^{\omega\theta} \right) \max[M_\alpha \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\alpha\tau} \right), 1] ||A(s)x_0|| + C \right\} h, \end{aligned}$$

其中 $\tau = t - s$. 因此式 (32) 成立.

下面证明对任一 $x_0 \in D, EU(t, s)Ex_0$ 在 $[s, T]$ 上几乎处处可导, 且

$$\frac{\partial}{\partial t} EU(t, s)Ex_0 = A(t)U(t, s)Ex_0 \quad (33)$$

对 $t \in (s, T]$ 几乎处处成立.

事实上, 根据众所周知的结果: X 满足 Radon-Nikodym 性质 (特别 X 是自反的) 当且仅当任一满足 Lipschitz 连续的 X 值函数几乎处处可导, 可得 $\frac{\partial}{\partial t} EU(t, s)Ex_0$ 对 $t \in [s, T]$ 几乎处处存在. 从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} EU(t, s)Ex_0 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E[U(t+h, s) - U(t, s)]Ex_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E[U(t+h, t) - U(t, t)]EU(t, s)Ex_0}{h} \\ &= A(t)U(t, s)Ex_0 \end{aligned}$$

对 $t \in (s, T]$ 几乎处处成立. 从而式 (33) 成立.

令 $x(t) = U(t, s)Ex_0$, 则 $x(s) = x_0$. 因此, $x(t) = U(t, s)Ex_0$ 是满足初值条件 $x(s) = x_0$ 的时变广义分布参数系统 (31) 的强解.

下面证明 $\frac{\partial EU(t, s)Ex_0}{\partial s} = -EU(t, s)A(s)x_0$ 对满足 $T \geq t > s \geq 0$ 的 s 几乎处处成立.

事实上, 因为

$$\begin{aligned} \frac{EU(t, s+h)Ex_0 - EU(t, s)Ex_0}{h} &= EU(t, s+h) \left[\frac{EU(s+h, s+h)Ex_0 - EU(s+h, s)Ex_0}{h} \right] \\ &= -EU(t, s+h) \left[\frac{EU(s+h, s)Ex_0 - EU(s, s)Ex_0}{h} \right], \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial EU(t, s)Ex_0}{\partial s} = -EU(t, s)A(s)x_0$ 对满足 $T \geq t > s \geq 0$ 的 s 几乎处处成立. 定理 3 证毕.

说明 如果 $S(t)$ 是由 E 引导的强连续的广义算子半群^[47], 则 $U(t, s) = S(t-s)$ 为 E 引导的满足定理条件

$$||EU(t+h_1, t)x - EU(t+h_2, t)x|| \leq M_\alpha e^{\alpha h_2} ||EU(t+h_1-h_2, t)x - EU(t, t)x||$$

的广义发展算子.

定理 4 设 $x(t)$ 是式 (31) 在 $[s, T]$ 上的强解, X 为实 Hilbert 空间. 如果 $A(t)$ 满足 (P1), (P2) 及 (P3) 或 (P4), 则对 $T \geq t \geq s \geq 0$, 有 $x(t) = U(t, s)Ex_0$, 其中 $U(t, s)$ 由推论 1 给出.

证明 应用式 (31) 强解的定义及 $U(t, s)Ex_0$ 的连续性, 可以把问题简化为 $x(t)$ 在 $[s, T]$ 上 Lipschitz 连续, 且 $x_0 \in \hat{D}$. 为简单起见, 假定 $s = 0$. 对任一 $\varepsilon > 0$ 定义 $x_\varepsilon(t) = (\prod_{i=0}^{[t/\varepsilon]} R_\varepsilon(i\varepsilon))x_0, x_0 \in \hat{D}$,

其中 $[t/\varepsilon]$ 是 t/ε 的最大整数, 则 $x_\varepsilon(t)$ 是一个阶梯函数, 且为如下问题的解

$$\begin{cases} \frac{E[x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t - \varepsilon)]}{\varepsilon} = A([t/\varepsilon]\varepsilon)x_\varepsilon(t), & t \geq 0, \\ x_\varepsilon(t) = x_0, & t < 0. \end{cases}$$

更进一步, 有

$$\begin{cases} x_\varepsilon(t) = R_\varepsilon([t/\varepsilon]\varepsilon)x_\varepsilon(t - \varepsilon), & t \geq 0, \\ x_\varepsilon(t) = x_0, & t < 0. \end{cases} \quad (34)$$

由 $x_\varepsilon(t)$ 的定义及定理 1 的证明和推论 1, 可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|x_\varepsilon(t) - U(t, 0)Ex_0\| = 0 \quad (35)$$

对 $T \geq t \geq 0$ 一致成立. 对 $t < 0$, 令 $x(t) = x_0$, 且 $\frac{Ex(t) - Ex(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = (Ex(t))' + h_\varepsilon(t)$ 在 $[0, T]$ 上几乎处处成立. 因为 $x(t)$ 是式 (31) 的强解, 所以

$$x(t) = R_\varepsilon(t)(x(t - \varepsilon) + \varepsilon h_\varepsilon(t)) \quad (36)$$

在 $[0, T]$ 上几乎处处成立. 又因为 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上是绝对连续的 (由 Lipschitz 连续可得), 所以

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^T \|h_\varepsilon(s)\| ds = 0. \quad (37)$$

由式 (34) 和 (35), 可得

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x(t)\| &= \|R_\varepsilon([t/\varepsilon]\varepsilon)x_\varepsilon(t - \varepsilon) - R_\varepsilon(t)(x(t - \varepsilon) + \varepsilon h_\varepsilon(t))\| \\ &\leq \|R_\varepsilon(t)x_\varepsilon(t - \varepsilon) - R_\varepsilon(t)[x(t - \varepsilon) + \varepsilon h_\varepsilon(t)]\| + \\ &\quad \|R_\varepsilon(t)x_\varepsilon(t - \varepsilon) - R_\varepsilon([t/\varepsilon]\varepsilon)x_\varepsilon(t - \varepsilon)\| \\ &\leq (1 - \varepsilon\omega)^{-1}(\|x_\varepsilon(t - \varepsilon) - x(t - \varepsilon)\| + \|\varepsilon h_\varepsilon(t)\|) + \varepsilon C\rho(t - [t/\varepsilon]\varepsilon) \end{aligned}$$

在 $[0, T]$ 上几乎处处成立. 这里应用了引理 1, 及 (P3) 与引理 6 或 (P4) 与引理 7. 在 $[0, t]$ 上对上述不等式进行积分, 并重新整理, 可得

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t \|x_\varepsilon(s) - x(s)\| ds \leq \frac{\omega}{1 - \varepsilon\omega} \int_0^t \|x_\varepsilon(s - \varepsilon) - x(s - \varepsilon)\| ds + (1 - \varepsilon\omega)^{-1} \int_0^t \|h_\varepsilon(s)\| ds + Ct\rho(\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 应用式 (35) 和 (37), 可得 $\|U(t, 0)Ex_0 - x(t)\| \leq \omega \int_0^t \|U(s, 0)Ex_0 - x(s)\| ds$ 对 $0 \leq t \leq T$ 成立, 这表明 $x(t) = U(t, 0)Ex_0$. 定理 4 证毕.

由定理 4 可得定理 5:

定理 5 设 $A(t)$ 满足 (P1), (P2) 和 (P4), X 为实 Hilbert 空间. 如果 $U(t, s)$ 由推论 1 给出, 且对任一 $x_0 \in \hat{D}$, $x(t) = U(t, s)Ex_0$ 是式 (31) 在 $[s, T]$ 上的强解, 则 $A(t)$ 是 $U(t, s)$ 的生成元在 $[s, T]$ 上几乎处处成立.

为了证明定理 6, 先给出下面的结果:

设 $F(x) = \{x^* : x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$, 其中 $\langle x, x^* \rangle$ 表示 $x^* \in X^*$ 在 $x \in X$ 的值, X^* 是 X 的共轭空间, 且 $\langle y, x \rangle_s = \sup\{\langle y, x^* \rangle : x^* \in F(x)\} = \max\{\langle y, x^* \rangle : x^* \in F(x)\}$. 众所周知, 有

$$2\langle y, x \rangle_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (\|x + \varepsilon y\|^2 - \|x\|^2) = \inf_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} (\|x + \varepsilon y\|^2 - \|x\|^2).$$

由此利用定义 1, 可得引理 8:

引理 8 如果 $A \in C_E(\omega)$, 则对任一 $\lambda > 0$ 且 $\lambda\omega < 1$ 下面的结论成立:

- (i) $\|Ex - \lambda Ax\| \geq (1 - \lambda\omega)\|Ex\|, x \in D(A)$.
- (ii) $\|Ex\| = \|x\|, x \in \overline{D(A)}$.
- (iii) $\|Ex - \lambda y\| \geq (1 - \lambda\omega)\|Ex\|, x, y \in X$ 当且仅当 $\langle -y, Ex \rangle_s \geq -\omega\|Ex\|^2, x, y \in X$. 特别 $\|Ex - \lambda Ax\| \geq (1 - \lambda\omega)\|Ex\|, x \in D(A)$ 当且仅当 $\langle -Ax, Ex \rangle_s \geq -\omega\|Ex\|^2, x \in D(A)$.

定理 6 设 $A(t)$ 满足 (P1), (P2) 及 (P3) 或 (P4), X 为实 Hilbert 空间, 且下面的条件成立:

- (i) 对 $0 \leq t \leq T, A(t)$ 是闭算子.
- (ii) 对任一 $t_0, 0 \leq t_0 < T$, 及 $y_0 = A(t_0)x_0, y(t) = A(t)x_0$, 在某个区间 $[t_0, t_0 + \delta]$ 上连续且 $y(t_0) = y_0$, 其中 $\delta > 0$.

如果 $x \in \bar{D}$ 且 $\frac{d}{dt}EU(t, s)Ex$ 在某点 (t_0, s) 存在, $0 \leq s < t_0 < T$, 则 $U(t_0, s)Ex \in D(A(t_0))$ 且 $\frac{d}{dt}EU(t, s)Ex|_{t=t_0} = A(t_0)U(t_0, s)Ex$, 其中 $U(t, s)$ 由推论 1 给出.

证明 设 $0 \leq t_0 < T, y_0 = A(t_0)x_0, y(t) = A(t)x_0$ 且 $y(t)$ 连续, 则

$$-\lambda^{-1}E(x - (E - \lambda A(t))^{-1}Ex) = A(t)(E - \lambda A(t))^{-1}Ex,$$

即 $-\lambda^{-1}E(x - R_\lambda(t)x) = A(t)R_\lambda(t)x$. 因此, 对任一 $z \in \bar{D}$ 及 $0 < \lambda < \frac{1}{\omega}$, 有

$$-\lambda^{-1}E(Q_{\lambda, k-1}(t_0)z - Q_{\lambda, k}(t_0)z) = A(t_0 + k\lambda)Q_{\lambda, k}(t_0)z.$$

因为 $A(t_0 + k\lambda) \in C_E(\omega)$, 所以存在 $\varphi^* \in F(E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z))$ 使

$$\langle -y(t_0 + k\lambda) - \lambda^{-1}E(Q_{\lambda, k-1}(t_0)z - Q_{\lambda, k}(t_0)z), \varphi^* \rangle \geq -\omega\|E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)\|^2.$$

又由 $\varphi^* \in F(E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z))$, 对 $k = 1, 2, \dots, [t/\lambda]$, 有

$$\begin{aligned} & \langle -y(t_0 + k\lambda) + \omega E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z), E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)_s \\ & \geq \lambda^{-1}[\|E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)\|^2 - \langle E(x_0 - Q_{\lambda, k-1}(t_0)z), \varphi^* \rangle] \\ & \geq \lambda^{-1}[\|E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)\|^2 - \|E(x_0 - Q_{\lambda, k-1}(t_0)z)\|\|E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)\|] \\ & \geq \frac{1}{2}\lambda^{-1}[\|E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)\|^2 - \|E(x_0 - Q_{\lambda, k-1}(t_0)z)\|^2]. \end{aligned}$$

从而, 有

$$\begin{aligned} & 2\lambda \sum_{k=1}^{[t/\lambda]} \langle -y(t_0 + k\lambda) + \omega E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z), E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)_s \\ & \geq \|E(x_0 - Q_{\lambda, [t/\lambda]}(t_0)z)\|^2 - \|E(x_0 - z)\|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

对 $k\lambda \leq \tau < (k+1)\lambda$, 令 $g_\lambda(\tau) = \langle -y(t_0 + k\lambda) + \omega E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z), E(x_0 - Q_{\lambda, k}(t_0)z)_s \rangle$. 则式 (38) 可以写为

$$2 \int_0^{[t/\lambda]} g_\lambda(\tau) d\tau \geq \|E(x_0 - Q_{\lambda, [t/\lambda]}(t_0)z)\|^2 - \|E(x_0 - z)\|^2. \quad (39)$$

因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ 是上半连续的且 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时 $Q_{\lambda, [\tau/\lambda]}(t_0)z \rightarrow U(t_0 + \tau, t_0)Ez$, 所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sup_{\lambda > 0} g_\lambda(\tau) \leq \langle -y(t_0 + \tau) + \omega E(x_0 - U(t_0 + \tau, t_0)Ez), E(x_0 - U(t_0 + \tau, t_0)Ez) \rangle_s,$$

其中右端是上半连续的, 因此可积. 从而, 令 $\lambda \rightarrow 0^+$, 两边同除以 t , 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{t} \int_0^t \langle -y(t_0 + \tau) + \omega E(x_0 - U(t_0 + \tau, t_0)Ez), E(x_0 - U(t_0 + \tau, t_0)Ez) \rangle_s d\tau \\
 & \geq \frac{1}{2t} [\|E(x_0 - U(t_0 + t, t_0)Ez)\|^2 - \|E(x_0 - z)\|^2] \\
 & = \frac{1}{2t} \left[\left\| E(x_0 - z) + t \left[\frac{1}{t} E(z - U(t_0 + t, t_0)Ez) \right] \right\|^2 - \|E(x_0 - z)\|^2 \right] \\
 & \geq \left\langle \frac{E(z - U(t_0 + t, t_0)Ez)}{t}, E(x_0 - z) \right\rangle_s \\
 & \geq \left\langle \frac{E(z - U(t_0 + t, t_0)Ez)}{t}, \psi^* \right\rangle
 \end{aligned} \tag{40}$$

对所有 $\psi^* \in F(E(x_0 - z))$ 成立. 在式 (40) 中, 令 $z = U(t_0, s)Ex$ 及 $t \rightarrow 0^+$, 可得

$$\langle -y_0 + \omega E(x_0 - U(t_0, s)Ex), E(x_0 - U(t_0, s)Ex) \rangle_s \geq \left\langle - \frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0}, \psi^* \right\rangle$$

对任一 $\psi^* \in F(E(x_0 - U(t_0, s)Ex))$ 成立. 因此

$$\langle -y_0 + \omega E(x_0 - U(t_0, s)Ex), E(x_0 - U(t_0, s)Ex) \rangle_s \geq \left\langle - \frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0}, E(x_0 - U(t_0, s)Ex) \right\rangle_s,$$

即 $\langle -(y_0 - \frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0}), E(x_0 - U(t_0, s)Ex) \rangle_s \geq -\omega \|E(x_0 - U(t_0, s)Ex)\|^2$. 由 $y_0 = A(t_0)x_0$ 的任意性, $U(t_0, s)Ex \in \overline{D(A(t_0))} = \bar{D}$, 及引理 8, 有

$$\begin{aligned}
 & \left\| E(x_0 - U(t_0, s)Ex) - \lambda \left(A(t_0)x_0 - \frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) \right\| \\
 & \geq (1 - \lambda\omega) \|E(x_0 - U(t_0, s)Ex)\| = (1 - \lambda\omega) \|x_0 - U(t_0, s)Ex\|.
 \end{aligned} \tag{41}$$

令 $y = \frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0}$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 有

$$EU(t_0 - h, s)Ex = EU(t_0, s)Ex - hy + o(h). \tag{42}$$

式 (41) 和 (42) 表明当 $h \rightarrow 0$ 时, 有 $x_h = R_h(t_0)U(t_0 - h, s)Ex = U(t_0, s)Ex + o(h)$, 且

$$y_h = \frac{EU(t_0 - h, s)Ex - ER_h(t_0)U(t_0 - h, s)Ex}{-h} = y + o(1).$$

由 $y_h = A(t_0)x_h, x_h \rightarrow U(t_0, s)Ex, y_h \rightarrow y$, 及 $A(t_0)$ 是闭算子, 可知 $y = A(t_0)U(t_0, s)Ex$, 即

$$\frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0} = A(t_0)U(t_0, s)Ex.$$

定理 6 证毕.

在如下情况, 不需要定理 6 的条件 (ii) 也可得到定理 6 的结论:

定理 7 设 $A(t)$ 满足 (P1) 和 (P2), $x \in \bar{D}, X$ 为实 Hilbert 空间. 如果 (P3) 成立或 $x \in \hat{D}$ 且 (P4) 成立, $\frac{dEU(t, s)Ex}{dt}$ 在 (t_0, s) 存在, 其中 $0 \leq s < t_0 < T$, 则 $U(t_0, s)Ex \in D(A(t_0))$ 且 $\frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0} = A(t_0)U(t_0, s)Ex$, 其中 $U(t, s)$ 由推论 1 给出.

证明 因为对 $0 \leq t \leq T$, 有 $A(t) \in C_E(\omega)$, 所以对每一个 $t(0 \leq t \leq T)$, $A(t)$ 为一个闭算子. 设 $S_\tau(t)$ 是 $E(\bar{D})$ 上由 E 引导的以 $A(\tau)$ 为生成元的强连续广义算子半群, 即 $S_\tau(t)E = \lim_{n \rightarrow \infty} [(E - \frac{t}{n}A(\tau))^{-1}E]^n \cdot S_\tau(t)$ 的存在性由定理 1 可立即得到, 其第一次被证明见文献 [47]. 下面应用引理 9 估计 $\|EU(\tau+h, \tau)Ex - ES_\tau(h)Ex\|$.

引理 9 设 $A(t)$ 满足 (P1) 和 (P2), $x \in \bar{D}$. 如果 (P3) 成立或 $x \in \hat{D}$ 且 (P4) 成立, 则对 $0 \leq \tau \leq T$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|EU(\tau+h, \tau)Ex - ES_\tau(h)Ex\|}{h} = 0.$$

证明 设 $a_k = \|Q_{\lambda, k}(\tau)x - R_\lambda^k(\tau)x\|$, 有

$$\begin{aligned} a_k &= \|R_\lambda(\tau+k\lambda)Q_{\lambda, k-1}(\tau)x - R_\lambda^k(\tau)x\| \\ &\leq \|R_\lambda(\tau+k\lambda)Q_{\lambda, k-1}(\tau)x - R_\lambda(\tau)Q_{\lambda, k-1}(\tau)x\| + \|R_\lambda(\tau)Q_{\lambda, k-1}(\tau)x - R_\lambda^k(\tau)x\| \\ &\leq \lambda C\rho(k\lambda) + (1 - \lambda\omega)^{-1}a_{k-1}. \end{aligned} \quad (43)$$

由于 $a_0 = 0$, 根据式 (43) 可得 $a_n \leq \max\{1, (1 - \lambda\omega)^{-n}\} \lambda C \sum_{k=1}^n \rho(k\lambda) \leq \max\{1, (1 - \lambda\omega)^{-n}\} C \lambda n \rho(n\lambda)$. 当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, 令 $n = [h/\lambda]$, 有 $\|U(\tau+h, \tau)Ex - S_\tau(h)Ex\| \leq C_1 h \rho(h)$. 因此

$$\|EU(\tau+h, \tau)Ex - ES_\tau(h)Ex\| \leq C_1 h \rho(h).$$

引理 9 证毕. 下面进行定理 7 的证明. 对 $0 \leq t \leq T$, 令 $B(t) = A(t_0)$, 则 $B(t)$ 满足定理 6 的假设条件. 由定理 6 的证明, 有 $\|E(x_0 - S_{t_0}(t)Ex) - \lambda[A(t_0)x_0 - D_+ES_{t_0}(t)Ex]\| \geq (1 - \lambda\omega)\|E(x_0 - S_{t_0}(t)Ex)\|$. 由引理 9 可知 $D_+ES_{t_0}(t)Ez|_{t=0} = D_+EU(t, t_0)Ez|_{t=t_0}$, 从而 $z \in \bar{D}$, 且 (P3) 成立或 $x \in \hat{D}$ 且 (P4) 成立. 令 $z = U(t_0, s)Ex$ (回顾定理 2(ii)), 有

$$\left\| E(x_0 - U(t_0, s)Ex) - \lambda \left(A(t_0)x_0 - \frac{dEU(t, s)Ex}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) \right\| \geq (1 - \lambda\omega)\|E(x_0 - U(t_0, s)Ex)\|.$$

重复定理 6 后面的证明便可得定理 7 的结论. 定理 7 证毕.

定理 8 设 $A(t)$ 满足 (P1), (P2) 和 (P4), X 为实 Hilbert 空间, 则对任一 $x_0 \in \hat{D}$ 及 $0 \leq s < T$, 式 (31) 有唯一的强解 $x(t)$, $x(t)$ 的表达式为

$$x(t) = U(t, s)Ex_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left[\left(E - \frac{t-s}{n} A \left(s + i \left(\frac{t-s}{n} \right) \right) \right)^{-1} E \right] x_0,$$

且 $A(t)$ 是 $U(t, s)$ 的生成元在 $0 \leq s \leq t \leq T$ 上几乎处处成立, 其中 $U(t, s)$ 由推论 1 给出. 更进一步, 对 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有 $x(t) \in \hat{D}$.

证明 推论 1 表明 $U(t, s)Ex_0$ 对 t 是 Lipschitz 连续的. 根据众所周知的结果 “ X 是自反的则任一 Lipschitz 连续的 X -值函数几乎处处可导” 可知, 对 $t \in [s, t]$, $\frac{\partial}{\partial t} EU(t, s)Ex_0$ 几乎处处存在. 由定理 7 立即可知 $U(t, s)Ex_0$ 是式 (31) 的一个强解. 由定理 4 和 5 知, $x(t) = U(t, s)Ex_0$ 是式 (31) 的唯一强解且 $A(t)$ 是 $U(t, s)$ 的生成元在 $s \leq t \leq T$ 上几乎处处成立. 由推论 1 (vi), 对 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有 $x(t) \in \hat{D}$. 定理 8 证毕.

定理 9 设 $A(t)$ 为闭算子 ($0 \leq t \leq T$) 满足 (P1), (P2) 和 (P4), X 为实 Hilbert 空间, $f_1: [s, t] \rightarrow \hat{D}$ 连续, $f(t) = Ef_1(t)$, 且 $M(f_1(t))$ 在 $[s, T]$ 上一致有界, 则对任一 $x_0 \in \hat{D}$ 及 $0 \leq s < T$, 时变广义分布

参数系统 (1) 有唯一的强解 $x(t)$, 且 $x(t)$ 的表达式为

$$x(t) = U(t, s)Ex_0 + \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (44)$$

其中 $U(t, s)$ 由推论 1 给出.

证明 首先证明 $x(t) = U(t, s)Ex_0 + \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau$ 是 Lipschitz 连续的. 事实上, 对 $h > 0$, 有

$$\begin{aligned} \|x(t+h) - x(t)\| &\leq \|U(t+h, s)Ex_0 - U(t, s)Ex_0\| \\ &\quad + \left\| \int_s^{t+h} U(t+h, \tau)f(\tau)d\tau - \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau \right\| \\ &\leq c_1 h + \left\| \int_t^{t+h} U(t+h, \tau)f(\tau)d\tau \right\| + \left\| \int_s^t [U(t+h, \tau) - U(t, \tau)]f(\tau)d\tau \right\| \\ &\leq c_1 h + [(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\omega\tau})(\max_{0 \leq \tau \leq T} \|f(\tau)\|)]h + c_2 Th \\ &= \left\{ c_1 + [(\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{\omega\tau})(\max_{0 \leq \tau \leq T} \|f(\tau)\|)] + c_2 T \right\} h, \end{aligned}$$

其中 c_1 和 c_2 是常数. 由以上可以看出 $x(t)$, $U(t, s)f(\tau)$, 及 $\int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau$ 在 $[s, T]$ 上关于 t Lipschitz 连续. 根据众所周知的结果 “ X 是自反的则任一 Lipschitz 连续的 X - 值函数在 $[s, T]$ 上几乎处处可导” 可知, $Ex(t)$, $EU(t, s)f(\tau)$, 及 $E \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau$ 在 $[s, T]$ 上几乎处处可导.

下面, 只需证明 $v(t) = \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau$ 满足

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Ev(t) = A(t)v(t) + f(t), & t > s \geq 0 \\ v(s) = 0, \end{cases} \quad \text{在 } [s, T] \text{ 上几乎处处成立.} \quad (45)$$

事实上, 对 $\Delta t > 0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{Ev(t+\Delta t) - Ev(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_s^{t+\Delta t} EU(t+\Delta t, \tau)f(\tau)d\tau - \int_s^t EU(t, \tau)f(\tau)d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} EU(t+\Delta t, \tau)f(\tau)d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_s^t E[U(t+\Delta t, \tau) - U(t, \tau)]f(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (46)$$

根据

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} EU(t+\Delta t, \tau)f(\tau)d\tau - EU(t, t)f(t) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} E[U(t+\Delta t, \tau)f(\tau) - U(t, t)f(t)]d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [\|E[U(t+\Delta t, \tau)f(\tau) - U(t+\Delta t, \tau)f(t)]\| + \|E[U(t+\Delta t, \tau)f(t) - U(\tau, \tau)f(t)]\|]d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [\|U(t+\Delta t, \tau)f(\tau) - U(t+\Delta t, \tau)f(t)\| \\ &\quad + \|U(t+\Delta t, \tau)f(t) - U(\tau, \tau)f(t)\|]d\tau \quad \text{由 } \|E\| = 1 \end{aligned}$$

$$\leq c_1 \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(\tau) - f(t)\| d\tau + c_2 \Delta t,$$

其中 c_1 和 c_2 是常数, $f(t)$ 连续, 可得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} EU(t + \Delta t, \tau) f(\tau) d\tau = EU(t, t) f(t) = EU(t, t) E f_1(t) = f(t). \quad (47)$$

由定理 8, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[U(t + \Delta t, \tau) - U(t, \tau)]}{\Delta t} f(\tau) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[U(t + \Delta t, t) - U(t, t)]}{\Delta t} E U(t, \tau) f(\tau) \\ &= A(t) U(t, \tau) f(\tau), \end{aligned}$$

在 $[s, T]$ 上几乎处处成立且 $A(t)$ 是闭线性算子, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \int_s^t E[U(t + \Delta t, \tau) - U(t, \tau)] f(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_s^t \frac{E[U(t + \Delta t, \tau) - U(t, \tau)]}{\Delta t} f(\tau) d\tau \\ &= \int_s^t A(t) U(t, \tau) f(\tau) d\tau = A(t) \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) d\tau \\ &= A(t) v(t). \end{aligned} \quad (48)$$

在 $[s, T]$ 上几乎处处成立.

因此, 由式 (46)~(48) 可得

$$\frac{d}{dt} E v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E v(t + \Delta t) - E v(t)}{\Delta t} = A(t) v(t) + f(t)$$

在 $[s, T]$ 上几乎处处成立. 显然 $v(s) = 0$. 从而 $v(t) = \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) d\tau$ 是式 (45) 的强解.

由定理 8 可得 (1) 的强解的唯一性, 并且由推论 1(i) 可得 $x(s) = x_0$. 因此, 式 (44) 是式 (1) 的唯一强解. 定理证毕.

5 结论

本文研究了 Banach 空间中由有界线性算子引导的广义发展算子的概念和性质; 应用广义发展算子讨论了线性时变广义分布参数系统的可解性问题, 给出了强解的构造性表达式. 所得结果对研究广义分布参数系统和退化 Cauchy 问题十分重要, 且应用十分方便. 对于非线性时变广义分布参数系统的可解性问题, 本文所得结果需改进, 将另文讨论.

参考文献

- 1 Carroll R W, Showalter R E. Singular and Degenerate Cauchy Problem. New York: Academic Press, 1976
- 2 Favini A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems. Rend Mat, 1979, 12: 511-536
- 3 Sauer N. Linear evolution equations in two Banach spaces. Proc Royal Soc Edinburgh, 1982, 91A: 287-303
- 4 Sauer N, Singleton J E. Evolution operators related to semigroups of class (A). Semigroup Forum, 1987, 35: 317-335

- 5 Sauer N, Singleton J E. Evolution operators in empathy with a semigroup. *Semigroup Forum*, 1989, 39: 85–94
- 6 Sauer N. Empathy theory and the Laplace transform. *Banach Center Publ*, 1997, 38: 325–338
- 7 Brown T J, Sauer N. Double families of integrated evolution operators. *J Evol Equat*, 2004, 4: 567–590
- 8 Macionis J. Solvability of a degenerate differential equation with spectral parameter. *Litov Skic Matematiches-kii*, 1985, 25: 138–142
- 9 Joder L, Fernandez M L. An implicit difference method for the numerical solution of coupled system of partial differential equations. *Appl Math Comput*, 1991, 46: 127–134
- 10 Lewis F L. A review of 2-D implicit systems. *Automatic*, 1992, 28: 345–354
- 11 Hu Y, Peng S G, Li X J. Maximum principle for optimal control problem of nonlinear generalized systems-infinite dimensional case. *Atca Math Appl Sin*, 1992, 15: 99–104
- 12 Trzaska Z, Marszalek W. Singular distributed parameter systems. *IEE Control Theory Appl*, 1993, 40: 305–308
- 13 Favini A, Yagi A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations. *Annal Matematic Appl(IV)*, 1993, CLXIII: 353–384
- 14 Favini A, Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*. New York: Marcel Dekker, 1999
- 15 Melnikova I V, Alshansky M A. Well-posedness of the degenerate Cauchy problem in a Banach space. *Dokl Akad Nauk*, 1994, 336: 17–20
- 16 Melnikova I V. Properties of an abstract pseudoresolvent and well-posedness of the degenerate Cauchy problem. In: *Generalizations of Complex Analysis and Their Applications in Physics*, Polish Acad Sci, Warsaw, 1996. 151–157
- 17 Melnikova I V, Alshansky M A. Well-posedness of the Cauchy problem in a Banach space: regular and degenerate cases. *J Math Sci*, 1997, 87: 3732–3780
- 18 Melnikova I V. The degenerate Cauchy problem in Banach space. *IZV Ural Gos Univ Mat Mekh*, 1998, 183: 147–160
- 19 Melnikova I V, Anufrieva U A, Ushkov V Y. Degenerate distribution semigroups and well-posedness of the Cauchy problem. *Integr Transform Spec Funct*, 1998, 6: 247–256
- 20 Melnikova I V, Filinkov A I. *Abstract Cauchy Problem*. London: Chapman and Hall, CRC, 2001. 86–89
- 21 Curtain R F, Zwart H. *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. New York: Springer-Verlag, 1995
- 22 Barbu V, Favini A. Control of degenerate differential systems. *Control Cybern*, 1999, 28: 397–420
- 23 Luo Z H, Guo B Z, Morgul O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. London: Springer-Verlag, 1999
- 24 Enge K J, Nagel R. *One -Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*. New York: Springer-Verlag, 1999
- 25 Ge Z Q, Ma Y H. Pole assignment of the first order singular distributed parameter system. *Chin Annal Math Ser A*, 2001, 22A: 729–734 [葛照强, 马勇镐. 一阶广义分布参数系统的极点配置问题. *数学年刊*, 2001, 22A: 729–734]
- 26 Liang J, Xiao T J. Abstract degenerate Cauchy problems in locally convex space. *J Math Anal Appl*, 2001, 259: 398–412
- 27 Baskakov A G, Chernyshov L I. Linear relation, differential inclusions, and degenerate semigroups. *Funct Anal Appl*, 2002, 36: 306–310
- 28 Ge Z Q, Zhu G T, Ma Y H. Spectrum distribution of the second order generalized system. *Appl Math Mech*, 2003, 24: 1224–1232
- 29 Ge Z Q. Pole assignment by feedback control of the second order coupled singular distributed parameter systems. *Control Cybern*, 2004, 33: 551–562
- 30 Horani M A, Favini A. Degenerate second order identification problem in Banach space. *J Optim Theory Appl*, 2004, 120: 305–326
- 31 Fedorov V E. Applications of the theory of degenerate operator semigroups to initial-boundary-value problems. *J Math Sci*, 2005, 126: 1658–1663
- 32 Liang J, Xiao T J. Higer-order degerate Cauchy problems in locally convex spaces. *Math Comput Model*, 2005, 41: 837–847
- 33 Reis T, Tischendorf C. Frequency domain methods and decoupling of linear infinite dimensional differential algebraic systems. *J Evol Equ*, 2005, 5: 357–385
- 34 Horani M A, Favini A. An identification problem for first order degenerate differential equations. *J Optim Theory Appl*, 2006, 130: 41–60

- 35 Ge Z Q, Xu X Y, Zhu G T. Asymptotical stability by feedback control for a class of the first order singular control system. *Dyn Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithm*, 2006, 13: 574–577
- 36 Ge Z Q, Zhu G T. State feedback and pole assignment for a class of the second order coupled generalized distributed parameter systems. *Dyn Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithm*, 2006, 13: 1–5
- 37 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. On the stabilization by feedback of the second order singular distributed parameter control systems. *Dyn Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithm*, 2006, 13: 116–120
- 38 Liu F, Ge Z Q, Xu X Y. On the feedback control and pole assignment of the second order singular distributed parameter control systems. *Dyn Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithm*, 2006, 13: 256–260
- 39 Reis T. Consistent initialization and perturbation analysis for abstract differential algebraic equations. *Math Control Signals Syst*, 2007, 19: 255–281
- 40 Ge Z Q, Ma Y C, Zhu G T. On the synthesis of the second order singular distributed parameter control systems (2). *Dyn Contin Discret Impuls Syst Ser B-Appl Algorithm*, 2007, 14: 853–857
- 41 Reis T. Controllability and observability of infinite dimensional descriptor systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2008, 53: 929–940
- 42 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Degenerate semi-group methods for the exponential stability of the first order singular distributed parameter systems. *J Syst Sci Compl*, 2008, 21: 260–266
- 43 Hanke M, Reis T. The perturbation and ADAE index of a degenerate hyperbolic system. *Res Math*, 2009, 53: 103–127
- 44 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Exact controllability for singular distributed parameter system in Hilbert space. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 2045–2052
- 45 Ge Z Q. GE_0 -semigroup and the exponential stability of the singular distributed parameter system. In: *Proceedings of The 3rd Workshop of International Society for Scientific Inventions (ISSI)*, Beijing, 2009. 337–342
- 46 Li S J, Wang J S. Exponential stabilizability for a class of the singular distributed parameter control system. In: *Proceedings of 2010 Chinese Control and Decision Conference*, Xuzhou, 2010. 662–666
- 47 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Generalized operator semi-group and well-posedness of singular distributed parameter system. *Sci China Math*, 2010, 40: 477–495 [葛照强, 朱广田, 冯德兴. 广义算子半群与广义分布参数系统的适定性. *中国科学: 数学*, 2010, 40: 477–495]
- 48 Liu F, Shi G D. Uniform exponential stability of the time varying singular distributed parameter systems in Hilbert Space. In: *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, Beijing, 2010. 5784–5788
- 49 Li S J, Wang J S. Linear quadratic optimal control problem for singular distributed parameter system in Hilbert space. In: *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, Beijing, 2010. 5789–5793
- 50 Ge Z Q. Mild solution and uniform exponential stability of the time varying singular distributed parameter systems in Hilbert Space. In: *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, Beijing, 2010. 5778–5783
- 51 Crandall M G, Pazy A. Nonlinear evolution operators in Banach spaces. *Israel J Math*, 1972, 11: 57–94

Solvability of a time-varying singular distributed parameter system in Banach space

GE ZhaoQiang^{1*} & FENG DeXing²

¹ *Department of Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;*

² *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China*

*E-mail: gezqjd@mail.xjtu.edu.cn

Abstract Singular distributed parameter systems are encountered much more often than distributed parameter systems. There is an essential distinction between singular and ordinary distributed parameter systems. A disturbance not only reduces the stability of singular distributed parameter systems but also strongly affects the structures of such systems, leading to, for example, impulsive behavior. Solvability is one of the most important

problems in the study of singular distributed parameter systems. The main purpose of this paper is to study the solvability of a time-varying singular distributed parameter system in Banach space. First, the generalized evolution operator induced by a bounded linear operator is introduced in Banach space, the properties of the generalized evolution operator are discussed, the generator of the generalized evolution operator is defined, and the existence of a generalized evolution operator is proved; then the solvability of the time-varying singular distributed parameter system is discussed using the generalized evolution operator, the existence and uniqueness of the strong solution are proved, and a constructive expression of the strong solution of the time-varying singular distributed parameter system is obtained. This research is theoretically and practically important to the study of the stability, controllability, and optimal control problem of the time-varying singular distributed parameter system.

Keywords solvability, strong solution, time-varying singular distributed parameter system, generalized evolution operator, Banach space

Ge ZhaoQiang was born in 1960. He received a B.S. degree from Northwest University and is now a Professor at Xi'an Jiaotong University. His research fields include generalized control systems of finite dimensions, generalized control systems of infinite dimensions, robust control, optimal control, and social and economic control systems.