

# 均匀分块矩阵的分块 TERM 分解\*

余轶原 郝鹏威

(北京大学信息科学中心, 视觉与听觉信息处理国家重点实验室, 北京 100871)

**摘要** 为提高整数变换的效率并实现并行化, 在均匀分块方式下探讨分块矩阵的分块 TERM 分解. 从扩展行列式  $\det$  定义着手, 定义了一个分块矩阵映射至矩阵的新函数——*DET*. 并证明, 它不仅具有一些可与  $\det$  相类比的重要性质, 而且对  $\det$  是完全兼容的. 利用这些定义和性质, 最终得出: 任意给定一有限维可逆线性变换矩阵和分块方式, 总可把它分解为不超过 3 个分块(单位)TERM 之积(可能需要置换和 Scaling 预处理), 并由此得到了适于并行的分块单位 SERM 分解式. 该结论不仅能涵盖元素矩阵最优 TERM 分解的结果, 而且可提供灵活的分块方式, 从而为高效合理地并行实现整数映射奠定了基础.

**关键词** 整数映射 无损压缩 并行计算 分块矩阵 行列式 矩阵分解

由于实际应用中计算精度和存储容量的限制, 用于数据无损压缩的变换应当是完全可逆的整数映射. 早期人们在这方面的尝试包括 Blume 等人提出的 S 变换<sup>[1]</sup>, Zandi 等人的 TS 变换<sup>[2]</sup>, Said 等人的 S+P 变换<sup>[3]</sup>以及 Gormish 等人的颜色空间变换<sup>[4]</sup>等等. 它们显示了整数变换技术在图像压缩、感兴趣区域编码、渐进传输和统一的有损/无损压缩系统中的良好前景. 可惜当时人们在构造正逆整数变换时大多借助一些特别的技巧, 尚未形成一套行之有效的统一理论.

Bruekers 等人<sup>[5]</sup>从网络结构角度对完全可逆和完全重构的研究对以上问题有很强的指导意义: (i) 梯形网络结构是完全可逆的基本单元, 且其正逆变换实现有“对称性”, 至于具体线性和非线性算子(在压缩中分别对应变换和量化)则是非本质的——这样我们就不必煞费苦心地对某特定取整方式去一步步构造正逆变换; (ii) 反映到矩阵结构上, 完全可逆的可能性依赖于向量矩阵分解式存在与否, 其中行向量矩阵本质上等同于单位 SERM; (iii) 单位三角矩阵总可分解为向量矩阵之积, 进而在相差一个置换的意义下行列式为 1 的矩阵也存在向量矩阵分解式.

2002-12-18 收稿, 2003-07-02 收修改稿

\* 优秀博士学位论文奖励基金(200038)和国家“九七三”项目“数学机械化与自动推理平台”(G1998030606)资助项目

遗憾的是, Bruekers 等人的工作在当时未引起足够的重视. 直至用于构造第二代小波的提升方案(lifting scheme, LS)<sup>[6]</sup>发表后, 人们才开始利用 LS 的简化梯形结构来系统的研究整数小波变换. Dewitte 等人<sup>[7]</sup>首先将非线性取整操作融合至提升模式中, 自然而简便地构造并实现了正、逆整数小波变换. Calderbank 等人<sup>[8]</sup>更是将以往的 S 和 TS 等整数变换全部纳入到小波提升框架之下, 并推广至一般的整数小波变换. 此后这类整数实现的研究蓬勃发展并被广泛应用, 但绝大多数在构造过程中仍未脱离提升步(lifting step)的限制.

基于梯形网络结构, 郝鹏威和石青云<sup>[9]</sup>最先针对一般的有限维可逆线性变换运用矩阵分解给出了整数实现. 最近, 他们又给出了个数最优的分解式<sup>[10]</sup>. 事实上, 基于此分解技术的多成分变换的可逆整数实现已被新的图像压缩国际标准 JPEG 2000 所采纳<sup>[11]</sup>, 其提案已收入 JPEG 2000 标准第二部分最终文本中.

## 1 整数变换矩阵分解理论<sup>[9]</sup>

分解的基本构成元素是三角基本可逆矩阵(TERM). 它们是一类特殊的三角矩阵: 对角元由整环的单位群的元素所构成——在  $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  上就是  $\pm 1$  和  $\pm i$ , 这也就是文献[10]定义的所谓整数因子. 显然, 单位三角矩阵是特殊的 TERM. 具体来说, 设  $A=[a_{i,j}]$  为  $N$  阶上 TERM(upper TERM), 其对角元顺次为  $j_1, \dots, j_N$ , 则正变换  $y = Ax$  可按

$$\begin{cases} y_m = j_m x_m + \left\lfloor \sum_{n=m+1}^N a_{m,n} x_n \right\rfloor, & 1 \leq m \leq N-1; \\ y_N = j_N x_N \end{cases}$$

方式实现. 其逆变换可用如下递推方式实现:

$$x_N = y_N / j_N; \quad x_m = \left( y_m - \left\lfloor \sum_{n=m+1}^N a_{m,n} x_n \right\rfloor \right) / j_m, \quad m = N-1, \dots, 1,$$

这里, “ $\lfloor \rfloor$ ”可选为上/下取整、四舍五入, 或其他取整方式. 对于下 TERM(lower TERM)同理, 但逆的实现要按自上而下进行. 可见 TERM 变换具有如下特点: (1) 它是完全可逆的整数映射; (2) 逆变换的实现无需求变换矩阵的逆, 只要利用原矩阵  $A$  对应的梯形结构递推; (3) 实现过程可在原位上计算, 不必分配额外的存储空间. 所有这些对于无损压缩都是很有吸引力的.

另一种基本矩阵是单行基本可逆矩阵(SERM), 即除去某行和整数因子所构成的对角线外其余元素为 0 的矩阵. 单位 SERM 可以表达为  $S_i = I + e_i s_i^T$ , 其中  $e_i$  为第  $i$  元为 1 而其余元为 0 的基本向量,  $s_i$  为第  $i$  元为 0 的向量. 易知, 通过一次行列置换可将 SERM 转化为简化的 TERM, 而且其逆变换的实现具有并行结构

(这种特性可推广至分块 SERM).

文献[10]得出的主要分解结果有: 对于  $N \times N$  阶非奇异矩阵  $A$  总有如下分解式成立:  $A = PLDUS_0$ , 其中  $L$  和  $U$  分别为单位下、上三角矩阵,  $D = \text{diag}(1, \dots, 1, \det(P^T A))$ ,  $S_0$  为对应于末行的单位 SERM, 亦为下 TERM(文献[10]之定理 3). 特别地, 当  $\det(A)$  为整数因子时就得到  $A = PLUS_0$ , 相应的 SERM 分解式为  $P^T A = S_N \cdots S_1 S_0$  (文献[10]之定理 4). 于是,  $A$  可通过三个 TERM 或  $N+1$  个 SERM 实现整数变换.

不过, 虽然 TERM 的逆变换免去了求矩阵逆的复杂运算, 但本质上是一种递推算法(比如, 上 TERM 之逆必须自下而上逐步进行恢复), 这使得大阶数矩阵按 TERM 分解式的整数实现效率不高. 另一方面, 即便对于单位 SERM 逆变换各分量可并行恢复, 但由于只改变一个分量值(对应一个提升步), 实际计算中 SERM 分解式对应的整数逆实现依然是串行的.

为提高线性变换整数可逆实现的计算效率并使之并行化, 本文将研究均匀分块矩阵的最佳分块 TERM 分解, 这可视为郝鹏威等人工作的继续. 分块 TERM 是一类特殊的分块三角矩阵: 对角线上各矩阵块都是由整数因子所构成的对角阵. 这显然也包含了分块单位三角矩阵. 相比之下, 分块 TERM 是更强的 TERM, 有更多的结构性零元和分块方式以供选取, 这些能进一步降低分解和变换的计算量并为用户提供更大的灵活性. 更为重要的是, 由于我们最终得到的分块 TERM 分解完全能兼容文献[10]对于元素阵的讨论, 故可借助类似的手法将其转化为适于并行的最优分块 SERM 分解式, 并根据实际处理器数目合理分块以分配作业平衡负载. 我们将先在均匀分块前提下扩展行列式( $\det$ )的定义, 得到一个分块矩阵到矩阵的映射(DET); 接着在充分讨论其性质的基础上, 研究分块单位三角矩阵分解, 最后自然地推广到分块 TERM 分解.

## 2 符号与约定

在下面的讨论过程中, 我们约定:

- 称尚未分块的矩阵为元素阵, 以区别于分块矩阵;
- 分块矩阵皆均匀分块, 也就是说, 分块矩阵的各构成矩阵块是大小相同的;

不妨设原分块矩阵所对应的元素阵有行列式(即为方阵), 这样各个矩阵块其实就是同样大小的方阵(实际应用中我们往往能够借助沿对角线添加  $I$  补足的方法以

满足均匀分块的要求). 下文用  $A_n = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$  来记行块数、列块数为  $n$  的一般

均匀分块矩阵, 其中  $A_{i,j}$  为方阵且等阶,  $1 \leq i, j \leq n$ ;

• 以  $A_n(i_1, i_2, \dots, i_m; j_1, j_2, \dots, j_m)$  表示从  $A_n$  中取第  $i_1, i_2, \dots, i_m$  块行和第  $j_1, j_2, \dots, j_m$  块列的交叉处元所得到的子分块矩阵, 其中  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n, m \leq n$ ;

• 以  $X \cdot (i) + (j) \rightarrow (j)'$  记如下分块初等行变换: 第  $i$  块行左乘矩阵  $X$  加至第  $j$  块行; 类似地, 以  $(i) \cdot Y + (j) \rightarrow (j)'$  表示分块初等列变换: 第  $i$  块列右乘  $Y$  加至第  $j$  块列.

### 3 DET 函数

在本节中我们将行列式函数扩展到分块矩阵, 以便得到一个从分块矩阵到矩阵的映射.

**定义 1** 对于分块矩阵  $A_n$ , 称  $B_k = A(1, \dots, k; 1, \dots, k-1, n)$ ,  $1 \leq k \leq n$  为  $A_n$  的  $k$  级准顺序主子分块阵.

这里, 我们所定义的准顺序主子分块阵的取法不同于经典的元素阵顺序主子式的取法.

#### 3.1 $W^{(n)}$ 的引入

首先来定义  $W^{(n)}$  函数.

**定义 2** 对于分块矩阵  $A_n$ ,  $W^{(n)}(A_n)$  采用如下递归方式定义:

(1) 当  $n=1$ ,  $W^{(1)}(A_1) := A_{11}$ ;

(2) 对于  $n=2$ , 分块矩阵  $A_2$  的右上角元  $A_{12}$  可逆时,  $W^{(2)}(A_2)$  有定义且规定如下:

$$W^{(2)}(A_2) := A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} - A_{21};$$

(3) 对于  $n \geq 3$ , 当  $W^{(n-1)}(A_n(1, \dots, n-1; 1, \dots, n-2, n))$  存在且可逆时,  $W^{(n)}(A_n)$  有定义:

$$W^{(n)}(A_n) := D_{n,n-1}^{(n)} - D_{n,n-2}^{(n)}(D_{n-1,n-2}^{(n)})^{-1}D_{n-1,n-1}^{(n)},$$

其中  $D_{i,j}^{(n)}$  为  $W^{(n-1)}(A_n(1, \dots, n-2, i; 1, \dots, n-3, j, n))$  的简记符号,  $n-1 \leq i \leq n$ ,  $n-2 \leq j \leq n-1$ .

假定  $W^{(n)}(A_n)$  有定义, 可计算得

$$W^{(1)}(A_1) = W^{(1)}(A_{11}) = A_{11}, \quad W^{(2)}(A_2) = W^{(2)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} - A_{21},$$

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(A_3) &= W^{(3)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = D_{3,2}^{(3)} - D_{3,1}^{(3)} (D_{2,1}^{(3)})^{-1} D_{2,2}^{(3)} \\
 &= (A_{33}A_{13}^{-1}A_{12} - A_{32}) - (A_{33}A_{13}^{-1}A_{11} - A_{31})(A_{23}A_{13}^{-1}A_{11} - A_{21})^{-1}(A_{23}A_{13}^{-1}A_{12} - A_{22}),
 \end{aligned}$$

以此类推, 我们可以递推地获得各阶  $W^{(n)}$  的展开式.

### 3.2 $W^{(n)}$ 的性质

下面我们来详细讨论  $W^{(n)}(A_n)$  的性质.

**性质 1** 分块矩阵  $A_n = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$  满足  $A_{11}$  可逆且  $A_{21} = \cdots = A_{n,1} = 0$ , 若

$W^{(n)}(A_n)$  有定义, 则  $W^{(n-1)}(W_n(2, \cdots, n; 2, \cdots, n))$  有定义, 且

$$W^{(n)}(A_n) = W^{(n-1)}(A_n(2, \cdots, n; 2, \cdots, n)), \forall n \geq 3.$$

证  $n=3$  时,  $D_{2,1}^{(3)} = A_{23}A_{13}^{-1}A_{11}$ ,  $D_{3,1}^{(3)} = A_{33}A_{13}^{-1}A_{11}$ . 于是  $A_{23}$  可逆, 故  $W^{(2)}(A_3(2, 3; 2, 3))$  有定义. 此时

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(A_3) &= D_{3,2}^{(3)} - D_{3,1}^{(3)} (D_{2,1}^{(3)})^{-1} D_{2,2}^{(3)} \\
 &= D_{3,2}^{(3)} - A_{3,3}A_{1,3}^{-1}A_{1,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,3}A_{2,3}^{-1}D_{2,2}^{(3)} \\
 &= A_{3,3}A_{2,3}^{-1}A_{2,2} - A_{3,2},
 \end{aligned}$$

运用递推, 可证  $n > 3$  时, 对  $n-1 \leq i \leq n$ ,  $n-2 \leq j \leq n-1$  有

$$W^{(n-1)}(A_n(1, \cdots, n-2, i; 1, \cdots, n-3, j, n)) = W^{(n-2)}(A_n(2, \cdots, n-2; 2, \cdots, n-3, j, n)).$$

故原命题成立.

**性质 2**  $W^{(n)}$  对分块矩阵的末块行和第  $n-1$  块列分别有左、右线性性质.

即: 当  $n > 1$  时,

$$\begin{aligned}
 W^{(n)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots & A_{n-1,n} \\ XA_{n,1} + A'_{n,1} & \cdots & XA_{n,n} + A'_{n,n} \end{bmatrix} &= X \cdot W^{(n)}(A_n) + W^{(n)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots & A_{n-1,n} \\ A'_{n,1} & \cdots & A'_{n,n} \end{bmatrix}; \\
 W^{(n)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n-1}Y + A'_{1,n-1} & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n-1}Y + A'_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix} &= W^{(n)}(A_n) \cdot Y + W^{(n)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A'_{1,n-1} & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A'_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

于是, 当  $X, Y$  可逆时有

$$W^{(n)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ XA_{i,1} & \cdots & XA_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} = W^{(n)}(A_n), \quad 1 \leq i \leq n-1;$$

$$W^{(n)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j}Y & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j}Y & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} = W^{(n)}(A_n), \quad j \neq n-1.$$

证明略. 应用以上性质及数学归纳法, 可得如下命题:

**命题 1** 若分块矩阵  $A_n$  末块行(或第  $n-1$  块列)元素皆为  $0$  且  $W^{(n)}$  定义存在, 则  $W^{(n)}(A_n)$  为  $0$ . 即  $W^{(n)}(A_n)$  存在且  $A_{n,i} = 0, 1 \leq i \leq n \Rightarrow W^{(n)}(A_n) = 0$ .

**命题 2** 若分块矩阵  $A_n$  末块行(或第  $n-1$  块列)与其他某块行(块列)相同且  $W^{(n)}$  定义存在, 则  $W^{(n)}(A_n)$  为  $0$ .

下面来讨论  $W^{(n)}$  对初等变换的性质.

**性质 3** 假定原分块矩阵之  $W^{(n)}$  存在, 对如下分块初等行变换  $X \cdot (i) + (j) \rightarrow (j)'$ , 当  $i < j$  时,  $W^{(n)}$  在变换前后保持不变.

**证** 先归纳证明  $j=n$ ; 再用此结论归纳证明  $j = n-1$  的情形; 最后利用以上结论和归纳法对  $j \leq n-2$  情形证明.

**性质 4** 假定原分块矩阵之  $W^{(n)}$  存在, 对于如下分块初等列变换  $(i) \cdot Y + (j) \rightarrow (j)'$ , 当  $i = n$  而  $j < n$  时,  $W^{(n)}$  在变换前后保持不变.

**证**  $n = 2$  时容易验证, 再用此结论证明  $n = 3$  情形, 递推即可.

### 3.3 DET 的引入

应用  $W^{(n)}$ , 我们给出 **DET** 的定义.

**定义 3** 对于分块矩阵  $A_n$ , **DET**( $A_n$ ) 采用如下递归方式定义:

(1) 当  $n=1$ , **DET**( $A_1$ ) :=  $A_{11}$ ;

(2) 对于  $n \geq 2$ , 当  $W^{(n)}(A_n)$  存在时, 则 **DET**( $A_n$ ) 定义存在且规定如下:

$$\text{DET}(A_n) := W^{(n)}(A_n) \cdot \text{DET}(B_{n-1}) = W^{(n)}(A_n) \cdot \text{DET}(A_n(1, \cdots, n-1; 1, \cdots, n-2, n)).$$

从以上定义可见, 若 **DET**( $A_n$ ) 存在, 则其各阶准顺序主子分块阵  $B_k$  之 **DET** 亦存在. 从计算 **DET**( $A_n$ ) 的过程中也可获得各个 **DET**( $B_k$ ). 假定 **DET** 定义存在, 可计算得:

$$DET(A_1) = DET(A_{11}) = A_{11},$$

$$DET(A_2) = DET \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = (A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} - A_{21}) \cdot A_{12},$$

$$\begin{aligned} DET(A_3) &= DET \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = (D_{3,2}^{(3)} - D_{3,1}^{(3)}(D_{2,1}^{(3)})^{-1}D_{2,2}^{(3)}) \cdot D_{2,1}^{(3)} \cdot A_{13} \\ &= [(A_{33}A_{13}^{-1}A_{12} - A_{32}) - (A_{33}A_{13}^{-1}A_{11} - A_{31})(A_{23}A_{13}^{-1}A_{11} - A_{21})] \cdot \\ &\quad (A_{23}A_{13}^{-1}A_{12} - A_{22})(A_{23}A_{13}^{-1}A_{11} - A_{21})A_{13}. \end{aligned}$$

类似地, 我们可以具体地获得各阶分块矩阵的  $DET$  表达式.

### 3.4 $DET$ 的性质

对于  $DET$ , 我们能得到可类比于行列式  $\det$  的一些重要性质.

**性质 5** 设分块矩阵  $A_n$  满足  $A_{11} = I$  且  $A_{21} = \cdots = A_{n,1} = 0$ , 若  $DET(A_n)$  有定义, 则  $DET(A_n) = DET(A_n(2, \cdots, n; 2, \cdots, n))$ ,  $\forall n \geq 2$ .

应用  $W^{(n)}$  相关性证明, 具体过程略. 下同.

**性质 6**  $DET$  对分块矩阵的末块行有左线性, 即, 当  $n > 1$  时,

$$DET \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots & A_{n-1,n} \\ XA_{n,1} + A'_{n,1} & \cdots & XA_{n,n} + A'_{n,n} \end{bmatrix} = X \cdot DET(A_n) + DET \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots & A_{n-1,n} \\ A'_{n,1} & \cdots & A'_{n,n} \end{bmatrix},$$

对于末列块有: 当  $X$  可逆时,

$$DET \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n-1} & A_{1,n}X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n}X \end{bmatrix} = DET(A_n) \cdot X;$$

$DET$  对其他块行、块列的乘法特性: 设  $B_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 为分块矩阵  $A_n$  的 1 至  $n$  级准顺序主子分块阵(见定义 1), 当  $X$  可逆时, 对  $1 \leq i \leq n-1$  有

$$\begin{aligned} DET \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ XA_{i,1} & \cdots & XA_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} &= DET \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,i}X & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,i}X & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \\ &= W^{(n)}(B_n) \cdots W^{(i+1)}(B_{i+1}) \cdot X \cdot DET(B_i) = DET(A_n) \cdot Y, \end{aligned}$$

这里  $Y = \text{DET}(B_i)^{-1} \cdot X \cdot \text{DET}(B_i)$ , 其实对于第  $n-1$  块列不必要求  $X$  可逆.

综上所述可得, 若  $X_i (1 \leq i \leq n-1)$  可逆, 则

$$\text{DET} \left( \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \right) \\ = X_n \cdot W^{(n)}(A_n) \cdots X_1 \cdot W^{(1)}(A_1).$$

若  $Y_j (1 \leq j \leq n \text{ 且 } j \neq n-1)$  可逆, 则

$$\text{DET} \left( \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Y_n \end{bmatrix} \right) = W^{(n)}(A_n) \cdot Y_{n-1} \cdots W^{(2)}(A_2) \cdot Y_1 \cdot W^{(1)}(A_1) \cdot Y_n.$$

有了这两条重要的 scaling 性质, 可保证后文 scaling 修正过程的灵活性和实用性.

**性质 7** 假定原分块矩阵之  $\text{DET}$  存在, 对如下分块初等行变换  $X \cdot (i) + (j) \rightarrow (j)'$ , 当  $i < j$  时,  $\text{DET}$  在变换前后保持不变.

**性质 8** 假定原分块矩阵之  $\text{DET}$  存在, 对于如下分块初等列变换  $(i) \cdot Y + (j) \rightarrow (j)'$ , 当  $i = n$  而  $j < n$  时,  $\text{DET}$  在变换前后保持不变.

#### 4 分块 TERM 分解

我们将探讨如何将一个分块矩阵分解成尽可能少的几个分块 TERM 之积, 这可视为元素阵最优 TERM 分解(文献[10]中的定理 3)的推广.

对于  $n$  阶分块矩阵  $A_n$ , 我们可以给出分块 TERM 分解的算法, 见 BLUS 算法.

##### BLUS 算法

以  $A_n^{(i)}$  (或  $A^{(i)}$ ) 记第  $i$  层循环的分块矩阵,  $A^{(n)}$  表示最终得到的分块矩阵.

For  $i = 1$  to  $n-1$

如果  $A_{i,n}^{(i)}$  可逆, 则进行以下操作; 否则, 异常中止.

(i.1) 先施行分块列变换  $(n) \cdot X_i + (i) \rightarrow (i)'$ , 使  $A_{i,i}^{(i)}$  变成  $I$ ;

(i.2) 分块行变换: 用  $A_{i,i}^{(i)}$  (已变为  $I$ ) 作为主元对下面各行块实行分块

Gauss 消元.

End

**定理 1** 对于分块矩阵  $A_n$ , 若  $DET(A_n)$  存在, 则上述算法步步可行, 且最终可得到分解结果  $A_n = LDUS$ , 其中  $D = \text{diag}(I, \dots, I, DET(A_n))$ ,  $L$  和  $U$  分别为分块单位下、上三角矩阵,  $S$  为对应于末块行的分块单位 SERM, 即除末块行和对角线块外其余元为零的分块单位下三角矩阵(显然分解形式也可等价地表述为  $A_n = D \cdot LUS$  或  $A_n = LUS \cdot D$ ).

证 只需证明(i.1)处  $A_{i,n}^{(i)}$  可逆即可保证 BLUS 算法逐步可行. 利用  $DET$  性质 3 和 4 可知(i.1)和(i.2)步  $DET$  保持不变:  $DET(A_n^{(i)}) = DET(A_n)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . 又根据性质 5,  $DET(A_n^{(i)}(i, \dots, n; i, \dots, n))$  存在且有  $DET(A_n^{(i)}) = DET(A_n^{(i)}(i, \dots, n; i, \dots, n))$ . 于是由  $DET$  定义可知  $A_{i,n}^{(i)}$  可逆. 故算法逐步可行且最终  $A_{n,n}^{(n)} = DET(A_n)$ . 从分解过程  $LA_n S = DU$  易得  $A_n$  的最终分解形式( $L^{-1}, S^{-1}$  仍能分别记为  $L, S$  的形式). 综上, 定理得证.

**推论 1** 若  $DET(A_n)$  为对角线由整数因子所构成的对角矩阵, 则  $A_n$  有分块 TERM 分解:  $A_n = LUS$ . 特别地, 当  $DET(A_n) = I$  时,  $A_n = LUS$  为分块单位三角分解.

其实只要  $DET(A_n)$  可逆, 就可利用性质 6 先对  $A_n$  某块行或某块列进行比例放缩(scaling)操作使  $DET$  归一化, 再进行分块单位三角分解. 当然,  $LU$  还可进一步写为  $S_n S_{n-1} \cdots S_1$  的分块 SERM 分解式(类比于文献[10]之定理 4), 进而可得  $A_n$  的分块 SERM 分解用于并行计算.

**推论 2** 对于分块矩阵  $A_n$ , 若  $DET(A_n)$  存在, 则  $\det(DET(A_n)) = \det(A_n)$ .

此结论也可以用于计算大阶数矩阵的行列式.

**推论 3** 给定元素阵  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , 若将其视为块大小为 1 的  $n \times n$  的分

块矩阵  $A_n$  时  $DET(A_n)$  存在, 则  $DET(A_n) = \det(A)$ .

从推论 2 和 3 可见  $DET$  对  $\det$  的兼容性及其合理性. 事实上, 利用下文的置换技术, 我们还将看到, 这里的分块分解式将完全兼容文献[10]关于元素阵 TERM 分解的结论.

## 5 一般可逆线性变换分块 TERM 分解的实现

要想将以上的分块 TERM 分解实用化, 首先要解决  $DET$  的存在性问题.

**引理 1** 对于分块矩阵  $A_n$ ,  $W^{(n)}(A_n)$  可逆当且仅当  $DET(A_n)$  可逆.

先证其必要性, 再用此结论归纳证其充分性. 在此基础上, 我们有如下定理:

**定理 2** 对于分块矩阵  $A_n$ ,  $n \geq 2$ ,  $DET(A_n)$  有定义的充要条件为:  $A_n$  的 1 至  $n-1$  级准顺序主子分块阵  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  (见定义 1) 皆可逆.

**证** 必要性: 归纳证明, 利用引理 1 和推论 2. 充分性: 对  $n$  归纳证明.  $n=2$  时命题显然成立. 假定  $n=n_0-1$  命题成立, 考察  $n=n_0$  的情形. 为方便起见, 记  $n_0$  为  $n$ . 易知  $B_1, B_2, \dots, B_{n-2}$  恰为  $B_{n-1}$  的准顺序主子分块阵. 由归纳假设, 通过以下途径可得证:  $DET(B_{n-1})$  存在  $\xRightarrow{\text{推2}} \det(DET(B_{n-1})) = \det(B_{n-1}) \Rightarrow DET(B_{n-1})$  可逆  $\xRightarrow{\text{引理}} W^{(n-1)}(B_{n-1})$  可逆  $\Rightarrow DET(A_n)$  有定义.

将分块矩阵  $A_n$  所对应的初始元素矩阵记为  $(A_n)_e$ , 而  $(A)_{p(A_n)}$  表示按  $A_n$  的分块结构把元素阵  $A$  分块所得的分块矩阵. 借助于元素一级(非矩阵块)的置换, 我们可保证  $DET$  存在:

**命题 3** 对于分块矩阵  $A_n$ , 记  $A = (A_n)_e$ , 若  $A_n$  (或  $A$ ) 可逆, 则存在元素一级的行置换矩阵  $P$ , 使  $(PA)_{p(A_n)} = A'_n$  的 1 至  $n-1$  级准顺序主子分块阵皆可逆, 从而  $DET(A'_n)$  存在且可逆. 类似地, 也存在元素一级的列置换矩阵  $P$ , 使  $(AP)_{p(A_n)}$  之  $DET$  存在且可逆.

**证** 以行置换为例. 令  $E_1 = A_n$ , 抽取  $E_1$  的子分块矩阵  $H_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n-2} & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n-2} & A_{n,n} \end{bmatrix}$ , 并记  $G_1 = (H_1)_e$ . 由于  $A_n$  可逆, 可知  $G_1$  列满秩(记列数为  $c_1$ ), 于是存在置换  $P_1$  使  $G'_1 = P_1 G_1$  的前  $c_1$  行所构成的子矩阵可逆, 也即  $H'_1 = (G'_1)_{p(H_1)}$  的前  $n-1$  个块行构成的子分块矩阵可逆, 于是  $(P_1 A)_{p(A_n)}$  的第  $n-1$  级准顺序主子分块阵可逆, 记为  $E_2$ .

类似地, 对  $E_2$  仿上处理可得  $P_2$ , 使  $(P_2(P_1 A))_{p(A_n)}$  第  $n-2$  级准顺序主子分块阵可逆, 且易知第  $n-1$  级准顺序主子分块阵仍保持可逆(严格地说,  $P_2$  要扩充为  $\begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  后再作用于  $A$ , 这里不妨仍记为  $P_2$ ). 依此过程不断进行, 最后可得  $P = P_{n-1} \cdots P_1$ , 使  $(PA)_{p(A_n)} = A'_n$  所有准顺序主子分块阵可逆, 从而  $DET(A'_n)$  存在, 进而可逆(推论 2).

于是, 给定一个可逆元素矩阵  $A$  和均匀分块方式, 我们必能通过元素一级的置换(行、列都可)保证操作后的矩阵再按分块后(记为  $A_n$ ), 其 1 至  $n-1$  级准顺序主子分块阵皆可逆, 从而  $DET(A_n)$  存在(定理 2)且可逆(推论 2). 也就是说, 只要

分块矩阵  $A_n$  可逆, 则存在元素一级的行置换矩阵  $P$ , 使  $A_n = PLDUS$  (亦有  $PDLUS, PLUSD$ ); 类似地也存在元素一级的列置换矩阵  $P$ , 使  $A_n = LDUSP$  (亦有  $LUSDP, DLUSP$ ), 其中  $L, D, U$  和  $S$  的意义见定理 1, 但  $D$  的末项相应为  $DET(P^T A_n)$  或  $DET(A_n P^T)$  (这里  $DET$  仍对应  $A_n$  的分块方式). 这样一来, 当分块矩阵退化至元素阵情形 (即每个元素视为一个矩阵块) 时, 分解式就是文献[10]所给出的最佳 TERM 分解.

实际应用中我们可借助 Gauss 消元来挑选极大线性无关组以寻找  $P$ . 关于分解式中  $D$  的末项的处理, 一方面可利用性质 6 选择某(些)行或列对  $DET$  归一化后再分解, 这样所得为分块单位三角分解式, 不存在末尾项; 另一方面, 也可对所得  $D$  的末项矩阵继续分块降低阶数, 直至可简便地应用元素一级的 TERM 分解. 此外, 为满足均匀分块的要求, 可能要在预处理过程中对原矩阵沿对角添加  $I$  以补足.

值得指出的是, 从文献[10]第四节算法设计的角度也可证明分解式  $PLDUS$ . 不过通过引入  $DET$ , 可在执行分解算法前就显式的快速计算出  $D$  的尾项, 便于提前判断与决策. 更为重要的是, 由于有了性质 6, 允许我们随心所欲地挑选某个或某些行块或列块进行 scaling, 能更好地满足实际需要 (比如调整分量的动态范围).

## 6 应用举例

根据第 4、5 节所述方法我们对任意实、复可逆线性变换编制了实用分解程序, 这里只就实数变换九点 DCT 举例说明.

### 例 1 九点 DCT.

$$A = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.4642 & 0.4082 & 0.3030 & 0.1612 & 0.0000 & -0.1612 & -0.3030 & -0.4082 & -0.4642 \\ 0.4430 & 0.2357 & -0.0819 & -0.3611 & -0.4714 & -0.3611 & -0.0819 & 0.2357 & 0.4430 \\ 0.4082 & 0.0000 & -0.4082 & -0.4082 & -0.0000 & 0.4082 & 0.4082 & 0.0000 & -0.4082 \\ 0.3611 & -0.2357 & -0.4430 & 0.0819 & 0.4714 & 0.0819 & -0.4430 & -0.2357 & 0.3611 \\ 0.3030 & -0.4082 & -0.1612 & 0.4642 & 0.0000 & -0.4642 & 0.1612 & 0.4082 & -0.3030 \\ 0.2357 & -0.4714 & 0.2357 & 0.2357 & -0.4714 & 0.2357 & 0.2357 & -0.4714 & 0.2357 \\ 0.1612 & -0.4082 & 0.4642 & -0.3030 & -0.0000 & 0.3030 & -0.4642 & 0.4082 & -0.1612 \\ 0.0819 & -0.2357 & 0.3611 & -0.4430 & 0.4714 & -0.4430 & 0.3611 & -0.2357 & 0.0819 \end{bmatrix}.$$

假定均匀分为 3 块. 我们可选择如下方式之一操作:

(i) scaling 在分解前实行.

先求  $DET$ , 有利于事先判断决策. 根据命题 3 和  $DET$  定义, 得到

$$A'_n = P^T A_n, \text{ 且}$$

$$DET(A'_n) = \begin{bmatrix} 1.0279 & 0.7223 & 0.0170 \\ 0.6231 & -0.6022 & -0.4636 \\ 0.1745 & -0.1260 & 0.8250 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同时也得到了  $A'_n$  的准顺序主子分块阵  $B'_k$  的  $DET$ :

$$DET(B'_1) = \begin{bmatrix} -0.4642 & 0.4082 & -0.1612 \\ -0.3030 & -0.4082 & -0.4642 \\ -0.4430 & -0.2357 & 0.3611 \end{bmatrix},$$

$$DET(B'_2) = \begin{bmatrix} -0.1749 & -0.6086 & 0.1902 \\ 0.2114 & -0.2245 & -0.6075 \\ 0.7795 & 0.0621 & 0.2059 \end{bmatrix}.$$

然后可根据  $DET$  性质 2 挑选行(列)作 scaling 了. 不妨取末块行, 得到  $A_n^*$  满足  $DET(A_n^*) = I$ . 最后利用 BLUS 算法得分块单位 TERM 分解:  $A_n^* = LUS_0$ , 其中

$$L = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.4047 & -0.1341 & -1.6488 \\ -0.6640 & -0.7095 & 1.1264 \\ 0.7010 & -0.1996 & 0.4091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.8616 & -0.4221 & -0.2200 \\ 0.1861 & -0.0297 & -1.7043 \\ -0.6688 & -0.5769 & 0.4268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5125 & -0.3029 & -0.6593 \\ 1.9924 & 0.3798 & -0.5392 \\ -0.5579 & 2.1764 & -0.5790 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6747 & 0.2574 & -0.0448 \\ 0.7987 & 1.2071 & -0.9397 \\ 0.8973 & -0.9645 & -0.3025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4642 & 0.4082 & -0.1612 \\ -0.3030 & -0.4082 & -0.4642 \\ -0.4430 & -0.2357 & 0.3611 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1749 & -0.6086 & 0.1902 \\ 0.2114 & -0.2245 & -0.6075 \\ 0.7795 & 0.0621 & 0.2059 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0.2728 & 0.8655 & 0.8138 \\ -1.6400 & 0.1963 & 1.1839 \\ 0.2642 & 0.5371 & -2.2249 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6874 & -0.6345 & -1.0269 \\ 1.5270 & -0.1200 & -0.5295 \\ -0.4183 & 3.1198 & -0.5409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

(ii) scaling 在分解后实行.

这种方式实现起来更为便捷. 由命题 3, 有  $A_n = PDLUS_0$ , 其中  $P, L, U$  和  $S_0$  同上, 而

$$D = \text{diag} \left( I, I, \begin{bmatrix} 1.0279 & 0.7223 & 0.0170 \\ 0.6231 & -0.6022 & -0.4636 \\ 0.1745 & -0.1260 & 0.8250 \end{bmatrix} \right),$$

同时在分解过程中我们也同样依次得到  $\text{DET}(B'_k)$  之值, 见(i).  $D$  的末项可用作 scaling, 当然也可继续分块分解. 经验证,  $D^{-1}P^T \cdot A_n = A_n''$  成立.

无论按何种方式进行, 最后所得的  $LU$  还可进一步作分块 SERM 分解:  $LU = S_3 S_2 S_1$ , 其中  $S_i = I + e_i s_i^T$ ,  $e_i$  为第  $i$  个矩阵元为  $I$  而其余元为  $0$  的基本分块矩阵,  $s_i$  的第  $i$  个矩阵块为  $0$ :

$$\begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ s_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6747 & 0.2574 & -0.0448 \\ 0.7987 & 1.2071 & -0.9397 \\ 0.8973 & -0.9645 & -0.3025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4642 & 0.4082 & -0.1612 \\ -0.3030 & -0.4082 & -0.4642 \\ -0.4430 & -0.2357 & 0.3611 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.4047 & -0.1341 & -1.6488 \\ -0.6640 & -0.7095 & 1.1264 \\ 0.7010 & -0.1996 & 0.4091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1749 & -0.6086 & 0.1902 \\ 0.2114 & -0.2245 & -0.6075 \\ 0.7795 & 0.0621 & 0.2059 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.9153 & -0.6999 & 1.2358 \\ 0.0099 & 0.3992 & 1.3735 \\ 1.4080 & 0.7767 & -2.7077 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5125 & -0.3029 & -0.6593 \\ 1.9924 & 0.3798 & -0.5392 \\ -0.5579 & 2.1764 & -0.5790 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是有  $A_n^* = S_3 S_2 S_1 S_0$ . 此分块单位 SERM 分解式可用于完全可逆的整数实现. 例如, 考虑对输入向量  $[34 \ 250 \ 49 \ 136 \ 223 \ 233 \ 36 \ 67 \ 153]^T$  的变换. 若采用原来的变换矩阵直接进行浮点计算可得变换结果  $[-58.4684 \ 7.7644 \ 90.4873 \ -14.2887 \ -103.4733 \ 393.6667 \ -168.4232 \ 22.6347 \ -66.4220]^T$ , 四舍五入后为  $[-58 \ 8 \ 90 \ -14 \ -103 \ 394 \ -168 \ 23 \ -66]^T$ ; 再利用相应逆变换矩阵进行恢复得  $[34.5268 \ 249.4952 \ 49.6439 \ 136.1770 \ 222.9072 \ 232.9651 \ 36.5296 \ 67.2617 \ 152.4935]^T$ , 其四舍五入结果是  $[35 \ 249 \ 50 \ 136 \ 223 \ 233 \ 37 \ 67 \ 152]^T$ . 可见, 恢复信号和原始数据不能保证完全相等, 即便 DCT 本身有可逆性, 这一过程仍是有损的. 采用我们的分块 SERM 分解式得整数变换结果  $[-58 \ 9 \ 91 \ -15 \ -103 \ 394 \ -168 \ 22 \ -66]^T$ , 这与直接变换的误差极其微小; 仍然依据分解式进行反变换计算, 就可得到和原始输入完全相等的向量. 也就是说, 我们的矩阵分解结果是支持整数可逆实现的. 更重要的, 这里的分解项数最终决定于分块阶数而非原矩阵阶数, 可取得比元素阵分解<sup>[10]</sup>更少的分解项数, 且对于整数逆变换的高效率计算(尤其是并行)有很大优势.

## 7 结论

综合全文, 我们总结所得的主要结论:

- (1) 定义了一个从分块矩阵映到矩阵的“行列式”函数 **DET**, 并讨论了其重要性质;
- (2) **DET** 的定义是对  $\det$  的延伸,  $\det$  是 **DET** 的特例——当分块大小皆为 1 时, **DET** 即  $\det$  值(见推论 2 和 3);
- (3) **DET** 存在的充要条件是分块矩阵的所有 1 至  $n-1$  级准顺序主子分块阵皆可逆(定理 2);
- (4) 分块矩阵  $A_n$  之 **DET** 存在时, 有分块分解式  $A_n = LDUS$  成立(定理 1); 若  $\mathbf{DET}(A_n)$  是由整数因子构成的对角阵或  $I$ , 则相应的有分块 TERM 分解或分块单位三角分解:  $A_n = LUS$  (推论 1). 进一步得到, 只要分块矩阵  $A_n$  可逆, 就有分解式

$A_n = PLDUS$  和  $A_n = LDUSP$  (命题 3). 这意味着通过对可逆矩阵施行适当的置换 (见命题 3 之证明) 和 scaling (利用 *DET* 性质 2), 它可分解为三个分块 TERM (甚至分块单位三角矩阵) 之积.

我们最终给出的分块 TERM 和分块 SERM 分解式可用于要求保持完全重构特性的信号变换 (如无损压缩), 且以上结论能涵盖文献[10]对元素阵 TERM 分解的讨论. 相比之下, 本文的分块 SERM 分解式具有更少的分解项数和完全并行特性, 便于根据实际情况设计分块模式实现整数变换的并行计算. 不仅如此, 由于分解和相应的可逆整数变换都是在块一级上完成的, 有诸多优化算法 (如 BLAS) 可以应用, 使之即使用于串行也有较高效率, 从而成为大阶数矩阵整数变换的一条有效途径.

应当指出, 虽然本文假定了均匀分块的前提, 但其实分解式也可进一步推广至满足对角元阶数递增的分块矩阵. 最后, 能否通过行列置换或其他方式约化 *D* 的尾项是值得进一步研究的课题.

## 参 考 文 献

- 1 Blume H, Frand A. Reversible and irreversible image data compression using the S-transform and Lempel-Ziv coding. In: Proceedings of SPIE, 1989. 1091: 2 ~ 18
- 2 Zandi A, Allen J, Schwartz E, et al. CREW: Compression with reversible embedded wavelets. In: James A S, Martin C, eds. Proceedings of IEEE Data Compression Conference. Snowbird: IEEE Computer Society Press, 1995. 212 ~ 221
- 3 Said A, Pearlman W A. An image multiresolution representation for lossless and lossy compression. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(9): 1303 ~ 1310
- 4 Gormish M J, Schwartz E L, Keith A F, et al. Lossless and nearly lossless compression for high quality images. In: Proceedings of SPIE, 1997. 3025: 62 ~ 70
- 5 Bruekers F A M L, van den Enden A W M. New networks for perfect inversion and perfect reconstruction. IEEE J on Selected Areas in Communications, 1992, 10(1): 130 ~ 137
- 6 Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. J of Applied and Computational Harmonic Analysis, 1996, 3(2): 186 ~ 200
- 7 Dewitte S, Cornelis J. Lossless integer wavelet transform. IEEE Signal Processing Letters, 1997, 4(6): 158 ~ 160
- 8 Calderbank A R, Daubechies I, Sweldens W, et al. Wavelet transform that map integers to integers. J of Applied and Computational Harmonic Analysis, 1998, 5(3): 332 ~ 369
- 9 郝鹏威, 石青云. 可逆线性变换的整数实现. 中国科学, E 辑, 2000, 30(2): 132 ~ 141
- 10 Hao P, Shi Q. Matrix factorizations for reversible integer mapping. IEEE Trans Signal Processing, 2001, 49(10): 2314 ~ 2324
- 11 Hao P, Shi Q. Proposal of reversible integer implementation for multiple component transforms. ISO/IEC JTC1/SC29/WG1N 1720, Arles, France, July 3~7, 2000
- 12 丘维声. 高等代数. 北京: 高等教育出版社, 1996