一类二阶微分方程属极限圆型充要条件*

欧 阳 亮

(山东大学数学系,济南)

一、引　言

本文考虑二阶微分方程及其摄动方程

$$x'' + a(t)x = 0, \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{1}$$

$$y'' + [a(t) + b(t)]y = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{2}$$

称方程(1)或方程(2)属于极限圆型(简记为 L. C.),如果方程(1)或方程(2)的所有的解均属于 $L^2[0, \infty)$. 称方程(1)或方程(2)为拉格朗日稳定(简记为 L.S.),如果方程(1)或方程(2)的所有的解在$[0, \infty)$上均为有界. 称方程(1)或方程(2)为强有界(简记为 L.S.*),如果方程(1)或方程(2)的所有的解以及解的导数在$[0, \infty)$均为有界. 称方程(1)或方程(2)为强极限圆型(简记为 L.W.),如果对某一函数 $W(t) \geqslant 1$ 方程(1)或方程(2)的一切解均满足

$$\int_0^\infty W(t)|x(t)|^2 dt < \infty \left(\text{或 } \int_0^\infty W(t)|y(t)|^2 dt < \infty\right).$$

Everitt[1] 将下列问题称为方程(1)按极限点或极限圆分类问题,即求方程(1)属于 L.C. 时其系数 $a(t)$ 所应满足的充要条件. 这一问题在奇型边值问题与二阶微分算子的谱理论中有重要应用[2],但自1910年以来,这一问题一直没有解决. 本文定理1在假设方程(1)与方程(2)均属于 L.S.* 的条件下,得到方程(2)属于 L.C.∩L.S.* 的充要条件,定理2参照 Patula 和 Wong 的结果给出当方程(1)属于 L.S.* 时,保证方程(2)仍属于L.S.*的充分条件,最后介绍了方程(1)属于 L.S.* 的一些简单判定和一些其他有关的结果. 如无特别声明,以下均设方程(1)、(2)中系数 $a(t)$, $b(t)$ 是 $[0, \infty)$上局部(L)可积实函数.

二、主要定理及推论

定理 1　假设方程(1)与方程(2)均属于 L.S.*,则方程(2)属于 L.C. 的充要条件是方程(1)属于 L.C..

证　充分性. 已设方程(1)、(2)均属 L.S.*,方程(1)属 L.C.,若 $y(t)$ 表方程(2)的任一实解,其始值记为 $y(0)$, $y'(0)$. 用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 表方程(1)的朗斯基行列式

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1'(0) & x_2'(0) \end{vmatrix} = 1, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{3}$$

的两个线性无关的实解,利用拉格朗日的常数变易法可知存在连续函数 $c_1(t)$, $c_2(t)$ 使

$$y(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \tag{4}$$

本文1985年1月4日收到.

* 中国科学院科学基金资助的课题.

$$c_1(t) = c_1(0) + \int_0^t b(\tau)[c_1(\tau)x_1(\tau) + c_2(\tau)x_2(\tau)]x_2(\tau)d\tau, \tag{5}$$

$$c_2(t) = c_2(0) - \int_0^t b(\tau)[c_1(\tau)x_1(\tau) + c_2(\tau)x_2(\tau)]x_1(\tau)d\tau, \tag{6}$$

常数 $c_1(0)$ 及 $c_2(0)$ 只需取得满足于

$$c_1(0)x_1(0) + c_2(0)x_2(0) = y(0), \quad c_1(0)x_1'(0) + c_2(0)x_2'(0) = y'(0),$$

将(4)式分别代入(5)、(6)二式,我们就得到

$$c_1(t) = c_1(0) + \int_0^t b(\tau)y(\tau)x_2(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$c_2(t) = c_2(0) - \int_0^t b(\tau)y(\tau)x_1(\tau)d\tau, \tag{8}$$

由于

$$x_i'' + a(t)x_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{9}$$

$y(t)$ 满足(2)式,故用 $y(t)$ 同乘(9)式两边, $x_i(t)$ 同乘(2)式两边,再将所得两式积分后相减,我们即得

$$\begin{aligned}\int_0^t b(\tau)x_i(\tau)\, y(\tau)d\tau &= \int_0^t [y(\tau)x_i''(\tau) - x_i(\tau)y''(\tau)]d\tau \\ &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}[y(\tau)x_i'(\tau) - x_i(\tau)y'(\tau)]d\tau = [y(t)x_i'(t) - x_i(t)y'(t)] \\ &\quad - [y(0)x_i'(0) - x_i(0)y'(0)] = O(1), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leqslant t < \infty.\end{aligned} \tag{10}$$

将(10)式代回(7)式和(8)式,即可估计出

$$|c_1(t)| + |c_2(t)| = O(1), \ 0 \leqslant t < \infty, \tag{11}$$

由此即得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^2(t)dt &= \int_0^\infty [c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)]^2 dt \\ &\leqslant \int_0^\infty [|c_1(t)| + |c_2(t)|][x_1^2(t) + x_2^2(t)]dt \\ &= O\left(\int_0^\infty x_1^2(t)dt + \int_0^\infty x_2^2(t)dt\right) < \infty,\end{aligned} \tag{12}$$

充分性得证. 再证必要性.

令 $a(t) + b(t) = K(t)$, 方程(1)、(2)分别改写为

$$x'' + [K(t) - b(t)]x = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{13}$$

$$y'' + K(t)y = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{14}$$

若方程(2)属于 L.C.∩L.S.*, 又方程(1)(因而方程(13))属于 L.S.*, 利用充分性已使用过的方法可以证明方程(13)(因而方程(1))属于 L.C..

同理可证

推论 1 假设方程(1)属于 L.S.*∩L.W., 方程(2)属于 L.S.*, 则方程(2)属于 L.W.∩L.S.*.

为了解脱定理1中方程(2)属于 L.S.* 那一假设,我们可以应用下述

Bellman 定理[3] 假设 (i) 方程(1)属于 L.S.*, (ii) $\int_0^\infty |b(t)|dt < \infty$, 则方程(2)属于 L.S.* 及

定理 2 假设 (i) 方程(1)属于 L.S.*∩L.C.; (ii) $b(t) = O(1)$, $0 \leqslant t < \infty$,

则方程(2)属于 L.S.$^*\cap$L.C..

证 由条件 (i)、(ii) 及文献[4]注 2,我们可知方程(2)属于 L.C.$\cap$L.S.,尚需证明方程(2)的任一实解 $y(t)$ 满足 $y'(t)\in L^\infty[0,\infty)$,为此利用上述(7)、(8)两式,已设 $x_i(t)\in L^2[0,\infty)$,$i=1,2$,因此,

$$\left|\int_0^t b(\tau)x_i(\tau)y(\tau)d\tau\right|\leqslant O(1)\left[\int_0^t x_i^2(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t y^2(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}=O(1),$$

故 $|c_1(t)|+|c_2(t)|=O(1)$,$0\leqslant t<\infty$ 仍成立.

再由(5)式和(6)式,我们可得

$c_1'(t)=b(t)y(t)x_2(t)$,$c_2'(t)=-b(t)y(t)x_1(t)$,利用条件 (i)、(ii) 及 $y(t)\in L^\infty[0,\infty)$,可知

$$c_1'(t)=O(|b(t)||y(t)||x_2(t)|)=O(1),\quad 0\leqslant t<\infty,$$
$$c_2'(t)=O(|b(t)||y(t)||x_1(t)|)=O(1),\quad 0\leqslant t<\infty,$$

因此

$$\begin{aligned}|y'(t)|&=|c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)+c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)|\\&\leqslant(|c_1'(t)|+|c_2'(t)|)(|x_1(t)|+|x_2(t)|)+(|c_1(t)|\\&\quad+|c_2(t)|)(|x_1'|+|x_2'|)=O(1),\quad 0\leqslant t<\infty.\end{aligned}\tag{15}$$

利用定理 1 及定理 2 (或上述 Bellman 定理)即得

推论 2 假设 (i) $b(t)=O(1)$,$0\leqslant t<\infty$,或者 $\int_0^\infty|b(t)|dt<\infty$;(ii) 方程 (1) 属于 L.S.*. 则方程(2)属于 L.C.$\cap$L.S.* 的充要条件是方程(1)属于 L.C..

三、其 他 结 果

现介绍方程(1)属于 L.S.* 的一些简单判定.

定理 3 假设 (i) $a(t)\in c'[0,\infty)$,又设存在正数 m 使 $a(t)\geqslant m>0$,$0\leqslant t<\infty$;$|a'(t)|\geqslant 1$,$0\leqslant t<\infty$;(ii) 方程(1)属于 L.W.,此时 $W(t)=|a'(t)|$. 则方程(1)属于 L.S.$^*\cap$L.W..

证 只需证明方程(1)在区间$[0,\infty)$上的任一实解 $x(t)$ 满足于 $x(t)$,$x'(t)\in L^\infty[0,\infty)$,为此作函数

$$V(t)=a(t)x^2+[x']^2,\quad 0\leqslant t<\infty,\tag{16}$$

显见 $\frac{dV}{dt}=a'(t)x^2$,因此

$$V(t)=V(0)+\int_0^t a'(t)x^2(\tau)d\tau=O\left(1+\int_0^\infty|a'(t)|x^2(t)dt\right)=O(1),\tag{17}$$

故 $x(t)=O(1)$,$x'(t)=O(1)$,$0\leqslant t<\infty$.

定理 4 假设 (i) $a(t)\in C^1[0,\infty)$,$a'(t)\in L^p[0,\infty)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$;(ii) 方程 (1) 属于 L.C.$\cap$L.S. 则方程(1)属于 L.C.$\cap$L.S.*.

证 显然我们只须证明方程 (1) 在区间 $[0,\infty)$ 上任一实解 $x(t)$ 满足 $x'(t)\in L^\infty[0,\infty)$,已设 $a'(t)\in L^p[0,\infty)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,应有

$$\int_0^\infty|a'(t)|x^2(t)dt=\begin{cases}O\left(\int_0^\infty|a'(t)|dt\right)=O(1),& p=1,\\ O\left(\int_0^\infty x^2(t)dt\right)=O(1), & p=\infty,\end{cases}$$

如果$1 < p < \infty$，固 $q = \dfrac{p}{p-1} > 1$，由 Hölder 不等式即得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |a'(t)|x^2(t)dt &\leqslant \left[\int_0^\infty |a'(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty |x(t)|^{2q}dt\right]^{1/q}\\ &= \left[\int_0^\infty |a'(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty |x(t)|^{2q-2}|x(t)|^2dt\right]^{1/q}\\ &= O\left(\left[\int_0^\infty |a'(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty |x(t)|^q dt\right]^{1/q}\right) = O(1),\end{aligned} \tag{18}$$

再由上述(16)式，我们可知(17)式仍成立，故

$$x'(t) = O(1), \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

定理 5 假设 (i) $a(t) \in C^1[0, \infty)$，对某一 $W(t) \geqslant 1$，$0 \leqslant t < \infty$ 满足

$$\int_0^\infty \left|\frac{a'(t)}{\sqrt[q]{W(t)}}\right|^p dt < \infty,$$

此时 $q > 1$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$；(ii) 方程(1)属于 L.S.$\cap$L.W.，则方程(1)属于 L.S.*$\cap$L.W..

证 我们仍只需证明方程(1)在区间$[0,\infty)$上的任一实解 $x(t)$满足 $x'(t) \in L^\infty[0,\infty)$，由于

$$\int_0^\infty |a'(t)|x^2(t)dt = \int_0^\infty \frac{|a'(t)|}{\sqrt[q]{W(t)}}\sqrt[q]{W(t)}\,x^2(t)dt,$$

利用 Holder 不等式，并注意到 $|x(t)| = O(1)$，$0 \leqslant t < \infty$，当 $q > 1$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，应有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |a'(t)|x^2(t)dt &\leqslant \left[\int_0^\infty \left(\frac{|a'(t)|}{\sqrt[q]{W(t)}}\right)^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty W(t)x^{2q}dt\right]^{1/q}\\ &= \left[\int_0^\infty \left|\frac{a'(t)}{\sqrt[q]{W(t)}}\right|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty W(t)x^2(t)x^{2q-2}(t)dt\right]^{1/q}\\ &= O\left(\left[\int_0^\infty \left|\frac{a'(t)}{\sqrt[q]{W(t)}}\right|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty W(t)x^2(t)dt\right]^{1/q}\right) = O(1),\end{aligned}$$

再由上述(16)式，我们可证(17)式仍成立，故

$$x'(t) = O(1), \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

参 考 文 献

[1] Everitt, W. N., On the deficiency index problem for ordinary differential operators, *Differential Equations* (Proceedings from the Uppsala 1977 International Conference on Differentials Eq. Held at Uppsala 1977), Almqvist and Wiksell International, Stockholm, 1910—1976.

[2] Titchmarsh, E. C., Eigen-function expansion, *Associated with Second Order Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1948.

[3] R. 贝尔曼，微分方程的解的稳定性理论，科学出版社，1957，137.

[4] 欧阳亮，关于属于极限圆型的二阶微分方程，科学通报，28(1983)，9：517—522.