中国科学: 数学 2014 年 第 44 卷 第 2 期: 183～192
link.springer.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

关于 Q- 曲率流的几个注记

陈学长[①②], 马力[③], 徐兴旺[④]*

① 北京大学北京国际数学研究中心, 北京 100871;
② 南京大学数学系, 南京 210093;
③ 河南师范大学数学系, 新乡 453007;
④ Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore S119076, Singapore
E-mail: chenxuezhang@sina.com, nuslma@gmail.com, matxuxw@nus.edu.sg

收稿日期: 2012-05-03; 接受日期: 2013-12-11; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11201223 和 11271111)、中国博士后研究基金 (批准号: 2011M500175)、南京大学思源基金和 National University of Singapore research funds (批准号: R-146-000-169-112) 资助项目

摘要 标准球面上的预定纯量曲率问题已经得到很好的研究, 为此, 几种不同的方法发展起来了. 它的高维对应的问题即预定 Q- 曲率问题也吸引了众多人的注意. 负梯度流的方法在处理此类问题上似乎十分有效, 至少在曲率备选函数是正的情形下是如此的. 本文的目的在于指出, 对于指数非线性增长的预定 Q- 曲率问题, Q- 曲率备选函数的正性假设是不必要的.

关键词 Q- 曲率流 爆破分析 Morse 理论

MSC (2010) 主题分类 53C44, 35K55

1 引言

Riemann 流形上的许多预定曲率问题可叙述如下: 对于 Riemann 流形 (M^n, g) 上给定的光滑函数 f, 是否存在共形度量 $g_u = \mathrm{e}^{2u}g$ 使得 f 等于流形上的某特定的曲率函数? 一个典型的例子是单位球面 $(M^n, g) = (S^n, g_{S^n})$ 上的预定纯量曲率问题, 其中 g_{S^n} 是单位球面上的标准度量. 在刚过去的几十年间, 该问题引起了许多人的关注. 最近, 有几个不同的研究团队对某些特定流形上的预定 Q- 曲率问题非常感兴趣. 众所周知, 这些几何问题等价于求解某些偏微分方程. 当背景流形是标准球面时, 单位球面上的共形变换群的非紧性使得问题变得更加困难且富有挑战性. 关于上述这类问题的更多背景材料可参见文献 [1]. 单位球面 S^n 上的预定 Q- 曲率问题等价于求解下述的偏微分方程:

$$P_n u + (n-1)! = f\mathrm{e}^{nu} \quad 在\ S^n\ 上, \tag{1.1}$$

其中 $P_n = P_{g_{S^n}}$ 是 n 阶 Paneitz 算子. 由于方程 (1.1) 具有变分结构, 因此变分法很自然地成为研究此问题的一种工具. 在变分法研究此问题的过程中, 通过许多人的诸多努力, 若干种保证方程 (1.1) 解的存在性的不同的充分性条件被发现, 如文献 [1–3] 及其参考文献.

最近, Brendle [4] 引入了几何流的方法来研究预定 Q- 曲率问题. 相较于以前的方法, 这种新的方法处理此类问题似乎更富有效率. Chen 和 Xu [5] 采用了该方法来研究 S^n 上的预定 Q- 曲率的高阶偏微分方程. 然而, 预定 Q- 曲率函数 f 的正性在他们的证明中起着非常重要的作用. 我们注意到, 在 S^2

英文引用格式: Chen X Z, Ma L, Xu X W. Remarks on the Q-curvature flow (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 183–192, doi: 10.1360/012014-2

上的预定 Gauss 曲率问题中, Hong 和 Ma [6] 已经证明了该 Gauss 曲率备选函数的正性假设可以去掉. 借助一些 T^4 上的四阶偏微分方程的重要观察, 预定 Q- 曲率方程具有变号的曲率备选函数情形已经出现在文献 [7]. 本文的目的是指出, Q- 曲率备选函数的正性假设实际上并非必要. 在叙述本文主要结果之前, 我们首先给出函数的 "非退化" 的定义. 称一个 S^n 上的光滑函数 f 是非退化的, 若 f 满足

$$(\Delta_{S^n} f)^2 + |\nabla f|^2_{S^n} \neq 0 \quad \text{在 } S^n \text{ 上}.$$

本文的主要结果可叙述如下:

定理 1 设 $n \geqslant 4$ 是一个偶数. 设 $f: S^n \to \mathbb{R}$ 是一个变号的光滑函数且 $\int_{S^n} f(x) d\mu_{S^n} > 0$. 另外假设 f 在集合 $\{x \in S^n; f(x) > 0\}$ 中仅存在孤立的临界点且是非退化的. 令

$$\gamma_i = \sharp\{q \in S^n; f(q) > 0, \nabla_{S^n} f(q) = 0, \Delta_{S^n} f(q) < 0, \mathrm{ind}(f, q) = n - i\}, \tag{1.2}$$

其中 $\mathrm{ind}(f, q)$ 表示 f 在临界点 q 的 Morse 指标. 若方程组

$$\gamma_0 = 1 + k_0, \quad \gamma_i = k_{i-1} + k_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad k_n = 0, \tag{1.3}$$

不存在非负整数解 k_i, 则 Q- 曲率方程 (1.1) 至少存在一个解.

由于本文论证的大部分与我们已发表的论文 [5] 相同, 这里我们仅仅指出如何来克服因备选曲率函数 f 变号而产生的困难.

2 Q- 曲率流方程的一些基本估计

我们需要关注的第一件事情是约束因子 $\alpha(t)$ 的上下界估计. 在我们叙述该估计之前, 我们先提供一些相关的基本知识. 令 $n = 2m \geqslant 4$ 是一个整数, ω_n 为单位球面 S^n 的体积. 设 f 是 S^n 上的一个变号的光滑函数. 受 Brendle [4], Struwe [8] 和 Malchiodi-Struwe [9] 的启发, Chen 和 Xu [5] 引入了如下的共形几何流方程:

$$2u_t = \alpha f - Q, \tag{2.1}$$

其中 $Q = Q_g$ 是共形度量 $g(t) = \mathrm{e}^{2u(t)} g_{S^n}$ 的 Q- 曲率函数, 可通过如下的公式计算得到,

$$Q\mathrm{e}^{nu} = P_n u + (n-1)!. \tag{2.2}$$

令

$$C_f^\infty = \left\{ w \in C^\infty(S^n); g_w = \mathrm{e}^{2w} g_{S^n} \text{ 满足} \int_{S^n} d\mu_{g_w} = \omega_n, \int_{S^n} f d\mu_{g_w} > 0 \right\}.$$

现假设共形几何流方程 (2.1) 具有初值 $u(0) = u_0 \in C_f^\infty$.

回忆一下, 若 n 是偶数, P_n 可由下式给出,

$$P_n = \prod_{k=0}^{(n-2)/2} (-\Delta_{S^n} + k(n-k-1)).$$

注意到 P_n 具有零散度的算子, 因此, 通过 S^n 上的积分可得

$$⨍_{S^n} Q\mathrm{e}^{nu} d\mu_{S^n} = (n-1)!,$$

其中 $\fint_{S^n}$ 表示 S^n 上的积分平均. 关于流方程 (2.1) 的能量泛函可由下式给出,

$$E_f[u]=E[u]-(n-1)!\log\left(\fint_{S^n} f\mathrm{e}^{nu}d\mu_{S^n}\right),$$

其中

$$E[u]=\frac{n}{2}\fint_{S^n}(uP_nu+2(n-1)!u)d\mu_{S^n}.$$

我们特别指出, 该流方程 (2.1) 实际上是能量泛函 $E_f[u]$ 的负梯度流.

约束因子 $\alpha(t)$ 可由下式决定,

$$\alpha(t)=\frac{(n-1)!}{\fint_{S^n} f\mathrm{e}^{nu}d\mu_{S^n}}. \tag{2.3}$$

上述约束因子的选取目的在于随时间变化的几何流演化过程中, 共形流度量 $g(t)$ 的体积不随时间 t 而改变, 即 $\fint_{S^n}\mathrm{e}^{nu(t)}d\mu_{S^n}\equiv 1$, $t\geqslant 0$.

应用文献 [5, 引理 1.1], 能量泛函 $E_f[u(t)]$ 是关于时间 t 不增的, 具体地, 通过一个简单的计算, 我们有

$$\frac{d}{dt}E_f[u]=-\frac{n}{2}\fint_{S^n}(\alpha(t)f-Q)^2d\mu_g. \tag{2.4}$$

对于变号的曲率备选函数 f, 类似文献 [6], 我们首先需要得到如下的一个重要观察:

引理 1 若 $u_0\in C_f^\infty$, 则对每一时间 $t\geqslant 0$, 解 $u(t)=u(t,u_0)$ 仍属于 C_f^∞. 另外, 存在依赖于 f 以及初值 u_0 的两个正常数 C_1 和 C_2 , 使得 $0<C_1\leqslant\alpha(t)\leqslant C_2$, $t\geqslant 0$.

证明 由 $\alpha(t)$ 的选取, 我们首先需要验证的是若 $u_0\in C_f^\infty$, 则 $\int_{S^n} f\mathrm{e}^{nu(t)}d\mu_{S^n}>0$ $(t>0)$ 成立. 事实上, 借助于 (2.4) 和 Beckner 不等式 (可参见文献 [10] 和 [5, 命题 1.1]), 我们有

$$-(n-1)!\log\left(\max_{S^n}f\right)\leqslant-(n-1)!\log\fint_{S^n}f\mathrm{e}^{nu}d\mu_{S^n}\leqslant E_f[u](t)\leqslant E_f[u_0]<\infty.$$

因此,

$$\max_{S^n}f\geqslant\fint_{S^n}f\mathrm{e}^{nu(t)}d\mu_{S^n}\geqslant\mathrm{e}^{\frac{-E_f[u_0]}{(n-1)!}}>0,$$

$$0\leqslant E[u]=E_f[u]+(n-1)!\log\left(\fint_{S^n}f\mathrm{e}^{nu}d\mu_{S^n}\right)\leqslant E_f[u_0]+(n-1)!\log\left(\max_{S^n}f\right)<\infty.$$

进而, 人们容易得到

$$\frac{(n-1)!}{\max_{S^n}f}\leqslant\alpha(t)\leqslant(n-1)!\mathrm{e}^{\frac{E_f[u_0]}{(n-1)!}}. \tag{2.5}$$

显然, 引理 1 可由在方程 (2.5) 中取 $C_1=\frac{(n-1)!}{\max_{S^n}f}$ 和 $C_2=(n-1)!\mathrm{e}^{E_f(u_0)/(n-1)!}$ 而得到. □

借助于上述引理, 文献 [5] 中的积分估计可以不加修改地直接得到.

3 爆破分析

与文献 [5] 中一样, 我们需要研究沿着流时解的紧性以及集中现象. 为实现之, 我们采用标准的策略来研究正则化流 $v(t)$. 众所周知, 由文献 [11, 引理 5.4] 和 [12, 命题 6] 可知, 对任意族光滑函数 $u(t)$, 存在一组光滑地依赖于时间 t 的共形变换 $\phi(t):S^n\to S^n$, 使得

$$\fint_{S^n}xd\mu_h=0,\quad t>0, \tag{3.1}$$

以及正则化的度量

$$h=\phi^*(\mathrm{e}^{2u}g_{S^n})\equiv \mathrm{e}^{2v(t)}g_{S^n}. \tag{3.2}$$

利用 $E_f[u(t)]$ 的关于时间 t 不增的性质 (2.4) 和 Beckner 最优不等式 (参见文献 [1, 定理 2.6] 和 [2]), 具有初值 $u_0\in C_f^\infty$ 的几何流 (2.1) 的全局存在性是文献 [5, 第 2.1 节] 中的直接结论.

我们采用形如文献 [8, 引理 3.4] 和 [5, 引理 2.4] 证明过程中的相同策略来得到共形流度量的 Q-曲率的渐近行为, 即当 $t\to\infty$ 时,

$$\int_{S^n}|\alpha f-Q|^2d\mu_g\to 0. \tag{3.3}$$

于是, 上述相对粗的收敛 (3.3) 使得我们能够对一族流函数 $u_k=u(t_k)$ 应用文献 [4, 命题 1.4]. 我们将之叙述如下:

引理 2 令 $u_k=u(t_k),g_k=\mathrm{e}^{2u_k}g_{S^n}$. 则下述两种情形必出现其一:

(i) 序列 u_k 在 $H^n(S^n,g_{S^n})\hookrightarrow L^\infty(S^n)$ 中一致有界;

(ii) 存在一族函数序列 u_k 及有限多个点 $q_1,\dots,q_L\in S^n$ 使得对任意 $r>0$, $l\in\{1,\dots,L\}$, 成立

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{B_r(q_l)}|Q_k|d\mu_k\geqslant\frac{1}{2}(n-1)!\omega_n, \tag{3.4}$$

其中 $d\mu_k=d\mu_{g_k}$ 和 $Q_k=Q_{g_k}$ 是度量 g_k 的 Q- 曲率; 另外, 函数序列 u_k 在 $(S^n\setminus\{q_1,\dots,q_L\},g_{S^n})$ 中的任意紧集内一致有界或在远离 $q_1,\dots,q_L$ 处, 当 $k\to\infty$ 时具有局部一致的收敛 $u_k\to-\infty$.

正如以前的一些工作所展示, 在后面的分析中一个比上述引理 2 更加深刻的版本是非常需要的.

引理 3 设 u_k 是引理 2 中的一族 S^n 上的光滑函数序列. 此外, 存在 S^n 上的某变号光滑函数 Q_∞, 满足当 $k\to\infty$ 时, $\|Q_k-Q_\infty\|_{L^2(S^n,g_k)}\to 0$. 令 $h_k=\phi_k^*(g_k)=\mathrm{e}^{2v_k}g_{S^n}$ 为在 (3.1) 和 (3.2) 中给出的正则化度量序列. 则相差一个子序列, 或者下述两种情形之一:

(i) 当 $k\to\infty$ 时 $u_k\to u_\infty$ 于 $H^n(S^n,g_{S^n})$, 其中 $g_\infty=\mathrm{e}^{2u_\infty}g_{S^n}$ 具有 Q- 曲率 Q_∞,

(ii) 存在 $p\in S^n$, 使得当 $k\to\infty$ 时,

$$Q_\infty(p)=(n-1)!,\quad d\mu_k\hookrightarrow\omega_n\delta_p \tag{3.5}$$

在测度弱意义下收敛, 和 $v_k\to 0$ 于 $H^n(S^n,g_{S^n}),Q_{h_k}\to(n-1)!$ 于 $L^2(S^n,g_{S^n})$. 在后一情形, ϕ_k 在 $H^{n/2}(S^n,g_{S^n})$ 中弱收敛于常值映射 p.

证明 下面证明将要采用的策略与文献 [5,9] 相同. 当 (3.4) 意义下的集中现象发生时, 我们需要克服因 f 变号而产生的一些困难. 对任意 k, 选取 $p_k\in S^n$ 和 $r_k>0$ 使得

$$\sup_{p\in S^n}\int_{B_{r_k}(p)}|Q_k|d\mu_k=\int_{B_{r_k}(p_k)}|Q_k|d\mu_k=\frac{1}{4}(n-1)!\omega_n. \tag{3.6}$$

则由 (3.4), 当 $k\to\infty$ 时 $r_k\to 0$. 同时我们可假设当 $k\to\infty$ 时 $p_k\to p$. 为简单计, 可视 p 为 N, 单位球面 S^n 中的北极点.

记 $\hat{\phi}_k$: $S^n\to S^n$ 为从上半球面 $S_+^n\equiv S^n\cap\{x^{n+1}>0\}$ 到 $B_{r_k}(p_k)$ 的共形微分同胚映射并将 ∂S_+^n 中的赤道映到 $\partial B_{r_k}(p_k)$. 事实上, 相差一个旋转, $\hat{\phi}_k$ 能够显式表示为 $\psi^{-p_k}\circ\delta_{r_k}\circ\pi^{-p_k}$, 其中 π^{-p_k} : $S^n\to\mathbb{R}^n$ 表示从 $-p_k$ 出发的球极投影, 并记其逆为 $\psi^{-p_k}=(\pi^{-p_k})^{-1}$, 其中 δ_{r_k} 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的伸缩变换且 $\delta_{r_k}(y)=\delta_{r_k}y$. 特别地, 令 $\psi=\psi^S$. 考虑由下式定义的函数序列 $\hat{u}_k: S^n\to\mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{2\hat{u}_k}g_{S^n}=\hat{\phi}_k{}^*(g_k)$$

满足

$$P_n\hat{u}_k+(n-1)!=\hat{Q}_k\mathrm{e}^{n\hat{u}_k}\quad 在\ S^n\ 上,$$

其中 $\hat{Q}_k=Q_k\circ\hat{\phi}_k$. 由 r_k,p_k 的选取及 (3.6), 应用引理 2 于 $\hat{u}_k$, 我们可得 $\hat{u}_k\to\hat{u}_\infty$ 于 $H^n_{\mathrm{loc}}(S^n\backslash\{S\},g_{S^n})$ 当 $k\to\infty$ 时, 其中 S 是 S^n 中的南极点. 同时, 当 $k\to\infty$ 时 $\hat{Q}_k\to Q_\infty(p)$ 几乎处处成立. 通过

$$\mathrm{e}^{2\tilde{u}_k}g_{\mathbb{R}^n}=(\psi^{-p_k})^*(\mathrm{e}^{2\hat{u}_k}g_{S^n})=\tilde{\psi}_k^*(g_k),$$

引入函数序列 $\tilde{u}_k:S^n\to\mathbb{R}$, 其中 $\tilde{\psi}_k=\psi^{-p_k}\circ\delta_{r_k}$, 即

$$\tilde{u}_k=u_k\circ\tilde{\psi}_k+\frac{1}{n}\log(\det d\tilde{\psi}_k),$$

我们有 $\tilde{u}_k$ 于 $H^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 收敛于某函数 $\tilde{u}_\infty$, 满足

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{n/2}\tilde{u}_\infty=Q_\infty(p)\mathrm{e}^{n\tilde{u}_\infty}\quad 在\ \mathbb{R}^n\ 上. \tag{3.7}$$

另外, 由 Fatou 引理, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{n\tilde{u}_\infty}dz\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{n\tilde{u}_k}dz=\omega_n. \tag{3.8}$$

基于文献 [5, 引理 3.2] 的证明, 我们需要建立一个辅助引理来完成引理 3 的证明.

引理 4 同引理 3 关于 u_k 的假设, 则有 $Q_\infty(p)>0$ 及方程 (3.7) 和 (3.8) 的解 $\tilde{u}_\infty$ 具有如下形式:

$$\tilde{u}_\infty(z)=\log\frac{2\lambda}{1+|\lambda(z-z_0)|^2}-\frac{1}{n}\log\frac{Q_\infty(p)}{(n-1)!},\quad \lambda>0,\quad z_0\in\mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

证明 为简单计, 使用 u_∞ 替代 $\tilde{u}_\infty$. 令

$$\bar{w}(\rho)=⨍_{\partial B_\rho(0)}w(z)d\sigma(z),\quad \rho>0$$

表示 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 w 的球面平均函数. 借助于文献 [5, 引理 3.3], 我们只需要排除 $Q_\infty(p)\leqslant 0$ 的情形. 利用反证法, 设 $Q_\infty(p)\leqslant 0$. 下面的证明严重依赖于文献 [5, 引理 3.3] 中通过对 $n-2$ 阶微分算子的 Green 函数的分析而得到如下的重要估计. 为方便计, 我们将之重新叙述: 对任意 $r>0$, $q\in S^n$, 有

$$\left|\int_{B_r(q)}\Delta_{S^n}u_k d\mu_{S^n}\right|\leqslant B_0r^{n-2} \tag{3.10}$$

对所有的 k 成立, 其中 $B_0>0$ 是常数.

令 $m=n/2\geqslant 2$, $w_i(z)=(-\Delta)^iu_\infty(z), i=1,2,\dots,m$. 则我们断言对于 $1\leqslant i\leqslant m-1$, 有

$$w_{m-i}\leqslant 0\quad 在\ \mathbb{R}^n\ 上. \tag{3.11}$$

对于 w_{m-1}, 利用反证法, 假设存在 $z_0\in\mathbb{R}^n$, 使得 $w_{m-1}(z_0)>0$. 不失一般性, 令 $z_0=0$. 由 (3.7) 和 Jensen 不等式, 我们有

$$\begin{cases}-\Delta\bar{u}_\infty=\bar{w}_1,\\ -\Delta\bar{w}_1=\bar{w}_2,\\ \quad\vdots\\ -\Delta\bar{w}_{m-1}=\bar{w}_m\leqslant Q_\infty(p)\mathrm{e}^{n\bar{u}_\infty}\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.12}$$

因此, $\bar{w}'_{m-1}(\rho) \geqslant 0$, 这意味着 $\bar{w}_{m-1}(\rho) \geqslant \bar{w}_{m-1}(0) = w_{m-1}(0) > 0$. 注意到

$$\bar{w}'_{m-2}(\rho) = \frac{-\rho}{n}\left[|B_\rho(0)|^{-1}\int_{B_\rho(0)} w_{m-1}(z)dz\right] \leqslant \frac{(-w_{m-1}(0))}{n}\rho < 0.$$

因此, 可得到

$$-\bar{w}_{m-2}(\rho) \geqslant B_2\rho^2, \quad \rho \geqslant \rho_1 > 0, \quad B_2 > 0.$$

由 (3.12) 和数学归纳法, 一般地, 对于 $2 \leqslant i \leqslant m-1$, 我们有

$$(-1)^{i-1}\bar{w}_{m-i}(\rho) \geqslant B_i\rho^{2(i-1)}, \quad \rho \geqslant \rho_{i-1} > 0, \quad B_i > 0.$$

将此应用于 $i = m-1$ 可得

$$(-1)^{m-2}\int_{\partial B_\rho(0)}(-\Delta u_\infty(z))d\sigma(z) \geqslant B_{m-1}\rho^{2(m-2)+n-1}, \quad \rho \geqslant \rho_{m-1}. \tag{3.13}$$

对于充分大的 k 及所有的 $\rho \geqslant \rho_{m-1}$, 我们有

$$(-1)^{m-2}\int_{\partial B_\rho(0)}(-\Delta\tilde{u}_k(z))dz \geqslant A_1\rho^{2(m-2)+n-1}, \tag{3.14}$$

其中 $A_1 > 0$ 是一个常数. 利用文献 [5, 第 951–953 页] 中的一个类似证明, 借助于 (3.14) 和表达式

$$\tilde{u}_k(z) = u_k \circ \tilde{\psi}_k + \log\frac{2r_k}{1+|r_kz|^2},$$

人们可得到对某一 $L > 0$ 及任意的 $d > L$, 有

$$(-1)^{m-2}\int_{B_{dr_k}(p_k)}(-\Delta_{S^n}u_k)d\mu_{S^n} \geqslant A_2r_k^{n-2}(d^{2(m-2)+n} - L^{2(m-2)+n} - L^{n-2}) \tag{3.15}$$

对所有充分大的 k 成立, 其中 $A_2 > 0$ 是一个常数.

另一方面, 在 (3.10) 中选取 $r = r_kd$, $q = p_k$, 存在一个一致的常数 $A_3 > 0$ 使得

$$(-1)^{m-2}\int_{B_{dr_k}(p_k)}(-\Delta_{S^n}u_k)d\mu_{S^n} \leqslant A_3r_k^{n-2}d^{n-2}. \tag{3.16}$$

因此, 对于上述任意固定的 $L > 0$ 及充分大的 k, 通过选取充分大的 d, 由 (3.15) 和 (3.16) 可以得到一个矛盾.

接着, 我们利用数学归纳法来证明 (3.11). 情形 $i = 1$ 已经在上面处理了. 若 $m = 2$, 我们的数学归纳法程序结束. 因此我们假设 $m > 2$. 假设存在某 i, $1 \leqslant i \leqslant m-2$ 及对所有的 $1 \leqslant k \leqslant i$, $w_{m-k} \leqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立. 则我们需要证明 $w_{m-i-1} \leqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立. 再次利用反证法, 我们假设 $w_{m-i-1}(0) > 0$. 由于 $\bar{w}'_{m-i-1}(\rho) = \frac{-1}{|\partial B_\rho(0)|}\int_{B_\rho(0)} w_{m-i}(z)dz \geqslant 0$, 由此可得

$$\bar{w}_{m-i-1}(\rho) \geqslant \bar{w}_{m-i-1}(0) = w_{m-i-1}(0) > 0.$$

若 $i \leqslant m-3$, 利用 $-\Delta\bar{w}_{m-i-2} = \bar{w}_{m-i-1}$, 可得

$$-\bar{w}_{m-i-2}(\rho) \geqslant B_2\rho^2, \quad \rho \geqslant \rho_1 > 0, \quad B_2 > 0.$$

一般地, 利用 (3.12), 我们有

$$(-1)^{j+1}\bar{w}_{m-i-j}(\rho) \geqslant B_j \rho^{2(j-1)}, \quad \rho \geqslant \rho_{j-1} > 0, \quad B_j > 0, \quad i+j \leqslant m-1.$$

选取 $j = m-1-i$, 我们有

$$(-1)^{m-i}\int_{\partial B_\rho(0)} (-\Delta u_\infty(z))d\sigma(z) \geqslant B_{m-1-i}\rho^{2(m-i-2)+n-1}, \quad \rho \geqslant \rho_{m-2-i}. \tag{3.17}$$

固定 $L \geqslant \rho_{m-2-i}$ 及对所有的 $d > L$, 基于 (3.15) 的一个类似的证明, 存在一个常数 $A_5 > 0$, 使得

$$(-1)^{m-i}\int_{B_{dr_k}(p_k)} (-\Delta_{S^n} u_k)d\mu_{S^n} \geqslant A_5 r_k^{n-2}(d^{2(m-i-2)+n} - L^{2(m-i-2)+n} - L^{n-2}) \tag{3.18}$$

对所有充分大的 k 成立. 另一方面, 在 (3.10) 中选取 $r = r_k d$ 和 $q = p_k$, 存在另外一个常数 $A_6 > 0$ 使得

$$(-1)^{m-i}\int_{B_{dr_k}(p_k)} (-\Delta_{S^n} u_k)d\mu_{S^n} \leqslant A_6 r_k^{n-2}d^{n-2}. \tag{3.19}$$

因此, 若选取 d 充分大, 不等式 (3.18) 和 (3.19) 会产生一个矛盾.

若 $i = m-2$, 利用归纳假设, 有 $w_2(z) \leqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立及 $w_1(0) > 0$. 由于 $\bar{w}_1'(\rho) \geqslant 0$,

$$\bar{w}_1(\rho) \geqslant \bar{w}_1(0) = w_1(0) > 0.$$

任意给定 $d > 0$, 由上述不等式, 容易得到

$$\int_{\partial B_\rho(0)} (-\Delta u_\infty)dz \geqslant 2A_7\rho^{n-1}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant d,$$

其中 $A_7 > 0$ 仅依赖于 $w_1(0)$ 和 n. 重复得到 (3.15) 的证明且将之拉回至 S^n, 我们有

$$\int_{B_{dr_k}(p_k)} (-\Delta_{S^n} u_k)d\mu_{S^n} \geqslant A_7 r_k^{n-2}d^n, \tag{3.20}$$

对所有充分大的 k 成立. 现在, 在方程 (3.10) 中令 $r = r_k d$ 和 $q = p_k$ 可得

$$\int_{B_{dr_k}(p_k)} (-\Delta_{S^n} u_k)d\mu_{S^n} \leqslant A_8 r_k^{n-2}d^{n-2}, \tag{3.21}$$

其中 $A_8 > 0$ 是一个常数. 通过选取充分大的 $d > 0$, 不等式 (3.20) 与 (3.21) 会产生一个矛盾.

所以, 我们得到结论 $w_{m-i-1} \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立, 从而数学归纳法结束.

最后, 由不等式 (3.11) 可得 $-\Delta u_\infty = w_1 \leqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立, 即 u_∞ 是一个下调和函数. 利用下调和函数的平均值性质, 对所有的 $z \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$, 有

$$nu_\infty(z) \leqslant |B_r(0)|^{-1}\int_{B_r(z)} nu_\infty(y)dy.$$

由上述不等式和 Jensen 不等式, 我们有

$$\mathrm{e}^{nu_\infty(z)} \leqslant |B_r(0)|^{-1}\int_{B_r(z)} \mathrm{e}^{nu_\infty(y)}dy \leqslant |B_r(0)|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{nu_\infty(y)}dy \tag{3.22}$$

对任意的 $r>0$ 成立. 留意到 (3.8), 令 $r\to\infty$, 不等式 (3.22) 意味着 $u_\infty\equiv-\infty$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立, 而这显然是不可能的. 故而我们的证明结束. □

引理 3 的证明 借助于引理 4, 我们归结于证明度量序列 $\{g_k\}$ 只存在唯一的集中点 p 使得 $Q_\infty(p)=(n-1)!$. 为此, 首先令 $Q_\infty^+=\max\{Q_\infty,0\}, Q_\infty^-=\min\{Q_\infty,0\}$. 注意到由引理 2, $\{g_k\}$ 只存在有限个爆破点, 如 $p_1,p_2,\dots,p_l$. 由前述的两个引理, 我们可知在每点 p_i, $Q_\infty(p_i)>0$. 现在对每个 i, 选取足够小的 $r_i>0$ 使得 $Q_\infty\geqslant0$ 于 $B_{r_i}(p_i)$ 及 $B_{r_i}(p_i)\cap B_{r_j}(p_j)=\emptyset$ 若 $i\neq j$. 于是沿着文献 [5, 第 957 页] (或类似可参见文献 [9]) 相同的证明思路可得到结论

$$(n-1)!l\omega_n=\sum_{i=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^n}Q_\infty(p_i)\mathrm{e}^{n\tilde{u}_\infty}dz\leqslant\sum_{i=1}^{l}\int_{B_{r_i}(p_i)}Q_\infty^+d\mu_k+o(1), \tag{3.23}$$

对所有充分大的 k 成立, 其中 $o(1)\to0$ 当 $k\to\infty$ 时. 因此, 有 $\lim_{k\to\infty}\int_{S^n}Q_\infty^-d\mu_k=\sum_{i=1}^{l}Q_\infty^-(p_i)\omega_n=0$, 这是由于集中现象只发生在点 p_i, 其中 $Q_\infty(p_i)>0, 1\leqslant i\leqslant l$. 由上述等式和 r_i 的选取, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l}\int_{B_{r_i}(p_i)}Q_\infty^+d\mu_k&=\sum_{i=1}^{l}\int_{B_{r_i}(p_i)}Q_\infty d\mu_k=\sum_{i=1}^{l}\left[\int_{B_{r_i}(p_i)}Q_kd\mu_k+\int_{B_{r_i}(p_i)}(Q_\infty-Q_k)d\mu_k\right]\\&\leqslant\int_{S^n}Q_kd\mu_k+2\int_{S^n}|Q_\infty-Q_k|d\mu_k+\int_{S^n\setminus\bigcup_{i=1}^{l}B_{r_i}(p_i)}|Q_\infty|d\mu_k\\&=(n-1)!\omega_n+o(1),\end{aligned}\tag{3.24}$$

对所有充分大的 k 成立且这里在上述最后一项中使用了局部体积集中的性质和 Q_∞ 的一致的界. 因此, 从 (3.23) 和 (3.24) 可断言 $l=1$ 和 $Q_\infty(p)=(n-1)!$. 最后, 引理 3 剩余部分的证明可通过文献 [5, 引理 3.2] 中相同的论证方法来完成. □

注 1 我们在此应该特别指出, 在完成引理 3 的证明过程中, 人们不能直接应用文献 [13, 定理 9] 中来得到该引理的证明. 文献 [13] 中所用的假设: $Q_k\to Q_\infty$ 于 $C^0(S^n)$ 比引理 3 中的假设强得多. 文献 [13] 中类似的爆破分析也出现在文献 [14]. 然而, 那些估计似乎对于 Q- 曲率流情形并不适用, 这是由于在几何流的情形下得到 C^0- 收敛性是极其困难甚至无法实现的. 所以我们不得不采用上述合理的程序来完成几何流情形下的爆破分析部分的证明.

定理 1 剩余部分的证明将通过反证法来完成. 从现在开始, 我们假设 f 不能作为 g_{S^n} 共形度量类中任意度量的 Q- 曲率. 沿着文献 [5, 第 4 和 5 节] 中的相同的证明思路, 与引理 3 一起, 人们最终会得到几何流 $u(t)$ 和所谓 "暗流": $\Theta=\Theta(t)=\fint_{S^n}\phi(t)d\mu_{S^n}$ 的渐近行为.

引理 5 设 $u(0)=u_0\in C_f^\infty$ 是几何流方程 (2.1) 和 (2.2) 的初值. 则共形流度量 $g(t)$ 会集中在 f 的一个临界点 p 上且 $f(p)>0$, $\Delta_{S^n}f(p)\leqslant0$, 同时能量 $E_f[u(t)]$ 收敛于 $-(n-1)!\log f(p)$, 即当 $t\to\infty$ 时,

$$E_f[u(t)]\to-(n-1)!\log f(p).$$

另外, 集中点 p 也是几何流 $u(t)$ 对应的 "暗流 $\Theta(t)$" 的唯一极限, 换言之, $p=\lim_{t\to\infty}\Theta(t)$.

4 主要定理的证明

本节将简要介绍本文主要结果的证明. 对于 $q\in S^n, 0<\epsilon<\infty$, 记 $\phi_{-q,\epsilon}=\psi^{-q}\circ\delta_\epsilon\circ\pi^{-q}$ 表示以 $-q$ 为无穷远点的球极映射, 即在球极坐标下 q 成为北极点. 容易验证 $\phi_{-q,\epsilon}$ 在 $H^{n/2}(S^n,g_{S^n})$ 中弱收敛

于 q, 当 $\epsilon\to 0$ 时. 定义映射

$$j:S^n\times(0,\infty)\ni(q,\epsilon)\mapsto u_{q,\epsilon}=\frac{1}{n}\log\det(d\phi_{q,\epsilon})\in C_*^\infty.$$

并令 $g_{q,\epsilon}=\phi_{q,\epsilon}^*(g_{S^n})=\mathrm{e}^{2u_{q,\epsilon}}g_{S^n}$. 则我们有 $d\mu_{g_{q,\epsilon}}=\mathrm{e}^{nu_{q,\epsilon}}d\mu_{S^n}\rightharpoonup\omega_n\delta_q$, 在测度弱收敛意义下, 当 $\epsilon\to 0$ 时. 对于 $\gamma\in\mathbb{R}$, 记 $L_\gamma=\{u\in C_f^\infty;E_f[u]\leqslant\gamma\}$, 为 E_f 的下水平集. 在我们关于 f 的假设下, 将取正值的 f 的所有临界点排列成 $0<f(q_i)\leqslant f(q_j)$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant N$, 并令

$$\beta_i=-(n-1)!\log f(q_i)=\lim_{\epsilon\to 0}E_f[u_{q_i,\epsilon}],\quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

不失一般性, 假设所有的临界点 $f(q_i),1\leqslant i\leqslant N$ 都是离散的, 故而存在一个 $\nu_0>0$ 使得 $\beta_i-2\nu_0>\beta_{i+1}$, 实际上我们可选取 $\nu_0=\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant N-1}\{\beta_i-\beta_{i+1}\}>0$.

尤为重要的是, 我们将刻画清楚 E_f 所有下水平集的同伦类型. 我们将它叙述为一个命题, 类似的命题可参见文献 [5,9].

命题 1　(i) 若 $\delta_0>\max\{-(n-1)!\log(\fint_{S^n}f(x)d\mu_{S^n}),\beta_1\}$, 集合 L_{δ_0} 是可收缩的;

(ii) 对于任意 $0<\nu\leqslant\nu_0$, $1\leqslant i\leqslant N$, 集合 $L_{\beta_i-\nu}$ 与 $L_{\beta_{i+1}+\nu}$ 是同伦等价的;

(iii) 对于 f 的每个临界点 q_i, 其中 $\Delta_{S^n}f(q_i)>0$, $f(q_i)>0$, 集合 $L_{\beta_i+\nu_0}$ 与 $L_{\beta_i-\nu_0}$ 是同伦等价的;

(iv) 对于每一临界点 q_i 其中 $\Delta_{S^n}f(q_i)<0$, $f(q_i)>0$, 集合 $L_{\beta_i+\nu_0}$ 同伦等价于集合 $L_{\beta_i-\nu_0}$ 及粘附其上的 $(n-\mathrm{ind}(f,p_i))$- 维胞腔.

证明　(i) 令 δ_0 如上选取. 对 $0\leqslant s\leqslant 1$, $u_0\in C_f^\infty$, 定义 $H_1(s,u_0)=\frac{1}{n}\log((1-s)\mathrm{e}^{nu_0}+s)$, 即 $\mathrm{e}^{nH_1(s,u_0)}=(1-s)\mathrm{e}^{nu_0}+s$, 则容易得到

$$\fint_{S^n}\mathrm{e}^{nH_1(s,u_0)}d\mu_{S^n}=1,\quad\int_{S^n}f\mathrm{e}^{nH_1(s,u_0)}d\mu_{S^n}=(1-s)\int_{S^n}f\mathrm{e}^{nu_0}d\mu_{S^n}+s\int_{S^n}fd\mu_{S^n}>0,$$

上述不等号是基于 $\int_{S^n}f(x)d\mu_{S^n}>0$ 的假设, $H_1(s,u_0)$ 提供了从集合 C_f^∞ 到自身的同伦变换. 对于上述给定的 u_0, $0\leqslant s\leqslant 1$, 由引理 5 和 δ_0 的选取, 存在一个最小时间 $T=T(s,u_0)$, 使得 $E_f[u(T,H_1(s,u_0))]\leqslant\delta_0$, 其中 $T(s,u_0)$ 关于 s 和 u_0 的连续性可由 (2.4) 和 $H_1(s,u_0)$ 的表达式得到. 因此映射 $H:(s,u_0)\mapsto u(T(s,u_0),H_1(s,u_0))$ 即为从 L_{δ_0} 到自身的所求压缩映射. 为证明这一点, 首先, 由引理 1, 易知 $H(s,u_0)\in C_f^\infty$; 接着注意到 $T(0,u_0)=0$, 因此, $u(T(0,u_0),H(0,u_0))=u(0,u_0)=u_0$, $u(T(1,u_0),H(1,u_0))=0$, 这是由于 $H(1,u_0)=0$ 且

$$E_f[0]=-(n-1)!\log\left(\fint_{S^n}f(x)d\mu_{S^n}\right)<\delta_0,\quad T(1,u_0)=0.$$

(ii)–(iv) 的证明完全与文献 [5, 命题 6.1(ii)–(iv)] 相同. □

我们现在可以来完成主要定理的证明.

定理 1 的证明　利用反证法, 假设对 C_f^∞ 中任意初值 Q- 曲率流都是发散的, g_{S^n} 的共形度量类中的任意度量都不以 f 作为该度量的 Q- 曲率. 命题 1 表明存在一个合适的 δ_0, L_{δ_0} 是可收缩的且同伦等价于集合 E_∞, 该集合的同伦类型包含点集 $\{p\}$ 及对于 f 的临界点 q 上粘附的 $(n-\mathrm{ind}(f,q))$ 维胞腔, 其中在临界点 q 上满足 $\Delta_{S^n}f(q)<0$, $f(q)>0$. 将文献 [15, 定理 4.3] 应用于 L_{δ_0}, 我们可以得到, 对于 L_{δ_0} 及 E_∞ 的 Morse 多项式, 等式

$$\sum_{j=0}^n s^j\gamma_j=1+(1+s)\sum_{j=0}^n s^jk_j\tag{4.1}$$

成立, 其中 $k_j \geqslant 0$ 是整数, γ_j 是定义在 (1.2) 中的常数. 所以, 该结果与我们的假设 (方程组 (1.3) 没有非负整数解 k_j) 矛盾, 该矛盾的得到也就完成本定理的证明. □

致谢 第一作者感谢 Department of Mathematics, National University of Singapore 在他学术访问期间给予的便利以及资助, 同时对 Michael Struwe 教授在本文写作过程中通过 email 给予他富有启发性的建议以及让他关注文献 [13] 表示诚挚的谢意.

后注 最近我们注意到, 在本文的审稿过程中, 类似的观察也由文献 [16] 得到.

参考文献

1 Wei J, Xu X. On conformal deformations of metrics on S^n. J Funct Anal, 1998, 157: 292–325
2 Chang S-Y A, Yang P C. Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds. Ann Math (2), 1995, 142: 171–212
3 Wei J, Xu X. Classification of solutions of higher order conformally invariant equation. Math Ann, 1999, 313: 207–228
4 Brendle S. Global existence and convergence for a higher order flow in conformal geometry. Ann Math (2), 2003, 158: 323–343
5 Chen X, Xu X. Q-curvature flow on the standard sphere of even dimension. J Funct Anal, 2011, 261: 934–980
6 Ma L, Hong M. Curvature flow to the Nirenberg problem. Arch Math (Basel), 2010, 94: 277–289
7 Ge Y, Xu X. Prescribed Q-curvature problem on closed 4-Riemannian manifolds in the null case. Calc Var Partial Differential Equations, 2008, 31: 549–555
8 Struwe M. A flow approach to Nirenberg problem. Duke Math J, 2005, 128: 19–64
9 Malchiodi A, Struwe M. Q-curvature flow on S^4. J Differential Geom, 2006, 73: 1–44
10 Beckner W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. Ann Math (2), 1993, 138: 213–242
11 Li Y Y. Prescribing scalar curvature on S^n and related problems I. J Differential Equations, 1995, 120: 319–410
12 Brendle S. Convergence of the Q-curvature flow on S^4. Adv Math, 2006, 205: 1–32
13 Martinazzi L. Concentration-compactness phenomena in the higher order Liouville's equation. J Funct Anal, 2009, 256: 3743–3771
14 Malchiodi A. Compactness of solutions to some geometric fourth-order equations. J Reine Angew Math, 2006, 549: 137–174
15 Chang K C. Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems. Birkhäuser, 1993
16 Ho P T. Results of prescribing Q-curvature on S^n. Arch Math (Basel), 2013, 100: 85–93

Remarks on the Q-curvature flow

CHEN XueZhang, MA Li & XU XingWang

Abstract The prescribing scalar curvature problem on the standard sphere has been well studied and several methods have been developed for this purpose. Its higher order analogy problem, namely the prescribing Q-curvature problem has also attracted a lot of attention. The negative gradient flow method seems very well suitable to those type of problem, at least for the case where the prescribing curvature candidate is positive. The main aim of the current note is to point out that in the prescribing Q-curvature problem with exponential non-linearity, the positivity of the curvature candidate is not necessary.

Keywords Q**-curvature flow, blow-up analysis, morse theory**

MSC(2010) **53C44, 35K55**

doi: 10.1360/012014-2