

# 风生大洋环流的一种改进正压模式

张庆华 曲媛媛 李坚克

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266003)

**摘要** 通过考查北太平洋实测环流图像, 修正 Sverdrup 平衡关系, 保留经向水平摩擦, 适当选取南北水边界上的约束条件, 利用摄动方法求解作为四阶偏微分方程的位涡度方程, 得到了与观测结果基本一致的北太平洋环流图像, 再现了北赤道流、黑潮、亲潮、黑潮延伸体直至作为东边界流的加利福尼亚寒流和阿拉斯加暖流的环流系统.

**关键词** 黑潮延伸体 东边界流 Sverdrup 平衡

北太平洋的加利福尼亚寒流和阿拉斯加暖流, 北大西洋的加那利寒流和北大西洋暖流, 南太平洋的秘鲁寒流和南大西洋的本格拉寒流均是存在于大洋东部的集中流. 与大洋西边界流相比, 虽然东边界流流速低, 但其流幅宽和经向运动的性质决定了它们对沿岸地区气候的重要调节作用, 因而引起了人们的高度重视.

经典风生大洋环流理论虽然成功地解释了大洋环流西向强化特征, 但没能给出完整的大洋环流图像, 没能证实大洋东边界流的存在<sup>[1,2]</sup>. 已有的关于大洋东边界流生成机制的理论工作主要是针对特定流系, 从特定地形、水文环境、特定风场, 总之从局地因素中寻找成因. 我们不排除局地因素的作用, 但大洋东边界流普遍存在的事实说明, 它的生成机制是与大洋环流总的平衡关系不可分的. 然而正如 Gill<sup>[3]</sup>所指出的, 还没有一个关于大洋东边界流的完整理论. 从 1982 年至今, 关于大洋东边界流生成机制的理论工作仍无明显进展<sup>[4~13]</sup>. 因而改进大洋环流理论模式, 以期得到更符合观测结果的环流图像就是本文的主要目的.

Munk 的风生大洋环流理论是经典线性理论中最完整、最具代表性的工作<sup>[1,2]</sup>. 它从正压流体的位涡度方程出发, 认为在离开东、西固壁边界的大洋内部区存在 Sverdrup 平衡, 即地转  $\beta$  效应项与风应力旋度平衡, 因而内部区的流动基本上由风应力形态确定. 在东、西边界区离岸方向的水平摩擦与地转项相平衡. 在西边界区存在两个振荡衰减的边界解, 它们相互平衡满足粘滞性边界条件, 而在东边界区只有一个直接衰减解, 它只能去匹配内部解以满足侧边界条件, 因而东边界附近流动很弱. 但我们只要审视一下北太平洋环流图(图 1)就不难看出, 在内部区的中纬度有黑潮延伸体和低纬度区有北赤道流等较集中的纬向流动, 其流动形态在经度方向均有比较剧烈的变化, 即经向变化特征尺度远小于纬向变化特征尺度, 所以在大洋内部经向水平摩擦项相对于地转  $\beta$  效应项是不能轻易忽略的. 这样我们就对传统的 Sverdrup 近似提出了质疑. 保留经向水平摩擦, 我们就可以引进南北水边界上的约束条件, 从而有可能改变大洋环流图像, 为此我们将建立如下数学物理问题.

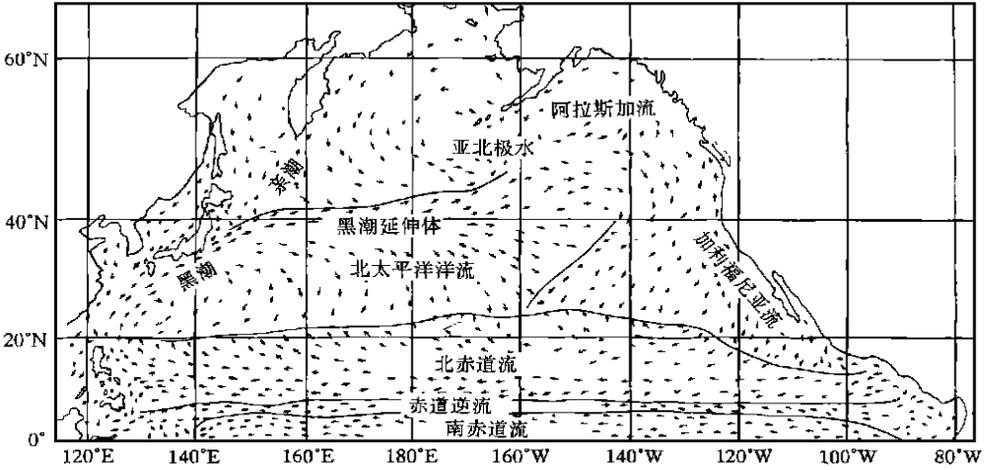


图 1 北太平洋环流图像<sup>[14]</sup>

### 1 问题的建立

为简化起见, 取等深矩形海盆  $x \in (0, x_0), y \in (0, y_0)$  代表北太平洋中纬度海区. 直角坐标系  $x$  轴指向东,  $y$  轴指向北.  $x=0$  和  $x=x_0$  为西、东岸壁,  $y=0$  和  $y=y_0$  为南、北水边界.

对于大尺度海洋运动, 流动满足涡度方程

$$\frac{d}{dt} \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\tau_0 L}{\rho D U^2} \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\tau}) - \frac{\gamma}{2} \nabla^2 \psi + \frac{1}{Re} \nabla^4 \psi \quad (1)$$

忽略非线性、底摩擦, 考虑定常运动得到

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^4} - \beta Re \frac{\partial \psi}{\partial x} = - Re \frac{\tau_0 L}{\rho D U^2} \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\tau}), \quad (2)$$

这里  $\beta = \frac{2 \Omega \cos \theta_0 L^2}{r_0 U}$ , 雷诺数  $Re = \frac{UL}{A_H}$ ,  $A_H$  为涡动粘滞系数,  $\boldsymbol{\tau}$  为风应力分布.

若取水平运动长度尺度  $L=1\ 000\ \text{km}$ , 特征水深  $D=1\ 000\ \text{m}$ , 速度尺度  $U=0.10\ \text{m/s}$ , 风应力尺度  $\tau_0=10^{-5}\ \text{N/cm}^2$ , 那么  $\frac{\tau_0 L}{\rho D U^2} = 10$ .

考虑到中纬度大洋内部风场的纬向运动特征, 为简化起见, 取方程(2)右端风应力旋度项

$$- Re \frac{\tau_0 L}{\rho D U^2} \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\tau}) = 10 Re \left[ \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right] = f(y) e^{\lambda_0(x-x_0)}. \quad (3)$$

于是, 得到我们将求解的方程:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^4} - b_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = f(y) e^{\lambda_0(x-x_0)}. \quad (4)$$

据地转关系流函数  $\psi$  满足  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = v, \frac{\partial \psi}{\partial y} = -u$ ,  $u$  和  $v$  为  $x$  和  $y$  方向的水平流速, 另外,  $b_0 = \beta Re$ .

对于东、西固壁边界, 流动应满足粘性边条件:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \text{当 } x = 0 \text{ 和 } x = x_0. \quad (5)$$

由于固壁上的粘滞性作用, 在东、西边界附近存在两个边界区, 离开边界区称为内部区. 由于风场随  $x$  缓变 ( $\lambda_0 \ll 1$ ), 可以设想在落入内部区的南、北水边界上没有水交换和动量交换, 即

$$\begin{aligned} \psi|_{y=0} = 0, & \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \\ \psi|_{y=y_0} = Q = \text{const}, & \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=y_0} = 0, \end{aligned} \quad x \in (\text{内部区}), \quad (6)$$

而在边界区的南、北边界上,  $x$  方向(垂直于侧壁)的速度为零 ( $u=0$ ), 且出于简化原因, 其沿壁方向的二阶导数也为零, 即

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 0, \quad \text{当 } y = 0 \text{ 和 } y = y_0, \quad x \in (\text{边界区}). \quad (7)$$

于是方程(4)和边界条件(5)~(7)就构成了我们将求解的数学物理边值问题. 由于在侧边界区 ( $x = 0, x = x_0$  附近) 离岸方向的摩擦占主导, 因而可利用摄动方法将海区分为侧边界区和离开侧边界的内部区分别求解.

## 2 内部解 $\psi_1(x, y)$

离开  $x$  的侧边界, 在方程(4)中忽略含  $x$  的高阶微商项, 由于  $b_0 \gg 1$  所以保留含  $b_0$  的一阶微商项:

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4} - b_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = f(y) e^{\lambda_0(x-x_0)}, \quad (8)$$

这里  $b_0 = O(10^3)$ .

与传统的 Sverdrup 平衡不同, 我们保留了  $y$  方向的水平摩擦项, 从而可以引进南、北边界上的边界条件(等同于条件(6)):

$$\psi_1|_{y=0} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \psi_1|_{y=y_0} = Q, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \Big|_{y=y_0} = 0. \quad (9)$$

为求解边值问题(8)和(9), 分解

$$\psi_1(x, y) = g_0(y) + g_1(y) e^{\lambda_0(x-x_0)} + \psi_1(x, y). \quad (10)$$

它们分别满足如下边值问题:

$$\begin{cases} g_0^{(4)}(y) = 0, \\ g_0(0) = g_0''(0) = 0, \quad g_0(y_0) = Q, \quad g_0''(y_0) = 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} g_1^{(4)}(y) - \lambda_0 b_0 g_1(y) = f(y), \\ g_1(0) = g_1''(0) = 0, \quad g_1(y_0) = g_1''(y_0) = 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4} - b_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \\ \psi_1|_{y=0} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \psi_1|_{y=y_0} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \Big|_{y=y_0} = 0; \end{cases} \quad (13)$$

可解出

$$\begin{cases} g_0(y) = \frac{Q}{y_0}y, \\ g_1(y) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_l}{\alpha_l^4 - \lambda_0 b_0} \sin \alpha_l y, \\ \psi(x, y) = \sum_{m=1}^M b_m e^{\lambda_m(x-x_0)} \sin \alpha_m y, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$f_l = \frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} f(y) \sin \alpha_l y dy, \quad f(y) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l \sin \alpha_l y, \quad \lambda_m = \frac{\alpha_m^4}{b_0}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{y_0}, \quad (15)$$

这里  $\psi(x, y)$  展开项数  $M$  的选取原则是在保证  $\left| \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right| \ll \left| \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right|$  条件下的最大值.

### 3 边界解 $\psi_B(x, y)$

据方程(4)和条件(7)边界解  $\psi_B(x, y)$  满足如下齐次边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \psi_B}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial y^4} - b_0 \frac{\partial \psi_B}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \psi_B}{\partial y} = \frac{\partial^3 \psi_B}{\partial y^3} = 0, \quad \text{对 } y = 0 \text{ 和 } y = y_0. \end{cases} \quad (16)$$

可以证明

$$\psi_B = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cos \alpha_n y. \quad (17)$$

$X_n(x)$  满足方程

$$X^{(4)}(x) - 2\alpha_n^2 X^{(2)}(x) - b_0 X^{(1)}(x) + \alpha_n^4 X(x) = 0. \quad (18)$$

取特征函数  $X(x) = e^{kx}$ , 得特征方程  $k^4 - 2\alpha_n^2 k^2 - b_0 k + \alpha_n^4 = 0$ .

数值解出特征值  $k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_{4n}$ , 它们一般为复数, 得特征函数

$$X_{1n}(x) = e^{k_{1n}x}, X_{2n}(x) = e^{k_{2n}x}, X_{3n}(x) = e^{k_{3n}(x-x_0)}, X_{4n}(x) = e^{k_{4n}(x-x_0)}, \quad (19)$$

于是

$$\psi_B(x, y) = \sum_{n=0}^N [a_{1n} e^{k_{1n}x} + a_{2n} e^{k_{2n}x} + a_{3n} e^{k_{3n}(x-x_0)} + a_{4n} e^{k_{4n}(x-x_0)}] \cos \alpha_n y. \quad (20)$$

由于实部:  $\text{real}(k_{1n}) \ll -1$ ,  $\text{real}(k_{2n}) \ll -1$ ,  $\text{real}(k_{3n}) \gg 1$  和只当  $n \geq M$  时才有  $\text{real}(k_{4n}) \gg 1$ ,

所以要求

$$a_{4n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (21)$$

以保证  $\psi_B$  是边界解.

### 4 总流函数的确定

据以上推导, 总流函数为

$$\psi(x, y) = \psi(x, y) + \psi_B(x, y) = g_0(y) + g_1(y) e^{\lambda_0(x-x_0)} + \sum_{m=1}^M b_m e^{\lambda_m(x-x_0)} \sin \alpha_m y +$$

$$\sum_{n=0}^N [a_{1n} e^{k_{1n} x} + a_{2n} e^{k_{2n} x} + a_{3n} e^{k_{3n} (x-x_0)} + a_{4n} e^{k_{4n} (x-x_0)}] \cos \alpha_n y, \quad (22)$$

这里在内部解中待定常数  $b_m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) 共  $M$  个, 在边界解中待定常数  $a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N$ ) 和  $a_{4n}$  ( $n=M, (M+1), \dots, N$ ) 共  $4(N+1)-M$  个, 因而总共有  $4(N+1)$  个待定常数, 它们还需要利用侧边界等条件来确定之。

我们可以将侧边界条件(5)写为

$$\begin{cases} \psi|_{x=0} = \psi|_{x=x_0} = q, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=x_0} = 0, \end{cases} \quad (23)$$

这里  $q$  为给定常数。

将流函数(22)代入边条件(23), 然后投影到基函数  $\cos \alpha_n y$  上得到(见附录)

$$\begin{cases} a_{1n} + a_{2n} = \sum_{m=1}^M b_m \mu_{11}(m, n) + \mu_{12}(n), \\ k_{1n} a_{1n} + k_{2n} a_{2n} = \sum_{m=1}^M b_m \mu_{21}(m, n) + \mu_{22}(n); \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} a_{3n} + a_{4n} = \sum_{m=1}^M b_m \mu_{31}(m, n) + \mu_{32}(n), \\ k_{3n} a_{3n} + k_{4n} a_{4n} = \sum_{m=1}^M b_m \mu_{41}(m, n) + \mu_{42}(n), \end{cases} \quad (25)$$

其中  $\mu_{j1}(m, n)$  和  $\mu_{j2}(n)$  均为已知量(见附录)。

可以解出

$$a_{jn} = \sum_{m=1}^M b_m E_{j1}(m, n) + E_{j2}(n), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (26)$$

其中  $E_{j1}(m, n)$  和  $E_{j2}(n)$  均为已知量(见附录)。

代入条件(21)中, 得到方程

$$\sum_{m=1}^M b_m E_{41}(m, n) = -E_{42}(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (27)$$

解出  $\{b_m\}$ , 代入关系式(26)中确定其余待定常数, 从而得到流函数分布(22)。

## 5 算例讨论

取北太平洋海盆大致范围为  $130^\circ\text{E} \sim 130^\circ\text{W}$ ,  $10^\circ\text{N} \sim 60^\circ\text{N}$ , 因而取  $x_0=10$ ,  $y_0=5$ ,  $\theta_0=35^\circ$ , 从而得  $\beta=200$ 。

另外对于大尺度流动, 参照前人的工作取  $A_H = 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$ , 得  $Re = 10$ 。对于线性问题, 我们关心的是流动形态, 而不是流量的绝对值。为了方便起见, 取总流量  $|Q| = 1$  ( $Q = -1$ )。另外, 同样作为西边界流的亲潮流量小于黑潮, 姑且取流量比为  $1:2$ , 所以取  $q = \frac{2}{3}Q$ 。

根据文献[14]中给出的春夏秋冬4幅北太平洋海面气压分布图, 可以计算出地转风、风应力场和风应力旋度场。根据其东部强, 西部弱的特点取衰减率  $\lambda_0 = 0.07$ , 再结合这些资料拟合出风应力旋度分布  $f(y)$  如图2所示。其主要分布特征与 Munk 所采用的风旋度场形式<sup>[1]</sup>大

体是一致的.

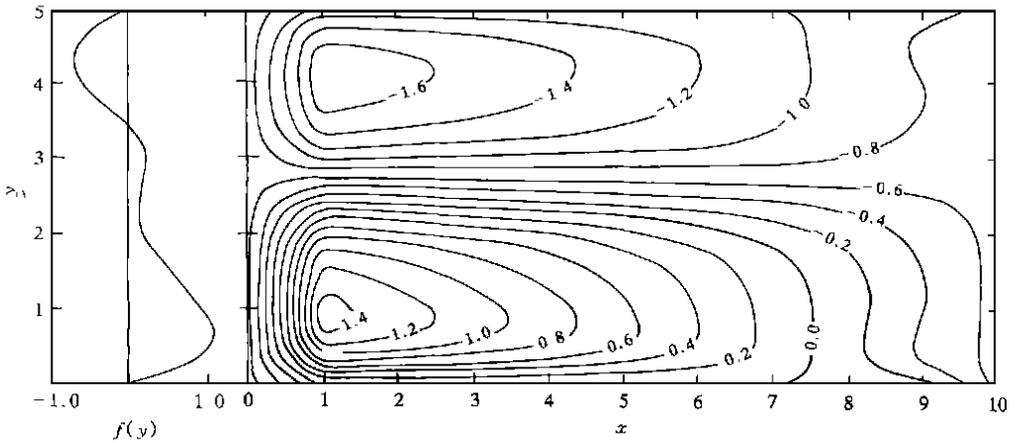


图 2 北太平洋海盆模拟流线分布  $\psi(x, y)$  和风应力旋度  $f(y)$

在以上参数和风场条件下计算了矩形海盆上的流线分布如图 2 所示. 对照实测北太平洋环流图(图 1)可看到, 大洋西岸附近为自南向北和自北向南的两股集中流, 分别对应黑潮和亲潮, 在中纬度汇合成一股转向东的集中流, 相当于黑潮延伸体. 由于经向水平摩擦和地转  $\beta$  效应, 这股流不断减弱, 其回流构成南、北两个再循环环流. 这两个环在西边界附近大大强化了西边界流. 在南边界对应北赤道流. 黑潮延伸体可抵达大洋东部, 然后分为南北两支离开海盆, 分别对应加利福尼亚寒流和阿拉斯加暖流. 这样一个包含北赤道流、西边界流、黑潮延伸体和东边界流动的南北两个再循环环流系统, 与观测结果趋势上是一致的. 显然优于利用 Munk 的方法得到的结果(图 3).

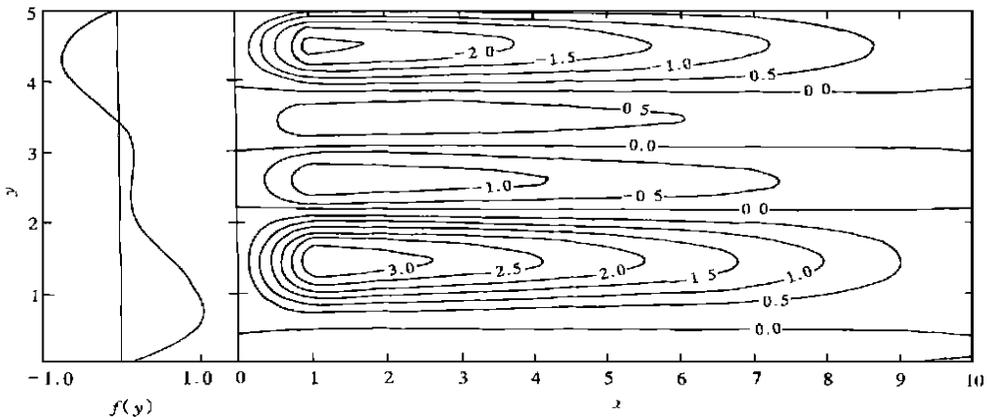


图 3 据 Munk 风生大洋环流理论模拟的北太平洋环流分布  $\psi(x, y)$  和风应力旋度  $f(y)$

为了检验内部区经向水平摩擦的重要性, 我们计算了经向水平摩擦项与地转  $\beta$  效应项之比的量值

$$\left| \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right| \left| \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|$$

的分布图,如图(4)所示. 可以看到,其比值为  $O(1)$ 量级的区域在黑潮延伸体和北赤道流附近. 无论从实测北太平洋环流图(图1),还是模拟的北太平洋海盆流线图(图2)均可看到,在黑潮延伸体附近和北赤道流附近,纬向( $x$ 方向)运动特征尺度  $L_x$  远大于经向( $y$ 方向)运动特征尺度  $L_y$ . 实际上只要

$$L_x = O[(\beta Re)^{1/4} L_y] = O(7L_y) \quad (\beta Re = 2000),$$

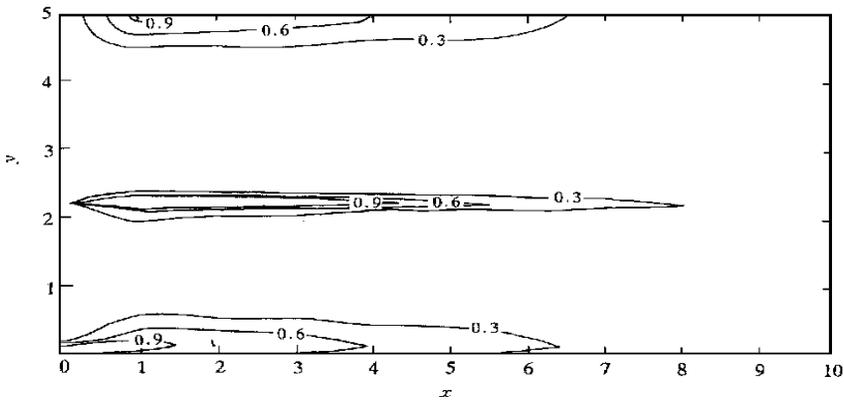


图4 大洋内部经向水平摩擦与地转 $\beta$ 效应的对比

(方程(8)左端两项)经向水平摩擦与 $\beta$ 效应项就接近同量级.

对于同样的风场分布,  $f_0 \lambda_0^{(x-x_0)}$ , 和系数数值  $\beta=200$ ,  $Re=10$ , 利用Munk的忽略经向水平摩擦的风生环流理论计算得到的矩形海盆上的流线分布如图3所示. 显然其分布与北太平洋环流图相去甚远. 数值检验证明, 在大洋内部相当大的范围内Munk理论所忽略掉的经向水平摩擦项, 相对于 $\beta$ 效应项并非可以忽略的小量(见图5). 这再次证明, 由于引用Sverdrup平衡, 在相当大的求解区域内产生了可观的误差.

这里需要进一步强调和澄清的问题是, 由于Munk利用的是忽略经向摩擦的涡度方程, 无法引入南北边界条件, 因而内部流动基本上由风场形态决定. 前面已经证明, 这种近似太粗糙了. 而本文在整个海区均保留了经向水平摩擦, 量阶估计和数值结果的估算均证明其合理性. 而水平摩擦在涡度方程中是以四阶导数形式出现, 因而需引入南北边界上的四个约束条件. 而对于如此宽阔(赤道太平洋宽度超过10000 km)范围上的南北水边界上的水文状况我们知之甚少, 因而给出合理的约束条件就显得非常困难. 考虑到北部水边界接近陆地(白令海峡相对流量很小), 因而在离开东西侧边界区, 通过北部水边界的水交换可以忽略. 另外, 如果南部水边界取在北赤道流流轴上, 那么离开东西边界区, 通过南部水边界的水交换也可以忽略. 在水边界上, 界面两侧水体之间的剪切应力可以忽略. 因而我们采用了(6)式所示的边界条件. 虽然这个边界条件是比较容易被人们接受, 但是在如此开阔的海域采用如此理想化的近似, 到底有多大可信度是需要进行敏感性试验的. 适当改变水边界条件, 尤其是赤道海区的边界条

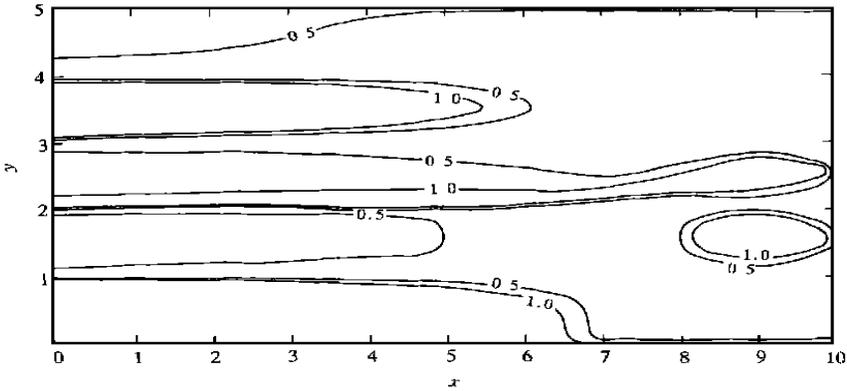


图 5 Sverdrup 平衡所产生误差的估计  $\left| \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial y^4} \right| \left| \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right|$

件, 检验其对内部解的影响程度是非常必要的. 另外, 侧边界的流函数值  $q$ , 是否可以利用某种物理的办法确定也是值得探讨的问题. 再有, 在存在南北约束的条件下, 大洋内部流场对风场形态的依赖性也应有敏感性试验. 可以猜想相对于 Munk 的工作, 这种依赖性应该减弱. 总之这些后续工作都是非常必要的. 但无论如何, 通过本文已有的工作还是可以得到如下重要结论.

## 6 结论

(1) 在大洋内部传统的 Sverdrup 关系不一定成立, 因为在存在明显纬向集中流的区域, 经向水平摩擦相对于地转  $\beta$  效应是不可忽略的.

(2) 中纬度海盆南、北边界条件对海盆内部流态有很大影响, 在一定的条件下可构造出包括大洋东边界流的北太平洋环流系统. 这再次证明大洋东边界流是与大洋环流总平衡关系密切相关的.

## 参 考 文 献

- 1 Munk W H. On the wind-driven ocean circulation. *J Meteor.* 1950, 7: 79~93
- 2 Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1987
- 3 Gill A E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. London: Academic Press, 1982
- 4 Philander S G H, Yoon J H. Eastern boundary currents and coastal upwelling. *J Phys Oceanogr.* 1982, 14(9): 1434~1450
- 5 Alejandro P S, O'Brien J J. The seasonal and interannual variability of the California Current System: A numerical model. *J Geophys Res.* 1989, 94(C3): 3159~3180
- 6 Brind K H, Cowles T J. The coastal transition zone program. *J Geophys Res.* 1991, 96(C8): 14637~14647
- 7 Haidvogel D B, Beckmann A, Hedström K S. Dynamical simulations of filament formation and evolution in the coastal transition zone. *J Geophys Res.* 1991, 96(C8): 15017~15040
- 8 Zamudio L, Lopez M. On the effect of the alongshore pressure gradient on numerical simulations over the Northern California Continental Shelf. *J Geophys Res.* 1994, 99(C8): 16117~16129
- 9 Garzoli S L. Origins and variability of the Benguela Current. *J Geophys Res.* 1996, 101(C1): 897~905

- 10 Chereskin J K, Trunell M. Correlation scales, objective mapping, and absolute geostrophic flow in the California Current. *J Geophys Res*, 1996, 101(C10): 22 619~22 629
- 11 Swenson M S, Niiler P P. Statistical analysis of the surface circulation of the California Current. *J Geophys Res* 1996, 101(C10): 22 631~22 645
- 12 Schwing F B, Mendelsshin R. Increased coastal upwelling in the California Current System. *J Geophys Res*, 1997, 102(C2): 3 421~3 438
- 13 Winant C D, Dorman C E. Seasonal patterns of surface wind stress and heat flux over the Southern California Bight. *J Geophys Res*, 1997, 102(C3): 5 641~5 653
- 14 Van Loon H. *Climates of the Oceans*. Amsterdam-Oxford: Elsevier, 1984

## 附录

函数  $G(y)$  在基函数  $\cos\alpha_n y$  上的投影定义为:

$$G_n = \frac{2}{y_0[1 + \tilde{\alpha}(n)]} \int_0^{y_0} G(y) \cos\alpha_n y dy, \quad \tilde{\alpha}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

方程(24)和(25)中,

$$\begin{aligned} \mu_{11}(m, n) &= -e^{-\lambda_m x_0} \gamma_{mn}, & \mu_{12}(m, n) &= q\tilde{\alpha}(n) - g_{0n} - g_{1n} e^{-\lambda_0 x_0}, \\ \mu_{21}(m, n) &= -\lambda_m e^{-\lambda_m x_0} \gamma_{mn}, & \mu_{22}(n) &= -\lambda_0 g_{1n} e^{-\lambda_0 x_0}, \\ \mu_{31}(m, n) &= -\gamma_{mn}, & \mu_{32}(m, n) &= q\tilde{\alpha}(n) - g_{0n} - g_{1n}, \\ \mu_{41}(m, n) &= -\lambda_m \gamma_{mn}, & \mu_{42}(n) &= -\lambda_0 g_{1n}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{mn} = \frac{2}{y_0[1 + \tilde{\alpha}(n)]} \int_0^{y_0} \sin\alpha_n y \cos\alpha_m y dy,$$

$$g_{0n} = \frac{2}{y_0[1 + \tilde{\alpha}(n)]} \int_0^{y_0} g_0(y) \cos\alpha_n y dy,$$

$$g_{1n} = \frac{2}{y_0[1 + \tilde{\alpha}(n)]} \int_0^{y_0} g_1(y) \cos\alpha_n y dy = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_l}{\alpha_l^4 - \lambda_0 b_0} \gamma_{ln}.$$

关系式(26)中,

$$\begin{aligned} E_{11}(m, n) &= L_{1n} \left\{ \mu_{11}(m, n), \mu_{21}(m, n) \right\}, & E_{12}(n) &= L_{1n} \left\{ \mu_{12}(n), \mu_{22}(n) \right\}, \\ E_{21}(m, n) &= L_{2n} \left\{ \mu_{11}(m, n), \mu_{21}(m, n) \right\}, & E_{22}(n) &= L_{2n} \left\{ \mu_{12}(n), \mu_{22}(n) \right\}, \\ E_{31}(m, n) &= L_{3n} \left\{ \mu_{31}(m, n), \mu_{41}(m, n) \right\}, & E_{32}(n) &= L_{3n} \left\{ \mu_{32}(n), \mu_{42}(n) \right\}, \\ E_{41}(m, n) &= L_{4n} \left\{ \mu_{31}(m, n), \mu_{41}(m, n) \right\}, & E_{42}(n) &= L_{4n} \left\{ \mu_{32}(n), \mu_{42}(n) \right\}, \end{aligned}$$

其中算子:

$$L_{1n} \left\{ B_1, B_2 \right\} \equiv \frac{k_{2n} B_1 - B_2}{k_{2n} - k_{1n}}, \quad L_{2n} \left\{ B_1, B_2 \right\} \equiv \frac{-k_{1n} B_1 + B_2}{k_{2n} - k_{1n}},$$

$$L_{3n} \left\{ B_3, B_4 \right\} \equiv \frac{k_{4n} B_3 - B_4}{k_{4n} - k_{3n}}, \quad L_{4n} \left\{ B_3, B_4 \right\} \equiv \frac{-k_{3n} B_3 + B_4}{k_{4n} - k_{3n}}.$$