中国科学
1989 年 3 月 A 辑 第 3 期

论复自治微分系统的奇点量*

刘一戎
(湖南大学数学系，长沙)

李继彬
(昆明工学院数学教研室)

摘 要

本文研究复自治微分系统 (E)，得到如下的主要结果：(i) 引入奇点量概念，实现了实系统中焦点量和鞍点量的统一；(ii) 定义 Lie 不变量概念，得到奇点量结构定理和广义对称原理；(iii) 计算了 (E_3) 的全部 120 个基本 Lie 不变量，并应用奇点量结构定理得到 (E_2) 和 ($E_3^{(3)}$) 的奇点量公式及可积性条件[1].

关键词： 微分系统，奇点量

一、奇点量定义与可积性条件

在常微分方程的实平面定性理论中，由细焦点和鞍点分界线环经扰动而产生极限环问题，以及中心焦点判定问题，都涉及两个重要的判定量：焦点量和鞍点量. 许多数学家曾研究过这两个判定量，但迄今尚未找到共同的规律. 本文试图寻找统一规律，为此，将具有细焦点和细鞍点的实平面自治微分系统在复形式上统一起来，考虑下述复自治微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT} = z + \displaystyle\sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} a_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} = Z(z, w), \\ \dfrac{dw}{dT} = -w - \displaystyle\sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} b_{\alpha\beta} w^{\alpha} z^{\beta} = -W(z, w), \end{cases} \tag{E}$$

其中 (E) 的右端函数在原点邻域解析. z 和 w 及 T 都是复变量，$a_{\alpha\beta}$ 和 $b_{\alpha\beta} \in \mathbf{P}$, $\mathbf{P}$ 是由 (E) 的全部右端系数构成的复参数空间，$\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \geqslant 2$.

称 (E) 的座标原点为细临界型奇点 (其线性部分的两个特征根之比为 $\lambda_1/\lambda_2 = -1$).

系统 (E) 经过复线性变换

$$z = x + iy, \quad w = x - iy, \quad T = it \tag{1.1}$$

化为下列形式：

$$\frac{dx}{dt} = -y + h\cdot o\cdot t = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + h\cdot o\cdot t = Y(x, y). \tag{Ê}$$

在本文中，记号 i 表示 $\sqrt{-1}$, $h\cdot o\cdot t$ 表示高次项. 系统 (Ê) 既可以是实的也可以是复的.

本文 1987 年 8 月 22 日收到，1988 年 1 月 22 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

1) 本文的详细证明见“第二届全国常微分方程定性理论会议”(长春，1987 年 8 月)交流资料，昆明工学院预印本.

称 (E) 与 ($\hat{E}$) 互为伴随系统.

引理 1.1.[1] 可唯一地逐项确定形式级数

$$\begin{cases}\varphi(z,\ w)=z+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{\infty}A_{\alpha\beta}z^{\alpha}w^{\beta},\\ \phi(z,\ w)=w+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{\infty}B_{\alpha\beta}w^{\alpha}z^{\beta},\end{cases}\tag{1.2}$$

使系统 (E) 经变换(1.2)式后化为下列规范型:

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dT}=\varphi\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k(\varphi\cdot\phi)^k,\\ \dfrac{d\phi}{dT}=-\phi\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_k(\varphi\cdot\phi)^k.\end{cases}\tag{E}$$

其中 $A_{k+1,k}=B_{k+1,k}=0, p_0=q_0=1$, p_k 与 q_k 是 P 上的有理系数多项式. $k=1,2,\cdots$.

定义 1.1. (i) 对系统 (E), 记 $\mu_0=0$ 称

$$\mu_k=p_k-q_k,\tag{1.3}$$

为原点的第 k 个奇点量. $k=1,2,\cdots$.

(ii) 若 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k-1}=0$, $\mu_k\neq0$, 则称 (E) 的原点为 k 阶细临界型奇点,或称 (E) 的原点具有重次(或精细度) k.

(iii) 若 (E) 之原点的所有奇点量全部为零,则称 (E) 的原点为广义中心.

注记 1.1. 如果 (E) 是实系数平面微分自治系统,则 μ_k 即为原点的第 k 个鞍点量, 与文献[2]中的定义一致.

注记 1.2. 如果 ($\hat{E}$) 是实系数平面微分自治系统,其伴随系统为 (E),则对于座标原点,($\hat{E}$) 的第 k 个焦点量 V_{2k+1} 与 (E) 的第 k 个奇点量有关系

$$V_{2k+1}=i\mu_k,\ k=1,2,\cdots.\tag{1.4}$$

其中因子 i 的出现是因为在(1.1)式中有替换 $T=it$.

定理 1.1. 系统 (E) 在原点邻域存在正则积分 $F(z,w)=\text{Const}$ 的充分必要条件是原点为广义中心,即原点的奇点量全部为零.

证. 设原点的奇点量全部为零, 则[1]变换(1.2)式中的两个函数在原点邻域解析,从而(E)在原点邻域存在正则积分 $\varphi\phi=\text{Const}$, 即充分性成立. 又如果原点的奇点量不全为零, 则 $F(z,w)$ 的系数不能完全确定,从而必要性成立.

定理 1.2. 系统 (E) 在原点邻域存在正则积分 $F(z,w)=\text{Const}$ 的充分必要条件是存在正则积分因子,即存在在原点邻域解析的函数 $J(z,w)$, 满足 $J(0,0)\neq0$, 且

$$\frac{\partial}{\partial z}(JZ)-\frac{\partial}{\partial w}(JW)=0.\tag{1.5}$$

证. 充分性显然成立. 现证必要性. 取变换(1.2)式的 Jacobi 行列式

$$J(z,w)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}, & \dfrac{\partial\phi}{\partial w}\end{vmatrix}$$

直接验证知等式

$$\frac{\partial}{\partial z}(JZ)-\frac{\partial}{\partial w}(JW)=J\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu_k(\varphi\phi)^k \tag{1.6}$$

成立. 如果系统 (E) 在原点邻域存在正则积分 $F(z, w)=\text{Const}$, 则由定理 **1.1** 的证明过程知 $J(z, w)$ 在原点邻域解析. 此时关系式(1.6)已化为(1.5)式, 且 $J(0, 0)=1$.

定理 1.3. 如果 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k+1}=0$, 且 $\mu_k\neq 0$, 则 (E) 在原点邻域存在下列通积分:

$$F(z,w)=H^{C_k}\frac{\phi}{\varphi}\exp[H^{-k}f(H)]=\text{Const}.$$

且当 $\varphi(z, w)$ 及 $\phi(z, w)$ 在原点邻域解析时, $f(H)$ 也在 $H=0$ 附近解析. 其中 $H=\varphi\phi$,

$$f(H)=\sum_{\substack{s=0\\s\neq k}}^{\infty}\frac{C_s}{s-k}H^s,\ C_0=\frac{p_0+q_0}{\mu_k},$$

$$C_s=\frac{1}{\mu_k^{s+1}}\begin{vmatrix}\mu_k & & 0 & p_0+q_0\\ \mu_{k+1} & \mu_k & & p_1+q_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{k+s-1} & \mu_{k+s-2} & \cdots\mu_k & p_{s-1}+q_{s-1}\\ \mu_{k+s} & \mu_{k+s-1} & \cdots\mu_{k+1} & p_s+q_s\end{vmatrix} \tag{1.7}$$

$s=1, 2, \cdots$.

证. 通积分是通过变换 $H=\varphi\cdot\phi, G=\ln\frac{\varphi}{\phi}$ 把系统 (E) 化为

$$\frac{dH}{dG}=\frac{H^{k+1}\sum_{s=0}^{\infty}\mu_{k+s}H^s}{\sum_{s=0}^{\infty}(p_s+q_s)H^s}=\frac{H^{k+1}}{\sum_{s=0}^{\infty}C_sH^s} \tag{1.8}$$

后直接求得. 在关系式(1.8)中应用了文献 [3] 中给出的公式. 而 $f(H)$ 的解析性则是利用 $\sum_{s=0}^{\infty}C_sH^s$ 的解析性和 Cauchy 不等式[4]得证.

定理 1.4. 对系统 (E), 可逐项确定形式级数 $F(z, w)=zw+h\cdot o\cdot t$, 使

$$\left.\frac{dF}{dT}\right|_{(E)}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(zw)^{k+1}, \tag{1.9}$$

且当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0$, $\lambda_k\neq 0$ 时, 必有 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k-1}=0$, $\mu_k=\lambda_k$. 反之亦然. $k=1, 2, \cdots$(证略).

定理 1.5. 对系统 (E), 及 $\forall\gamma\neq 0$, 可逐项确定形式级数 $M(z, w)=1+h\cdot o\cdot t$, 使得

$$\left.\frac{dM}{dT}\right|_{(E)}=\gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}Z-\frac{\partial}{\partial w}W\right)M-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(wz)^k\right], \tag{1.10}$$

且当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0$, $\lambda_k\neq 0$ 时, 必有 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k-1}=0$, $\mu_k=\frac{1}{k+1}\lambda_k$.

反之亦然. $k=1,2,\cdots$ (证略).

定理 1.4 和定理 1.5 分别给出了计算奇点量公式的形式级数法和积分因子法.

注记 1.3. 在关系式(1.10)中,若所有的 λ_k 全部为零,则 $M^{-\frac{1}{r}}$ 便是系统 (E) 的积分因子. 特别, 如果 Z 和 W 是 z 与 w 的 n 次多项式, 且 M 是 z 与 w 的 m 次多项式, 则 $\left.\frac{dM}{dT}\right|_{(E)}$ 与 $\left(\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial w}\right)M$ 便都是 z 与 w 的 $n+m-1$ 次多项式,而两者相等的条件便是原点为广义中心的一组充分条件. $m=0,1,2,\cdots$.

二、Lie 不变量与奇点量的代数结构

由引理 1.1 及定义 1.1 已知系统 (E) 原点的奇点量是定义于 P 中的多项式. 为了进一步研究奇点量的代数结构,兹引进双参数变换群

$$z=\rho e^{i\theta}\tilde{z},\quad w=\rho e^{-i\theta}\tilde{w}. \tag{2.1}$$

其中 $\tilde{z}$ 和 $\tilde{w}$ 是新变量, ρ 和 θ 是复参数, $\rho\neq 0$. 若记 $z=x+iy, w=x-iy, \tilde{z}=\tilde{x}+i\tilde{y}$, $\tilde{w}=\tilde{x}-i\tilde{y}$, 则变换(2.1)式即为

$$\begin{cases}x=\rho(\tilde{x}\cos\theta-\tilde{y}\sin\theta),\\ y=\rho(\tilde{x}\sin\theta+\tilde{y}\cos\theta).\end{cases} \tag{2.2}$$

(2.2)式在实域中是相似-旋转变换.

系统(E)经过变换(2.1)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{z}}{dT}=\tilde{z}+\displaystyle\sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty}\tilde{a}_{\alpha\beta}(\tilde{z})^{\alpha}(\tilde{w})^{\beta},\\ \dfrac{d\tilde{w}}{dT}=-\tilde{w}-\displaystyle\sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty}\tilde{b}_{\alpha\beta}(\tilde{w})^{\alpha}(\tilde{z})^{\beta}.\end{cases} \tag{$\tilde{\mathrm{E}}$}$$

其中 $\forall\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\geqslant 2$ 有

$$\begin{cases}\tilde{a}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}\rho^{\alpha+\beta-1}e^{i(\alpha-\beta-1)\theta},\\ \tilde{b}_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}\rho^{\alpha+\beta-1}e^{-i(\alpha-\beta-1)\theta}.\end{cases} \tag{2.3}$$

以下为简单起见,用 $f(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ 记定义于 P 上的多变量函数,简称(2.1)式为 Lie 变换. 并设

$$\tilde{f}=f(\tilde{a}_{\alpha\beta},\tilde{b}_{\alpha\beta})\quad f^{*}=f(a^{*}_{\alpha\beta},b^{*}_{\alpha\beta}),$$

其中 $a^{*}_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}$, $b^{*}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\geqslant 2$.

倘若 $\tilde{f}=\rho^{I_s}e^{iI_r\theta}f$, 称 I_s 与 I_r 分别为在 Lie 变换(2.1)式下的相似指数与旋转指数.

定义 2.1. (i) 若 $f=f(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ 经 Lie 变换化为 $\tilde{f}=\rho^{2k}\cdot f$ (即 $I_s=2k$, $I_r=0$),称 f 为 Lie 变换下的 k 级 Lie 不变量; (ii) 若 f 既是 Lie 不变量,又是 P 上的单项式,则称 f 为 (E) 的一个单项式 Lie 不变量; (iii) 若 f 是 (E) 的一个单项式 Lie 不变量,且它不可能表示为 (E) 的两个单项式 Lie 不变量的乘积, 称 f 为 (E) 的一个基本 Lie 不变量.

注 2.1. 显然, k 级 Lie 不变量与 l 级 Lie 不变量之积是 $k+l$ 级 Lie 不变量.

由关系式(2.3)及定义 2.1 立即可得

定理 2.1. 定义于 P 上的任一单项式

$$g = \prod_{j=1}^{n} a_{\alpha_j\beta_j} \prod_{s=1}^{m} b_{u_s v_s} \tag{2.4}$$

是(E)的一个 k 级单项式 Lie 不变量，当且仅当

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j - 1) + \sum_{s=1}^{m} (u_s + v_s - 1) = 2k, \\ \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j - 1) - \sum_{s=1}^{m} (u_s - v_s - 1) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

容易验证，当(2.5)式成立时 k 为正整数。

定理 2.2. 如果由(2.4)式给出的单项式 $g = g(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ 是 (E) 的一个 k 级单项式 Lie 不变量(或基本 Lie 不变量)，则 g^* 亦然。

定理 2.3. 系统 (E) 原点的第 k 个奇点量 $\mu_k = \mu_k(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$ 是 (E) 的一个 k 级 Lie 不变量，即 $\tilde{\mu}_k = \rho^{2k}\mu_k$, $k = 1, 2, \cdots$.

证. 系统 ($\tilde{\mathrm{E}}$) 原点的第 k 个奇点量显然是 $\tilde{\mu}_k = \mu_k(\tilde{a}_{\alpha\beta}, \tilde{b}_{\alpha\beta})$. 又通过变换

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta} \cdot \varphi(\rho e^{i\theta}\tilde{z}, \rho e^{-i\theta}\tilde{w}), \\ \tilde{\psi} = \dfrac{1}{\rho} e^{i\theta}\psi(\rho e^{i\theta}\tilde{z}, \rho e^{-i\theta}\tilde{w}), \end{cases} \tag{2.6}$$

可把系统 ($\tilde{\mathrm{E}}$) 化为下列规范型:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\varphi}}{dT} = \tilde{\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} p_k(\tilde{\varphi}\tilde{\psi})^k, \\ \dfrac{d\tilde{\psi}}{dT} = -\tilde{\psi} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} q_k(\tilde{\varphi}\tilde{\psi})^k. \end{cases} \tag{$\tilde{\mathrm{E}}$}$$

从而由定义 1.1 知系统($\tilde{\mathrm{E}}$)原点的第 k 个奇点量为 $\tilde{\mu}_k = \rho^{2k}(p_k - q_k) = \rho^{2k}\mu_k$, $k = 1, 2, \cdots$.

推论 2.1. 若 ($\tilde{\mathrm{E}}$) 是实系数平面微分自治系统，则其原点的第 k 个焦点量 V_{2k+1} 是在变换(2.2)下的 k 级旋转不变量. $k = 1, 2, \cdots$.

定理 2.4. 系统 (E) 原点的奇点量具有反对称性，即 $\mu_k^* = -\mu_k$, $k = 1, 2, \cdots$.

证. 引进反对称变换

$$z = w^*, \ w = z^*, \ T = -T^* \tag{2.7}$$

系统 (E) 经过变换(2.7)式化为

$$\begin{cases} \dfrac{dz^*}{dT^*} = z^* + \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} a_{\alpha\beta}^*(z^*)^\alpha(w^*)^\beta, \\ \dfrac{dw^*}{dT^*} = -w^* - \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} b_{\alpha\beta}^*(w^*)^\alpha(z^*)^\beta. \end{cases} \tag{E^*}$$

系统 (E^*) 原点的第 k 个奇点量显然是 μ_k^*, 这里 $\mu_k^* = \mu_k(a_{\alpha\beta}^*, b_{\alpha\beta}^*)$. 又经过变换

$$\varphi^* = \psi(w^*, z^*), \ \psi^* = \varphi(w^*, z^*), \tag{2.8}$$

可把 (E^*) 化为下列规范型:

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi^*}{dT^*}=\varphi^*\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_k(\varphi^*,\phi^*)^k,\\ \dfrac{d\phi^*}{dT^*}=-\phi^*\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k(\varphi^*,\phi^*)^k.\end{cases}\tag{E*}$$

从而由定义 1.1 知系统 (E*) 原点的第 k 个奇点量为 $\mu_k^*=q_k-p_k$，即 $\mu_k^*=-\mu_k$. $k=1$, $2,\cdots$.

定理 2.5.(奇点量结构定理) 系统 (E) 原点的第 k 个奇点量 μ_k 是 (E) 的 k 级单项式 Lie 不变量的有理系数反对称线性组合,即 μ_k 有下列代数结构:

$$\mu_k=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{kj}(g_{kj}-g_{kj}^*),\ k=1,2\cdots.\tag{2.9}$$

其中 $s=s(k)$ 是某正整数，γ_{kj} 是有理系数，g_{kj} 与 g_{kj}^* 是 (E) 的 k 级单项式 Lie 不变量。

证。由引理 1.1 知 μ_k 是定义于 P 上的有理系数的多项式。不失一般性可设 μ_k 是由一些彼此间线性无关的单项式构成的线性组合。再由定理 2.3 及定理 2.4 即得本定理的证明.

由上述定理立即可得

定理 2.6.(广义对称原理) 若系统 (E) 的任何一个基本 Lie 不变量 g 都满足 $g=g^*$,则 (E) 的原点为广义中心,即原点的奇点量全部为零.

上述定理以实域中关于中心焦点判定问题的对称原理作为特例。事实上，设 $(\hat{E})$ 是实系数平面微分自治系统,其向量场有过原点的对称轴,则不妨设之为 x 轴（否则作适当的旋转变换,而 Lie 不变量不因之改变),于是 $(\hat{E})$ 的右端函数满足关系式 $X(x,-y)=-X(x,y)$, $Y(x,-y)=Y(x,y)$. 其伴随系统 (E) 的右端函数因而有关系 $Z(w,z)=W(z,w)$,且由此可得 $a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}$, $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$, $\alpha+\beta\geqslant2$. 此时广义对称原理的条件显然成立。

定理 2.7. 若 (E) 的右端系数满足下列条件之一,则原点是广义中心。

(i) $a_{\alpha\beta}=0$，当 $\alpha-\beta-1\geqslant0$; $b_{\alpha\beta}=0$，当 $\alpha-\beta-1\leqslant0$.

(ii) $a_{\alpha\beta}=0$，当 $\alpha-\beta-1\leqslant0$; $b_{\alpha\beta}=0$，当 $\alpha-\beta-1\geqslant0$.

证。对任一形如(2.4)式的单项式 g，容易验证,当上述条件之一成立时，(2.5) 式必不成立。从而由定理 2.1 及定理 2.6 即得本定理的证明.

例：考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dT}=z+a_{12}zw^2+a_{03}w^3+a_{22}z^2w^2+a_{13}zw^3+a_{44}w^4,\\ \dfrac{dw}{dT}=-w-b_{30}w^3-b_{40}w^4-b_{31}w^3z.\end{cases}\tag{2.10}$$

显然，(2.10)式的系数满足定理 2.7 中条件 (i)，故其原点是广义中心。这个结论用过去的方法不易得到。

三、(E_3) 的全体基本 Lie 不变量

根据第二节的定理,为计算奇点量，需要寻找和组合基本 Lie 不变量。本节以 (E_3) 为例,介绍发现基本 Lie 不变量的方法。考虑三次系统

$$\frac{dz}{dT} = z + a_{20}z^2 + a_{11}zw + a_{02}w^2 + a_{30}z^3 + a_{21}z^2w + a_{12}zw^2 + a_{03}w^3,$$
$$\frac{dw}{dT} = -w - b_{20}w^2 - b_{11}wz - b_{02}z^2 - b_{30}w^3 - b_{21}w^2z - b_{12}wz^2 - b_{03}z^3. \tag{E$_3$}$$

按照在 Lie 变换(2.1)式下旋转指数的不同，(E_3) 的系数可分为以下九类：

$$R_0 = \{a_{21}, b_{21}\},\ R_1 = \{a_{20}, b_{11}\},\ R_2 = \{a_{30}, b_{12}\},$$
$$R_3 = \{b_{02}\},\quad R_4 = \{b_{03}\},\quad R_{-1} = \{b_{20}, a_{11}\}, \tag{3.1}$$
$$R_{-2} = \{b_{30}, a_{12}\}, R_{-3} = \{a_{02}\},\quad R_{-4} = \{a_{03}\}.$$

其中 $I_r(R_{\pm j}) = \pm j,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$.

显然，R^0 中的两个元素是 (E_3) 的基本 Lie 不变量，(E_3) 的其他基本 Lie 不变量与这两个元素无关.

在 R_j 中任取 k_j 个元素，在 R_{-j} 中任取 l_j 个元素相乘（可重复取），构成一个单项式 g. k_j, l_j 是预先给定的非负整数，$j = 1-4$. 用上述方法组成的单项式全体的集合记为 G，记为

$$G = \prod_{\alpha=1}^{4} R_\alpha^{k_\alpha} \cdot \prod_{\alpha=1}^{4} R_{-\alpha}^{l_\alpha},\ \alpha = 1-4. \tag{3.2}$$

显然，

$$I_r(G) = \sum_{\alpha=1}^{4} \alpha k_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{4} \alpha l_\alpha. \tag{3.3}$$

由(3.3)式及定义 2.1 可得

定理 3.1. G 中元素 g 是单项式 Lie 不变量的充分必要条件是以下整数线性方程满足：

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = l_1 + 2l_2 + 3l_3 + 4l_4. \tag{3.4}$$

定义 3.1. 若 $\zeta = (k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, l_4)$ 是 (3.4) 式的一个非零的解向量，且每个分量为非负整数，则称 ζ 是(3.4)式的一个正规解：若正规解 ζ 不能表示为两个正规解之和，称 ζ 为基本正规解.

由上述定义及定理 3.1 得

定理 3.2. G 中元素是基本 Lie 不变量的充分必要条件是 ζ 为(3.4)式的基本正规解.

记 $\zeta^* = (l_1, l_2, l_3, l_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$，$G^* = \prod_{\alpha=1}^{4} R_\alpha^{l_\alpha} \cdot \prod_{\alpha=1}^{4} R_{-\alpha}^{k_\alpha}$. 于是显然有

定理 3.3. (i) 若 G 中元素为 (E_3) 的基本 Lie 不变量，G^* 中元素亦然；(ii) 若 ζ 是 (3.4) 式的基本正规解，则 ζ^* 亦然.

细致地求解方程(3.4)得

定理 3.4. 方程(3.4)恰有 34 组基本正规解.

利用求出的 34 组基本正规解构造基本 Lie 不变量得：

定理 3.5. 三次系统 (E_3) 恰有 120 个基本 Lie 不变量，如表 1 所示，其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为非负整数.

推论 3.1. 缺二次项的三次系统

表 1　E_3 的基本 Lie 不变量

级	个 数	各级基本 Lie 不变量			备 注
一	2	a_{21}		b_{21}	
	2	$a_{20}a_{11}$		$b_{20}b_{11}$	
	3	$a_{20}b_{20}$	$a_{11}b_{11}$	$a_{02}b_{02}$	(自对称者)
二	2	$a_{30}a_{12}$		$b_{30}b_{12}$	
	12	$a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}b^{\gamma}_{30}a^{\delta}_{12}$		$b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}a^{\gamma}_{30}b^{\delta}_{12}$	$\alpha+\beta=2,\ \gamma+\delta=1$
	8	$a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}a_{02}$		$b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}b_{02}$	$\alpha+\beta=3$
	8	$b_{02}b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}b^{\gamma}_{30}a^{\delta}_{12}$		$a_{02}a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}a^{\gamma}_{30}b^{\delta}_{12}$	$\alpha+\beta=1,\ \gamma+\delta=1$
	4	$b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}a_{02}b_{03}$		$a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}b_{02}a_{03}$	$\alpha+\beta=1$
	3	$a_{30}b_{30}$	$a_{12}b_{12}$	$a_{03}b_{03}$	(自对称者)
三	6	$a^{\alpha}_{30}b^{\beta}_{12}a_{03}$		$b^{\alpha}_{30}a^{\beta}_{12}b_{03}$	$\alpha+\beta=2$
	12	$a^{\alpha}_{30}b^{\beta}_{12}b^{\gamma}_{20}a^{\delta}_{11}a_{02}$,		$b^{\alpha}_{30}a^{\beta}_{12}a^{\gamma}_{20}b^{\delta}_{11}b_{02}$	$\alpha+\beta=2,\ \gamma+\delta=1$
	10	$a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}a_{03}$		$b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}b_{03}$	$\alpha+\beta=4$
	8	$a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}b_{03}b^{\gamma}_{30}a^{\delta}_{12}a_{02}$,		$b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}a_{03}a^{\gamma}_{30}b^{\delta}_{12}b_{02}$	$\alpha+\beta=1,\ \gamma+\delta=1$
	4	$b^{2}_{02}b^{\alpha}_{30}a^{\beta}_{12}a_{03}$		$a^{2}_{02}a^{\alpha}_{30}b^{\beta}_{12}b_{03}$	$\alpha+\beta=1$
	6	$b^{2}_{02}b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}a_{03}$		$a^{2}_{02}a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}b_{03}$	$\alpha+\beta=2$
	12	$b_{03}b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}b^{\gamma}_{30}a^{\delta}_{12}$		$a_{03}a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}a^{\gamma}_{30}b^{\delta}_{12}$	$\alpha+\beta=2,\ \gamma+\delta=1$
四	4	$b^{3}_{02}b^{\alpha}_{20}a^{\beta}_{11}a^{2}_{03}$		$a^{3}_{02}a^{\alpha}_{20}b^{\beta}_{11}b^{2}_{03}$	$\alpha+\beta=1$
	4	$b^{2}_{03}b^{\alpha}_{30}a^{\beta}_{12}a^{2}_{02}$		$a^{2}_{03}a^{\alpha}_{30}b^{\beta}_{12}b^{2}_{02}$	$\alpha+\beta=1$
	8	$a^{\alpha}_{30}b^{\beta}_{12}a^{2}_{02}$		$b^{\alpha}_{30}a^{\beta}_{12}b^{2}_{02}$	$\alpha+\beta=3$
五	2	$b^{4}_{02}a^{3}_{03}$		$a^{4}_{02}b^{3}_{03}$	

表 2　($E_3^{(3)}$) 的基本 Lie 不变量

一　级	a_{21},　b_{21}
二　级	$a_{30}b_{30}$, $a_{12}b_{12}$, $a_{03}b_{03}$, $a_{30}a_{12}$, $b_{30}b_{12}$
三　级	$a^{2}_{30}a_{03}$, $a_{30}b_{12}a_{03}$, $b^{2}_{12}a_{03}$ $b^{2}_{30}b_{03}$, $b_{30}a_{12}b_{03}$, $a^{2}_{12}b_{03}$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz}{dT} = z + a_{30}z^3 + a_{21}z^2w + a_{12}zw^2 + a_{03}w^3, \\[2ex]
\dfrac{dw}{dT} = -w - b_{30}w^3 - b_{21}w^2z - b_{12}wz^2 - b_{03}z^3,
\end{cases}
\tag{$E_3^{(3)}$}
$$

恰有 13 个基本 Lie 不变量,由表 2 给出. 其中 3 个是自对称的,其余 10 个成对出现.

推论 3.2. 具有细临界型奇点的二次系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz}{dT} = z + a_{20}z^2 + a_{11}zw + a_{02}w^2, \\[2ex]
\dfrac{dw}{dT} = -w - b_{20}w^2 - b_{11}wz - b_{02}z^2,
\end{cases}
\tag{E_2}
$$

恰有 13 个基本 Lie 不变量,由表 3 给出.

表 3　(E_2) 的基本 Lie 不变量

一级自对称者	$a_{20}b_{20}$, $a_{11}b_{11}$, $a_{02}b_{02}$
一级非自对称者	$a_{20}a_{11}$, $b_{20}b_{11}$
二级非自对称者	$a_{20}^3a_{02}$, $a_{20}^2b_{11}a_{02}$, $a_{20}b_{11}^2a_{02}$, $b_{11}^3a_{02}$ $b_{20}^3b_{02}$, $b_{20}a_{11}b_{02}$, $b_{20}a_{11}^2b_{02}$, $a_{11}^3b_{02}$

推论 3.3. 如果表 1 中的 120 个基本 Lie 不变量 g 都满足 $g=g^*$，则 (E_3) 原点的奇点量全部为零.

推论 3.4. 如果 (E_3) 的伴随系统 $(\hat{E}_3)$ 是实系数平面微分自治系统，则在推论 3.3 的条件下，$(\hat{E}_3)$ 的向量场具有过原点的对称轴，从而 $(\hat{E}_3)$ 的原点是对称中心.

四、(E_2) 与 $(E_3^{(3)})$ 的奇点量公式和可积条件

应用奇点量结构定理和表 2、表 3，可用待定系数法推导 (E_2) 与 $(E_3^{(3)})$ 的奇点量公式. 其中少量的待定系数完全可以通过微型计算机作数值计算确定. 例如，对系统 (E_2)，前三个奇点量的代数结构经化简后如下：

$$\begin{cases}\mu_1=\lambda(a_{20}a_{11}-b_{20}b_{11}),\\ \mu_2=\sum\limits_{k=1}^{4}\gamma_k(a_{20}^{k-1}b_{11}^{4-k}a_{02}-b_{20}^{k-1}a_{11}^{4-k}b_{02}),\\ \mu_3=\sum\limits_{k=1}^{3}(\alpha_ka_{20}b_{20}+\beta_ka_{02}b_{02})(a_{20}^kb_{11}^{3-k}a_{02}-b_{20}^ka_{11}^{3-k}b_{02}),\end{cases}\tag{4.1}$$

需要待定的系数依次为 1 个、4 个和 6 个. 上述方法也适用于 (E_3)，但 (E_3) 有 120 个基本 Lie 不变量，需要待定的系数急剧增多. 由此可见推导 (E_3) 奇点量公式的困难程度. 用上述方法可得

定理 4.1. 复系统 (E_2) 的前三个奇点量公式(只计幅角)如下：

$$\begin{cases}\mu_1=b_{20}b_{11}-a_{20}a_{11},\\ \mu_2=(2b_{20}-a_{11})(b_{20}+2a_{11})a_{11}b_{02}-(2a_{20}-b_{11})(a_{20}+2b_{11})b_{11}a_{02},\\ \mu_3=(a_{11}b_{11}-a_{02}b_{02})[(2b_{20}-a_{11})b_{20}a_{11}b_{02}-(2a_{20}-b_{11})a_{20}b_{11}a_{02}],\end{cases}$$

且当 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$ 时原点为广义中心.

推论 4.1. (E_2) 的原点为广义中心的充分必要条件是下列条件之一成立：

(i) Hamilton 系统条件：$2a_{20}-b_{11}=2b_{20}-a_{11}=0$；

(ii) 调和条件[1)]：$a_{11}=b_{11}=0$；

(iii) 对称性条件：$a_{20}a_{11}=b_{20}b_{11}$, $b_{11}^3a_{02}=a_{11}^3b_{02}$, $a_{20}^3a_{02}=b_{20}^3b_{02}$, $a_{20}^2b_{11}a_{02}=b_{20}^2a_{11}b_{02}$, $a_{20}b_{11}^2a_{02}=b_{20}a_{11}^2b_{02}$；

(iv) Малкин 积分[5]存在条件：$b_{20}+2a_{11}=a_{20}+2b_{11}=0$，$a_{11}b_{11}=a_{02}b_{02}$.

证. 若条件 (ii) 成立，显然有 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$. 兹设 (ii) 不成立. 令

1) 在此条件下有 $\frac{\partial^2 Z}{\partial z\partial w}=\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial w}=0$，即对$(\hat{E})$有 $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0$.

$$\lambda = \begin{cases} b_{20}/a_{11}, & \text{当 } a_{11} \neq 0, \\ a_{20}/b_{11}, & \text{当 } b_{11} \neq 0. \end{cases}$$

则 $\mu_1 = 0$ 的充分必要条件为

$$b_{20} = \lambda a_{11}, \quad a_{20} = \lambda b_{11}. \tag{4.2}$$

由(4.2)式可见,当 $\mu_1 = 0$ 时有

$$\begin{cases} \mu_1 = (2\lambda - 1)(\lambda + 2)(a_{11}^3 b_{02} - b_{11}^3 a_{02}), \\ \mu_2 = \lambda(2\lambda - 1)(a_{11}b_{11} - a_{02}b_{02})(a_{11}^3 b_{02} - b_{11}^3 a_{02}). \end{cases} \tag{4.3}$$

由(4.2)式与(4.3)式即得推论 4.1 的证明.

注记 4.1. 当推论 4.1 的条件之一成立时，($\hat{\mathrm{E}}_2$) 的原点在实平面上未必是中心. 例如当 $b_{11}b_{02} \neq 0$, $a_{02} = a_{11} = b_{20} = a_{20} + 2b_{11} = 0$ 时,推论 4.1 的条件 (iv) 成立,但 ($\hat{\mathrm{E}}_2$) 的系数不全是实数.

(E_2) 与其伴随系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy - A_{02}y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + B_{20}y^2 + B_{11}xy + B_{02}x^2, \end{cases} \tag{$\hat{\mathrm{E}}_2$}$$

的系数对应关系为

$$4a_{20} = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad 4a_{11} = \beta_1 + i\beta_2, \quad 4a_{02} = \gamma_1 + i\gamma_2,$$
$$4b_{20} = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad 4b_{11} = \beta_1 - i\beta_2, \quad 4b_{02} = \gamma_1 - i\gamma_2.$$

其中

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = B_{02} - B_{20} + A_{11}, \quad \alpha_2 = -(A_{02} - A_{20} + B_{11}), \\ &\beta_1 = 2(B_{20} + B_{02}), \quad \beta_2 = 2(A_{20} + A_{02}), \\ &\gamma_1 = B_{02} - B_{20} - A_{11}, \quad \gamma_2 = -(A_{02} - A_{20} - B_{11}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

利用恒等式

$$(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2)(z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2)$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & 0 & 0 \\ -y_2 & y_1 & -z_2 & z_1 \\ -y_1 & -y_2 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & w_2 & w_1 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ -y_2 & y_1 & -z_2 & z_1 \\ -y_1 & -y_2 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & w_2 & w_1 \end{vmatrix},$$

便由定理 4.1 立即可得.

推论 4.2. 如果 ($\hat{\mathrm{E}}_2$) 是实系数平面微分自治系统，则其原点的前三个焦点量公式(只计符号)如下:

$$V_3 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1,$$

$$V_5 = \begin{vmatrix} \alpha_2 - 2\beta_2 & \alpha_1 + 2\beta_1 & 0 & 0 \\ -(2\alpha_2 + \beta_2) & 2\alpha_1 - \beta_1 & \beta_2 & \beta_1 \\ -(2\alpha_1 - \beta_1) & -(2\alpha_2 + \beta_2) & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix},$$

$$V_7=[(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\gamma_1^2+\gamma_2^2)]\begin{vmatrix}2\alpha_2+\beta_2 & 2\alpha_1-\beta_1 & 0 & 0\\ -\alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \beta_1 & -\beta_2\\ 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1\end{vmatrix}.$$

其中 α_k, β_k, $\gamma_k(k=1,2)$ 由(4.4)式给出.

注记 4.2. 以上两个四阶行列式都是在变换(2.2)式下的二级旋转不变量,而 $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$, $\beta_1^2+\beta_2^2$ 及 $\gamma_1^2+\gamma_2^2$ 则都是一级旋转不变量.

定理 4.2. 对于缺二次项的三次系统 ($E_3^{(3')}$), 其原点的前五个奇点量公式如下(只计幅角):

$$\mu_1=a_{21}-b_{21},$$
$$\mu_2=b_{30}b_{12}-a_{30}a_{12},$$
$$\mu_3=(3a_{30}-b_{12})(a_{30}+3b_{12})a_{03}-(3b_{30}-a_{12})(b_{30}+3b_{12})b_{03},$$
$$\mu_4=(a_{21}+b_{21})[(3a_{30}-b_{12})^2a_{03}-(3b_{30}-a_{12})^2b_{03}],$$
$$\mu_5=(4a_{12}b_{12}-a_{03}b_{03})[(3a_{30}-b_{12})^2a_{03}-(3b_{30}-a_{12})^2b_{03}],$$

且当前五个奇点量全为零时原点为广义中心.

推论 4.3. ($E_3^{(3')}$) 原点为广义中心的充分必要条件是下列条件之一成立:

(i) Hamilton 系统条件: $a_{21}=b_{21}$, $3a_{30}-b_{12}=3b_{30}-a_{12}=0$.

(ii) 对称条件: $a_{21}=b_{21}$, $b_{30}b_{12}=a_{30}a_{12}, a_{30}^3a_{03}=b_{30}^3b_{03}, a_{30}b_{12}a_{03}=b_{30}a_{12}b_{03}, b_{12}^2a_{03}=a_{12}^2b_{03}$.

(iii) Магкин 积分存在条件: $a_{21}=b_{21}=0$, $a_{03}b_{03}=4a_{12}b_{12}$, $a_{30}+3b_{12}=b_{30}+3a_{12}=0$.

对 ($E_3^{(3')}$) 的伴随系统 ($\hat{E}_3^{(3')}$), 由定理 4.2 立即可得原点的前五个焦点量公式, 其表达式已在文献[6]中给出.

如果 (E_2) 和 ($E_3^{(3')}$) 是实系数平面微分自治系统,则由定理 4.1 和定理 4.2 给出的,即是原点的鞍点量公式. 其中 (E_2) 的鞍点量公式已在文献[7]和文献[8]中给出, 与本文结果相容.

最后,对一般的 n 次系统 (E_n), 应用 Hilbert 的有限基定理[9], 可以证明, 存在有限整数 $M(n)$ 使得若 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{M(n)}=0$, 则一切奇点量都为零. 即实系统焦点量存在有限基的结论可推广到复系统.

参 考 文 献

[1] Амелькин, В. В., Лукашевич, Н. А. и Садовский, А. П., *Нелинейные колебания в системах второго борянка*, Минск, Издательство БГУ им. Ленина В. И. 1982.

[2] Joyal, D., *Thesis*, Universte de Montreal, 1985.

[3] 马库雪维奇, A. N., 解析函数论,高等教育出版社,1957(第一版),221—223.

[4] 戈鲁别夫, B.B., 微分方程解析理论讲义,高等教育出版社,1956,17—18.

[5] Малкин, К. Е., *Волж, Маг. Сб.*, 2(1974), 87—91.

[6] 刘一戎,科学通报,**32**(1987),2: 85—87.

[7] 蔡燧林,数学学报,**30**(1987),4: 553—559.

[8] Zhu Deming (朱德明), 数学年刊, **8B**(1987), 4:466—478.

[9] 范德瓦尔登, B.L., 代数学 (II), 科学出版社,1976,452—453.